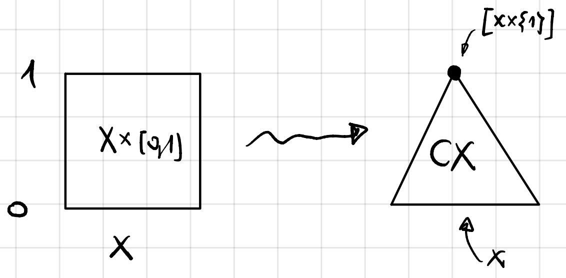
Конструкције нових т.пр.

① Конус простора X

$$CX \overset{\text{def}}{=} X \times [0,1] \big/ X \times \{1\} = X \times [0,1] \big/ {\scriptstyle (x,1) \sim (y,1) \atop (\forall x,y \in X)}$$

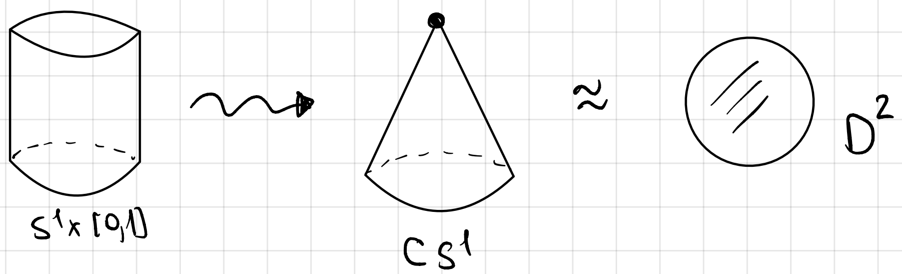


имамо утапање $i: X \hookrightarrow CX$:

$i(x) = [(x,0)]$

(а може и $i(x) = [(x,t)]$, $t \in [0,1)$)

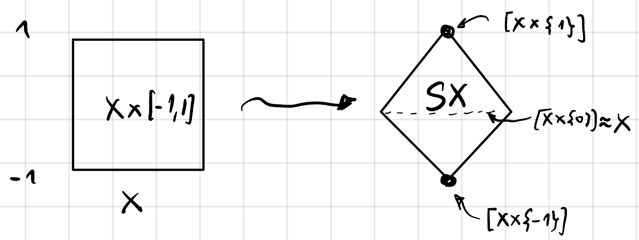
Пример $CS^1 = S^1 \times [0,1] \big/ S^1 \times \{1\} = D^2$



Генерално: $CS^n = D^{n+1}$.

② Суспензија простора X

$$SX = X \times [-1,1] \big/ {\scriptstyle (x,1) \sim (y,1), \atop {(x,-1) \sim (y,-1), \atop (\forall x,y \in X)}}$$

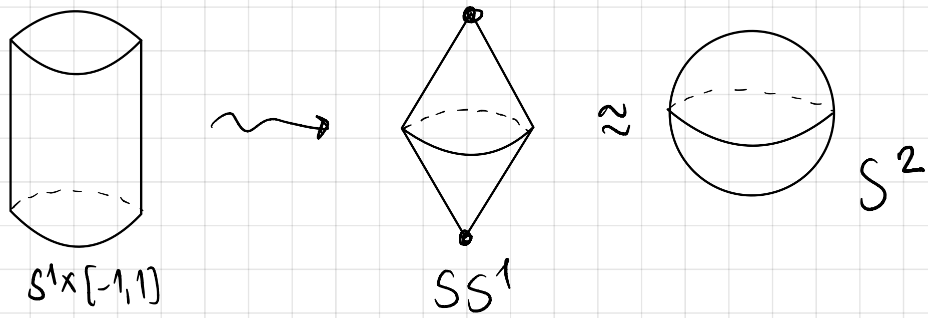


имамо утапање $i: X \hookrightarrow SX$:

$i(x) = [(x,0)]$

(а може и $i(x) = [(x,t)]$, $t \in (-1,1)$)

Пример $SS^1 = S^1\times[-1,1]/_\sim \approx S^2$



Генерално $SS^n \approx S^{n+1}$

③ Дисјунктна унија X и Y: $(X\sqcup Y, \mathcal{T}_{X\sqcup Y})$

$$\mathcal{T}_{X\sqcup Y} = \{U\in X\sqcup Y \mid U\cap X\in\mathcal{T}_X,\ U\cap Y\in \mathcal{T}_Y\}$$

④ Простор са базном тачком (X,x_0)

$x_0\in X$ – произвољна тачка из X

(овде ништа не конструишемо, само уводимо појам базне тачке)

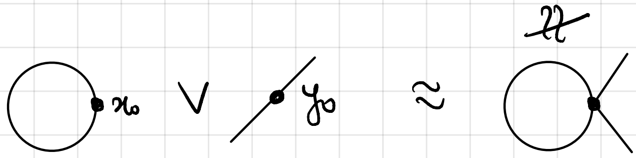
⑤ Букет простора X и Y

$x_0\in X$, $y_0\in Y$ базне тачке

$$(X,x_0)\vee(Y,y_0) \overset{def}{=} X\sqcup Y/_{x_0\sim y_0}$$

Пример (1)

(2)



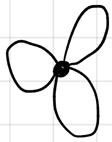
Букет зависи од избора базне тачке!

У неким просторима је свеједно шта је базна т. и тада пишемо само $X \vee Y$. тј.

$$(\forall x_0, x_1 \in X)(\forall y_0, y_1 \in Y)\ (X, x_0) \vee (Y, y_0) \approx (X, x_1) \vee (Y, y_1)$$

$\Rightarrow \quad X \vee Y \overset{def}{=} (X, x_0) \vee (Y, y_0)$, за $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ произвољно.

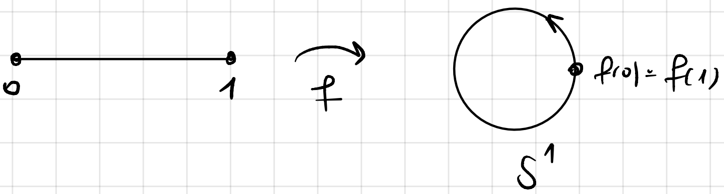
(углавном се и срећемо баш са овом ситуацијом.)

Пример $[1,4] / \{1,2,3,4\} \approx$  $= S^1 \vee S^1 \vee S^1$

Примери количничких простора

① **Кружница**

$f : I \to S^1$, $\qquad f(t) \overset{def}{=} (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$



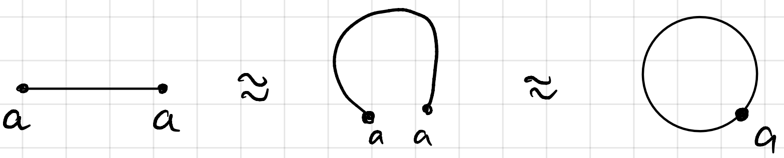
f је непр. и „на", I је компактан, S^1 је T_2 $\Rightarrow$ f је кол.

$\Rightarrow \quad I/f \approx S^1$. Шта је I/f? За $s, t \in I$:

$$s \sim t \iff f(s) = f(t) \iff (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$$

$$\iff t = s \ \vee \ t, s \in \{0, 1\}$$

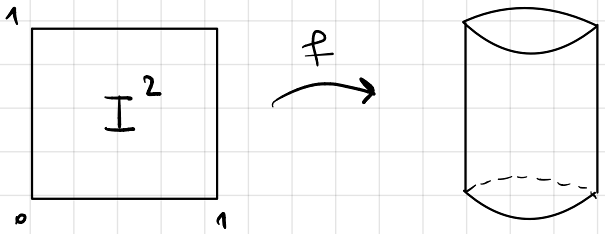
Дакле, I/f је сегмент $[0,1]$ коме су почетак и крај идентификовани!

$I/f =$  $= S^1$

ова слика значи да „лепимо" a и a

② цилиндар

$$f : I^2 \to S^1 \times I, \quad f(u,v) \overset{\text{def}}{=} (\cos 2\pi u, \sin 2\pi u, v)$$



$S^1 \times I$

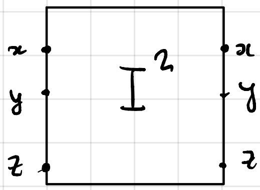
f је количничко (непр., „на", компакт $\to T_2$)

$\Rightarrow \quad I^2/f \approx S^1 \times I$

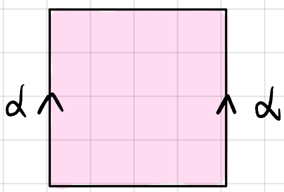
Класе у I^2/f:

$$(u_1, v_1) \sim (u_2, v_2) \iff \big(u_1 = u_2 \ \vee\ u_1, u_2 \in \{0,1\}\big) \wedge v_1 = v_2$$

Дакле, идентификујемо тачке: $(0,v) \sim (1,v)$, $v \in I$

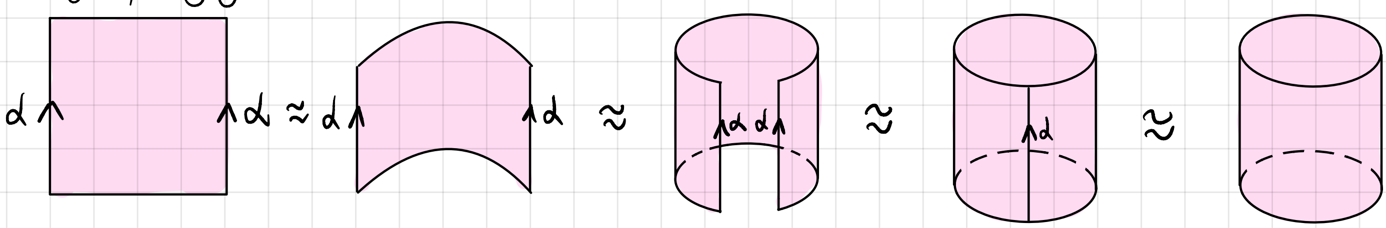


Користимо ознаку:



ово значи да лепимо дужи означене са α у смеру стрелица

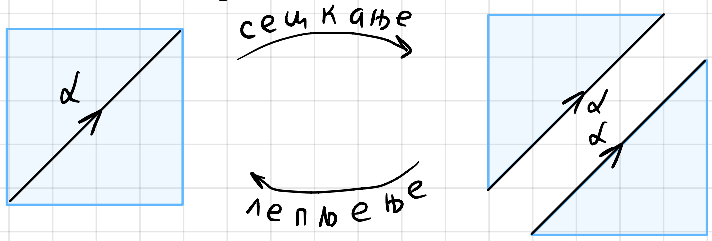
илустрације:



$S^1 \times I$

деф. Количнички простор хомеоморфан неком топ. пр. X је његов количнички модел.

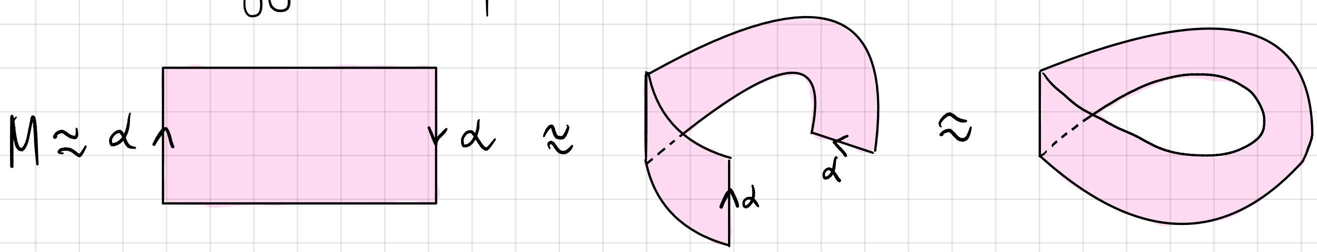
Количнички модели нам служе да простор представимо на лакши начин, нпр. често тродимензионалне објекте можемо представити равнинским моделом (као цилиндар у претходном примеру). Имамо две (међусобно инверзне) операције са кол. моделима:



(Обе ове слике представљају квадрат.)

Сецкањем и лепљењем можемо трансформисати моделе (али све време добијамо међусобно хомеоморфне просторе).

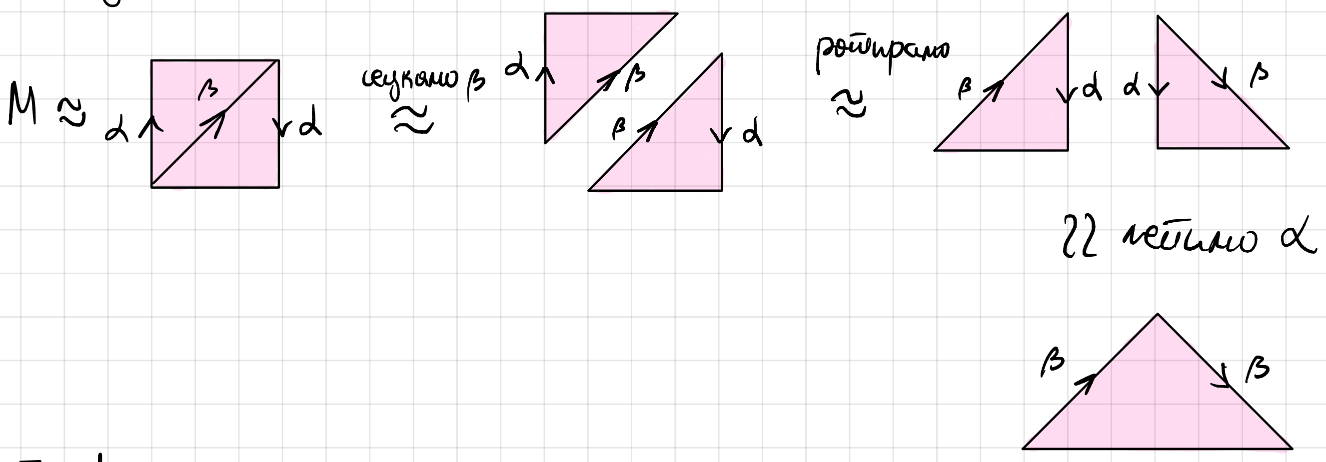
③ Мебијусова трака M



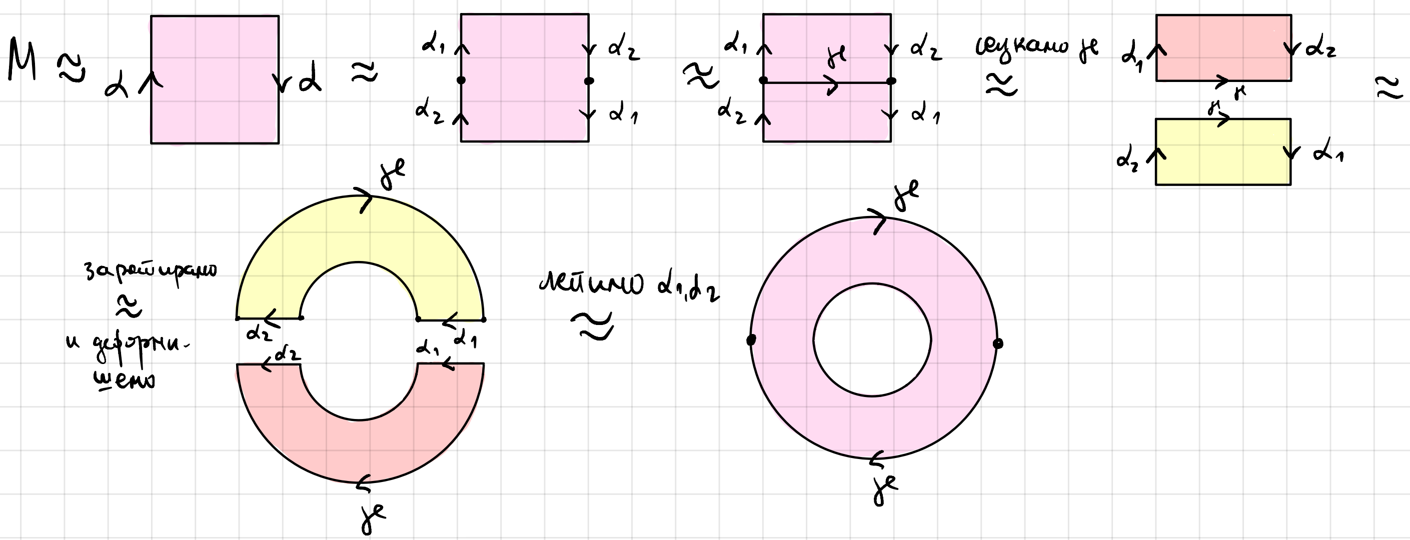
основни модел за M

M има још 2 корисна модела које добијамо сецкањем и лепљењем овог модела

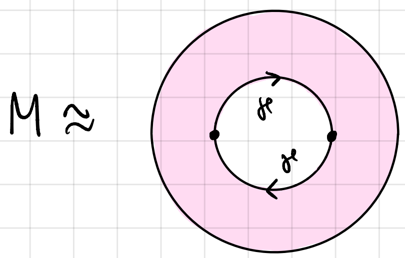
други модел:



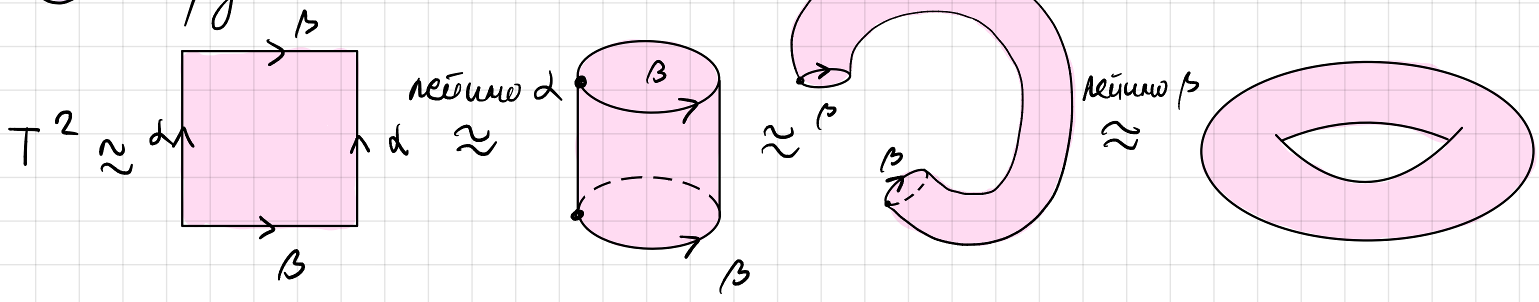
трећи модел:



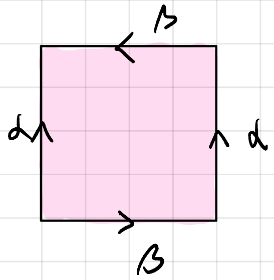
Кружни прстен можемо и „изокренути", тј.



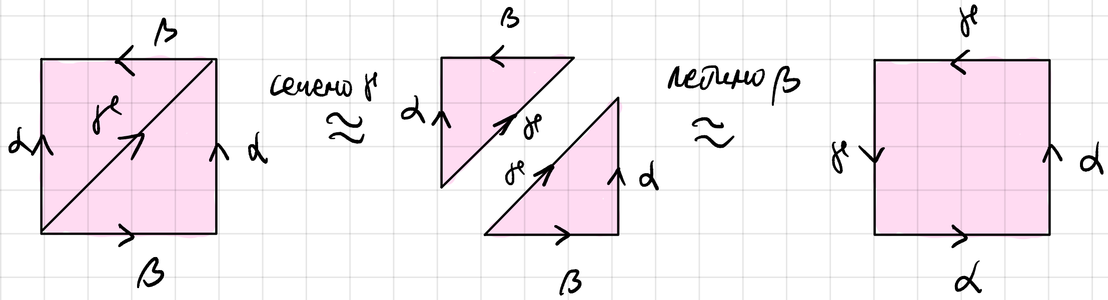
④ торус T^2



⑤ Клајнова боца K

$K \approx$ 

други модел:

$K \approx$ 

⑥ Реални пројективни простор $\mathbb{R}P^n$

На $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ дефинишемо релацију:

$$x\sim y \iff (\exists \lambda\in\mathbb{R})\quad y=\lambda x$$

(тј. $x\sim y$ ако припадају истој правој која пролази кроз 0)

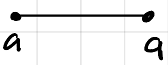
Може се показати да је $\sim$ рел. екв.

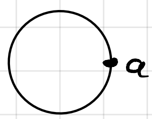
деф. $\mathbb{R}P^n \overset{def}{=} (\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\})/_\sim$

(тј. елементи $\mathbb{R}P^n$ су праве у $\mathbb{R}^{n+1}$ кроз 0)

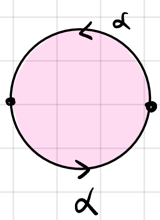
Став $\mathbb{R}P^n \approx S^n/_{x\sim -x}$

Став $\mathbb{R}P^n \approx D^n/_{x\sim -x,\ x\in\partial D^n}$

$n=1$: $\mathbb{R}P^1 \approx D^1/_\sim \approx$ 

$=$ 

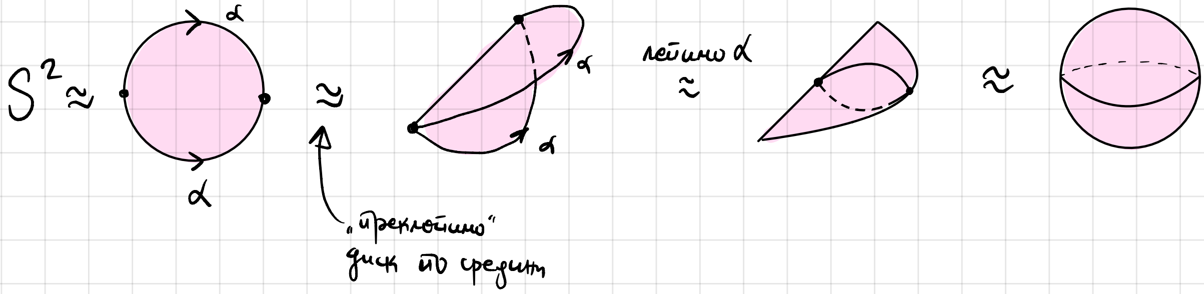
$= S^1$

$n=2$: $\mathbb{R}P^2 \approx D^2/_\sim =$ 

пројективна раван

Став $\mathbb{R}P^n$ је компактан, Хауздорфов, повезан и путно пов.

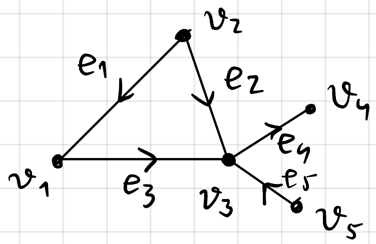
⑦ **сфера** S^2



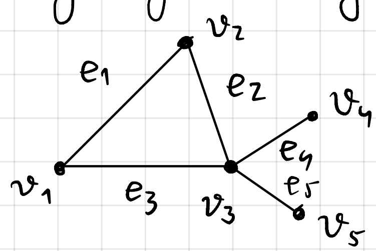
Графови

деф. Нека су V и E скупови, $V \neq \emptyset$ и $f: E \to V^2$. Уређена тројка (V, E, f) је **усмерени граф**. Елементи скупа V су **темена** графа, а елементи скупа E су **ивице** графа.
Ако је $f(v_1, v_2) = e$, кажемо да ивица e спаја темена v_1 и v_2.

Пример $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$



Неусмерени граф добијамо кад заборавимо оријентацију



формално:

деф. **Неусмерен граф** (или само граф) је уређена тројка (V, E, f), где су V, E скупови, $V \neq \emptyset$ и $f: V \to P_{1,2}(V)$
(где је $P_{1,2}(V) = \{U \subseteq V \mid |U| = 1 \vee |U| = 2\}$ тј. $P_{1,2}(V)$ су једночлани и двочлани подскупови од V).
Елементи скупа V су **темена**, а елементи скупа E су **ивице**.
Ако је $f(e) = \{v\}$, онда је e **петља** у v.
Ако је $f(e) = \{v_1, v_2\}$, кажемо да e спаја v_1 и v_2.
Граф је коначан ако су V и E коначни скупови.

Надаље радимо са коначним неусмереним графовима.

Пример $G=(V,E,f)$, $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$, $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$

$f: E \to P_{1,2}(V)$ дато са:

$f(e_1)=\{v_1,v_2\}$

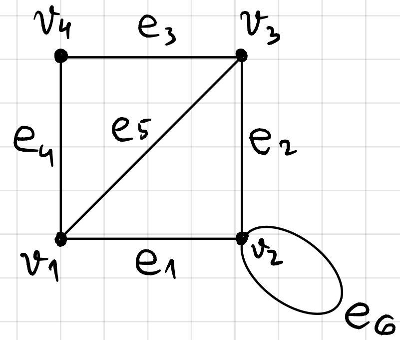
$f(e_2)=\{v_2,v_3\}$

$f(e_3)=\{v_3,v_4\}$

$f(e_4)=\{v_1,v_4\}$

$f(e_5)=\{v_1,v_3\}$

$f(e_6)=\{v_2\}$

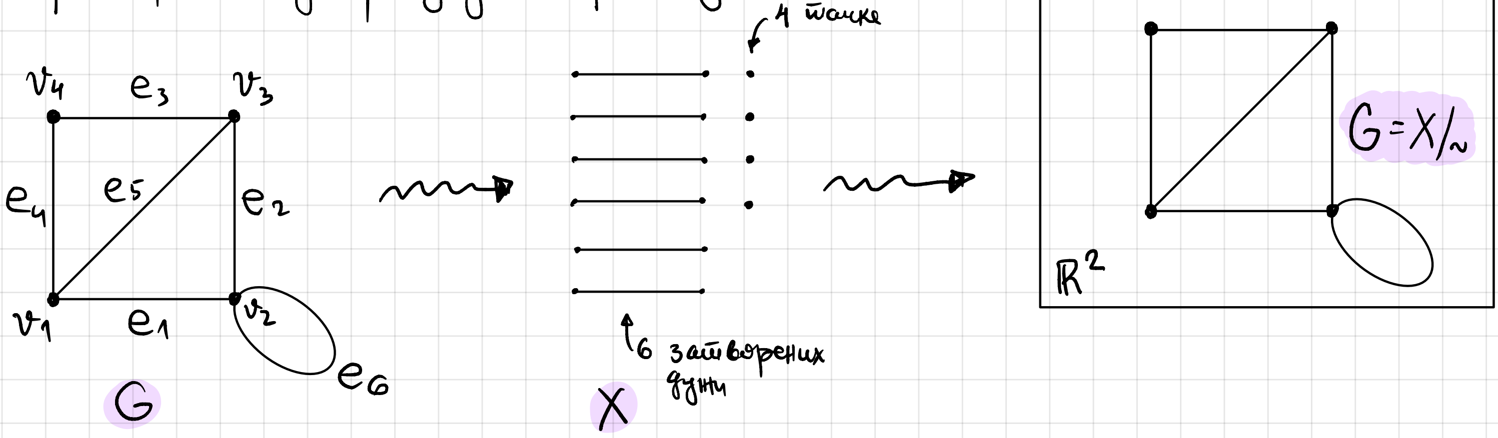


Сваки граф одређује један тополошки простор:

деф Нека је $G=(V,E,f)$ граф. Нека је $n=|V|$ и $m=|E|$. У равни уочимо n тачака и m дисјунктних дужи. Нека је тај потпростор од $\mathbb{R}^2$ означен са X. Даље, свакој дужи из X одговара једна ивица из E, а n тачака одговарају теменима графа. Ако је $e \in E$ и $f(e)=\{v_1,v_2\}$, идентификујемо крајеве дужи (у X) које одговара ивици e са тачкама (у X) које одговарају теменима v_1 и v_2. Ова идентификација је једна релација еквиваленције, а количнички простор $X/\sim$ (који исто означавамо са G) такође називамо графом (у тополошком смислу).

Поента: граф можемо видети и као комбинаторни објекат (V,E,f) и као тополошки пр. $X/\sim$, како нам кад одговара.

Пример (илустрација претходне деф.)



$|V| = 4, \ |E| = 6$