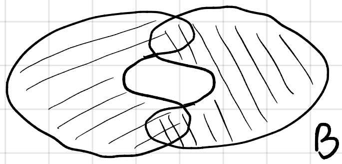
Пример A, B повезани $\not\Rightarrow$ $A \cap B$ повезан

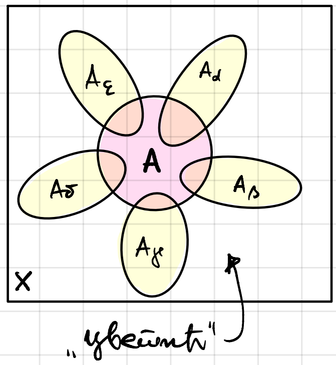
Нпр.



$A \cap B =$  неповезан

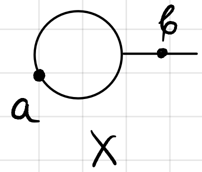
У једном специјалном случају ће унија повезаних скупова бити повезана:

Теорема [цветић] Нека је X топ. пр. а A и A_α, $\alpha \in \mathcal{A}$ повезани подскупови од X. Ако је $A \cap A_\alpha \neq \emptyset$ за свако $\alpha \in \mathcal{A}$, онда је $A \cup \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$ повезан.



деф. Нека је X повезан. Тачка $x \in X$ је **раздвојна** ако је $X \setminus \{x\}$ неповезан. У супротном, x је **нераздвојна**.

Пример



a је нераздвојна тачка

b јесте раздвојна тачка

Став Бројеви раздвојних и нераздвојних тачака су тополошке инваријанте.

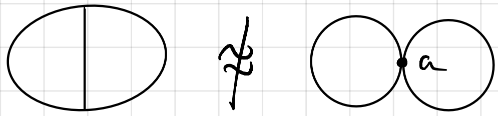
Пример $(0,1)$, $[0,1)$ и $[0,1]$ нису међусобно хомеоморфни.

$(0,1)$: нема нераздвојних тачака

$[0,1)$: има једну нераздвојну тачку - 0

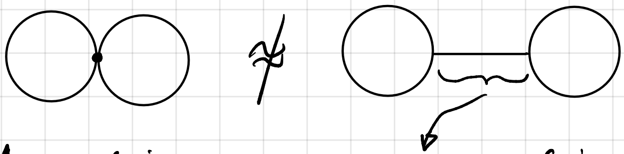
$[0,1]$: има две нераздвојне тачке - 0 и 1

Пример (1)



нема раздвојних тачака — а је раздвојна тачка

(2)



1 раздвојна тачка — ∞ раздвојних тачака

Пример $\mathbb{R} \not\cong \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$

$(\forall x \in \mathbb{R})$ $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ је неповезан $\Rightarrow$ све тачке су раздвојне

$(\forall y \in \mathbb{R}^n)$ $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$ је повезан $\Rightarrow$ све тачке су нераздвојне

Компоненте повезаности

Нека је X топ. пр. Дефинишемо релацију $\sim$ на X: за $x, y \in X$

$$x \sim y \iff (\exists A \subseteq X)\ x, y \in A \text{ и } A \text{ је повезан.}$$

Став $\sim$ је релација еквиваленције.

доказ (Р) $x \sim x$ – узмемо $A := \{x\}$ - повезан

(С) очигледно

(Т) $x \sim y \iff (\exists A \subseteq X)$ $x, y \in A$ и A је повезан

$y \sim z \iff (\exists \quad \subseteq X)$ $y, z \in B$ и B је повезан

$y \in A \cap B \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \cup B$ је повезан на основу теореме цвећа

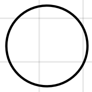
Узмемо $C := A \cup B$

$x, z \in A \cup B$ - повезан $\Rightarrow x \sim z$. $\blacksquare$

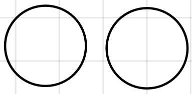
деф. Класе еквиваленције релације $\sim$ називамо **компонентама повезаности** од X. Класу од $x \in X$ означавамо са C_x.

Став Број компонената повезаности је тополошка инваријанта.

Пример (1)



$\not\cong$

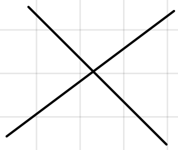


1 компонента   2 компоненте

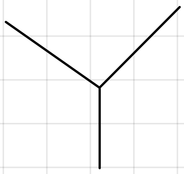
(2) $(0,1) \cup (1,2) \not\cong (3,4) \cup (4,5) \cup (5,6)$

2 компоненте   3 компоненте

Пример

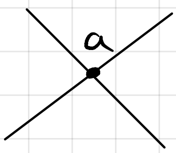


$\not\cong$

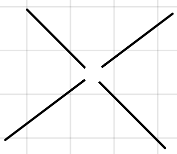


X   Y

X и Y су повезани, тј. имају по 1 компоненту па ту нема проблема. Нека је $a \in X$ као на слици. Ако би било $h: X \cong Y$, онда $X \setminus \{a\}$ и $Y \setminus \{h(a)\}$ морају имати исти број компонената. Не знамо где је $h(a)$ али имамо 2 случаја:



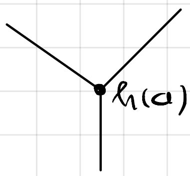
X



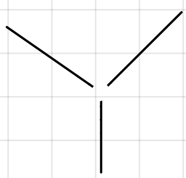
$X \setminus \{a\}$

4 компоненте

1° $h(a)$ је у средини



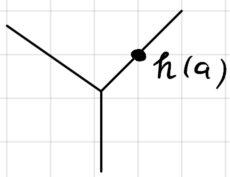
Y



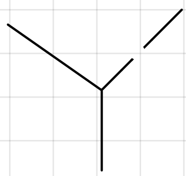
$Y \setminus \{h(a)\}$

3 компоненте

2° $h(a)$ је на „краку"



Y



$Y \setminus \{h(a)\}$

2 компоненте

Дакле, $X\setminus\{a\}$ има 4 компоненте, а $Y\setminus\{h(a)\}$ 2 или 3, па $X \not\cong Y$.

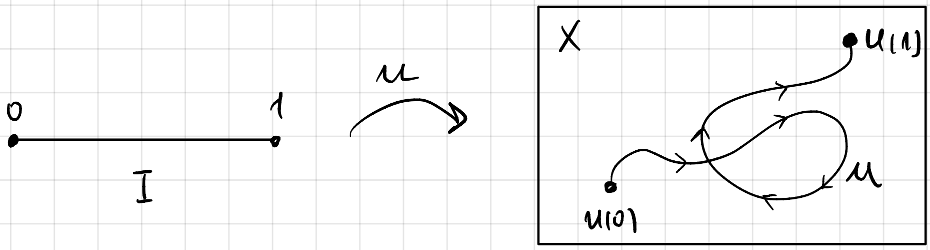
Став Нека је X топ. пр. и $x\in X$

(1) C_x је највећи повезан скуп који садржи x.

(2) C_x је затворен у X.

Путна повезаност

деф. Пут у топ. пр. X је непрекидно пресликавање $u: [0,1]\to X$. $u(0)$ је почетак, а $u(1)$ крај пута u. Надаље користимо ознаку $I=[0,1]$.



деф. X је путно повезан ако за сваке две тачке $x,y\in X$ постоји пут од x до y, тј.

$$(\forall x,y\in X)(\exists u: I\to X \text{ непр.})\ u(0)=x,\ u(1)=y$$

Став Ако је X путно повезан и $f: X\to Y$ непр. и „на", онда је и Y путно повезан.

доказ: Нека су $y_1,y_2\in Y$. f је „на" па постоје $x_1,x_2\in X$ тд. $f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2$. X је путно пов. па постоји пут $u: I\to X$ од x_1 до x_2. Тада је $f\circ u: I\to Y$ пут од y_1 до y_2. ∎

Последица Путна повезаност је тополошка инваријанта.

Последица Ако је $f: X\to Y$ непр. и $A\subseteq X$ путно повезан, онда је и $f(A)$ путно повезан.

Став Ако је X путно пов, онда је и повезан.

доказ тпс. Нека је $f: X \to \{0,1\}$ непр. пр.

$$(\exists x,y\in X)\ f(x)=0,\ f(y)=1$$

Нека је $u:[0,1]\to X$ пут од x до y, тј. $u(0)=x$, $u(1)=y$.

$$\begin{tikzcd} {[0,1]} \arrow[r, "u"] \arrow[dr, dashed, "f\circ u"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & \{0,1\} \end{tikzcd}$$

$f\circ u$ је непр. и „на"
$[0,1]$ је пов. $\Rightarrow$ $\{0,1\}$ је повезан ↯ ■

Пример X повезан $\not\Rightarrow$ путно повезан

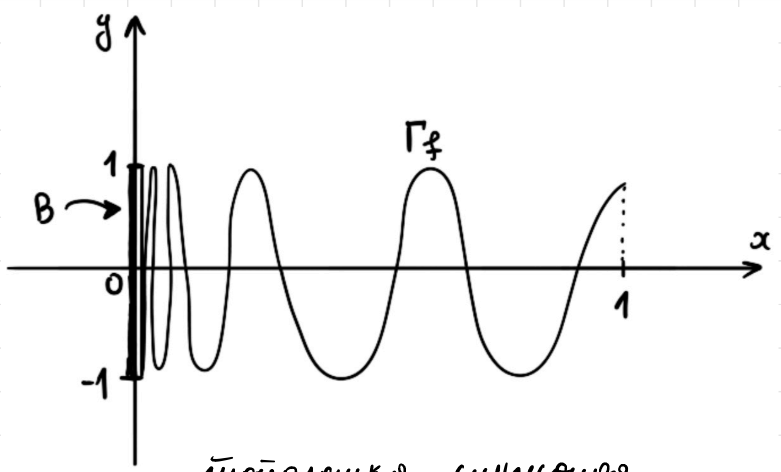
Нека је $f:(0,1]\to\mathbb{R}$ дато са $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ и

$\Gamma_f=\{(x,f(x)) \mid x\in(0,1]\}$ график ове функције.

Γ_f је путно повезан $\Rightarrow$ Γ_f је повезан $\Rightarrow$ $X:=\overline{\Gamma_f}$ је повезан

Није тешко видети да је

$$X=\underbrace{(\{0\}\times[-1,1])}_{\overset{!!}{B}}\cup\Gamma_f$$



тополошка синусоида

X није путно повезан јер тачке са B не можемо спојити путем са тачкама са Γ_f.

Тополошки производ

Нека су $(X, \mathcal{T}_X)$ и $(Y, \mathcal{T}_Y)$ топ. пр.

$$\mathcal{T}_{X\times Y} \overset{\text{def}}{=} \{ W \subseteq X \times Y \mid (\forall (x,y)\in W)(\exists U \in \mathcal{T}_X)(\exists V \in \mathcal{T}_Y)\ (x,y) \in U \times V \subseteq W \}$$

$$= \{ \bigcup_{\alpha \in A} (U_\alpha \times V_\alpha) \mid (\forall \alpha \in A)\ U_\alpha \in \mathcal{T}_X,\ V_\alpha \in \mathcal{T}_Y \}$$

Став $\mathcal{T}_{X\times Y}$ је једна топологија на $X \times Y$.

деф. Топ. пр. $(X \times Y, \mathcal{T}_{X\times Y})$ је **тополошки производ** простора X и Y, а $\mathcal{T}_{X\times Y}$ називамо **топологијом производа** или **Тихоновљевом топологијом**.

Став Пројекције $p_X : X \times Y \to X$ и $p_Y : X \times Y \to Y$ дате са

$$p_X(x,y) := x, \quad p_Y(x,y) := y$$

су непрекидне и отворене.

Став $f : Z \to X \times Y$ је непр. акко су непр. $p_X \circ f$ и $p_Y \circ f$.

$$\begin{tikzcd} & & X \\ Z \arrow[r, "f"] & X \times Y \arrow[ur, "p_X"] \arrow[dr, "p_Y"'] & \\ & & Y \end{tikzcd}$$

деф. Кажемо да је својство P **продуктибилно** ако:

X и Y имају својство P $\Rightarrow$ $X \times Y$ има својство P

Теорема X, Y компактни $\Rightarrow$ $X \times Y$ је компактан.

Теорема X, Y Хаусдорфови $\Rightarrow$ $X \times Y$ је Хаусдорфов.

Теорема X, Y повезани $\Rightarrow$ $X \times Y$ је повезан.

Теорема X, Y путно повезани $\Rightarrow$ $X \times Y$ је путно повезан.

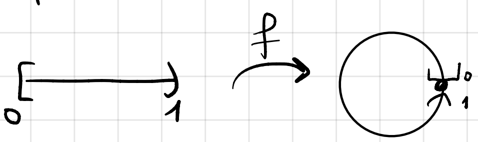
Количничка пресликавања

деф. Пресликавање $f : X \to Y$ је количничко ако је „на" и

$$(\forall B \subseteq Y) \quad B \in \mathcal{T}_Y \iff f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X .$$

(Приметимо: смер „$\Rightarrow$" је непрекидност.)

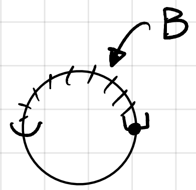
Пример $f : [0,1) \to S^1$, $\quad f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$



f је непр. и „на", али не важи услов „$\Leftarrow$" па није количничко

За $B := f([0,\frac{1}{2}))$ имамо:

$$f^{-1}(B) = [0,\tfrac{1}{2}) \in \mathcal{T}_{[0,1)} \not\Rightarrow B \in \mathcal{T}_{S^1}$$



Став Пресликавање $f : X \to Y$ је количничко акко је „на" и

$$(\forall B \subseteq Y) \quad B \in \mathcal{F}_Y \iff f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_X .$$

Став Ако је f непр., „на" и отворено/затворено, онда је f количничко.

доказ f отворено:

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X \xRightarrow{f \text{ отв.}} \underbrace{f(f^{-1}(B))}_{\overset{\| \ f \text{ „на"}}{B}} \in \mathcal{T}_Y$$

f затворено: слично. $\blacksquare$

Последица $f: X\to Y$ непр. и „на", X компактан, Y T_2
$\Rightarrow$ f је количничко.

<u>доказ</u> Имали смо раније тврђење: f: комп. $\to T_2$ је затворено. ■

Став Нека су $f: X\to Y$ и $g: Y\to Z$ количничка. Тада је
и $g\circ f$ количничко.

<u>доказ</u>: $g\circ f$ је непр. и „на" ✓
Нека је $B\subseteq Z$ и $(g\circ f)^{-1}(B)\in \mathcal{T}_X$

$$(g\circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))\in\mathcal{T}_X \overset{f\text{ кол.}}{\Longrightarrow} g^{-1}(B)\in \mathcal{T}_Y \overset{g\text{ кол.}}{\Longrightarrow} B\in\mathcal{T}_Z \quad ■$$

Теорема Нека је $f: X\to Y$ количничко и $g: Y\to Z$. Тада
g је непрекидно акко је $g\circ f$ непр.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

<u>доказ</u>: $\Rightarrow$: композиција непр. је непр.
$\Leftarrow$: Нека је $g\circ f$ непр. и $V\in\mathcal{T}_Z$.

$$g\circ f \text{ непр.} \Rightarrow (g\circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))\in\mathcal{T}_Z \overset{f\text{ кол.}}{\Longleftrightarrow} g^{-1}(V)\in\mathcal{T}_Z \Rightarrow g \text{ непр.} \quad ■$$

Количнички простори

Нека је X т.пр. и Y скуп и $f: X\to Y$ „на".
На Y дефинишемо финалну топологију помоћу f:

$$\mathcal{T}_Y := \mathcal{T}_f = \{V\subseteq Y \mid f^{-1}(V)\in\mathcal{T}_X\}$$

Став $\mathcal{T}_f$ јесте топологија на Y.

<u>доказ</u> по деф. ■

Став $f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_f)$ је количничко.

<u>доказ</u> директно из деф. $\boxtimes$

Став $\mathcal{T}_f$ је најшира топ. тд. је f непр.

Количнички простор задајемо на 3 начина.

① Помоћу релације екв.

Нека је X т. пр. и $\sim$ рел. екв. на X. Природна пројекција $\pi: X\to X/_\sim$, $x\mapsto[x]$ нам даје топ. на $X/_\sim$:

$$\mathcal{T}_{X/_\sim} := \mathcal{T}_\pi = \{V\subseteq X/_\sim \mid \pi^{-1}(V)\in\mathcal{T}_X\}.$$

Пар $(X/_\sim, \mathcal{T}_{X/_\sim})$ је количнички простор.

② Помоћу подскупа.

Нека је X т.пр. и $A\subseteq X$. Дефинишемо рел. $\sim$ на X:

$$x\sim y \overset{def}{\iff} x=y \ \vee\ x,y\in A$$

$\sim$ је рел. екв. па дефинишемо:

$$X/A \overset{def}{=} X/_\sim \quad \text{и} \quad \mathcal{T}_{X/A} \overset{def}{=} \mathcal{T}_{X/_\sim}$$

Пар $(X/A, \mathcal{T}_{X/A})$ је количнички простор.

③ Помоћу пресликавања.

Нека су X, Y т.пр. и $f: X\to Y$ непр. Дефинишемо $\sim$ на X:

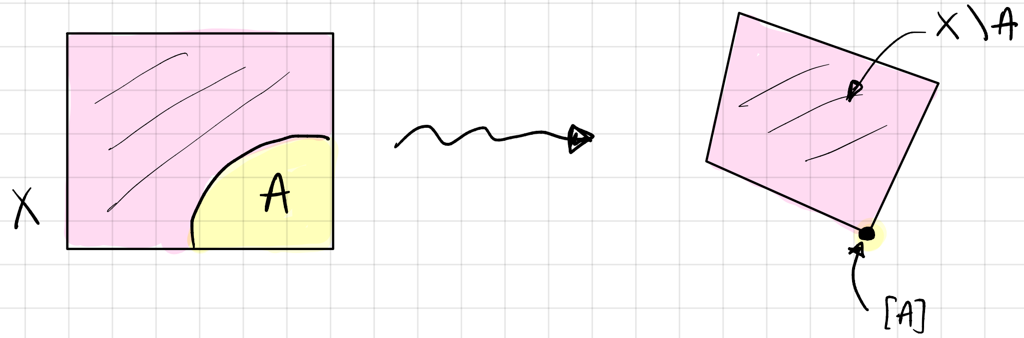
$$x\sim y \iff f(x)=f(y).$$

$\sim$ је рел. екв. и

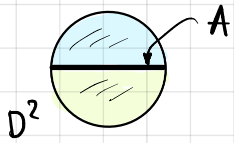
$$X/f \overset{def}{=} X/_\sim, \quad \mathcal{T}_{X/f} \overset{def}{=} \mathcal{T}_{X/_\sim}.$$

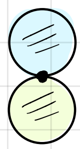
Пар $(X/f, \mathcal{T}_{X/f})$ је количнички простор.

Пример $A \subseteq X$, $X/A =$ „скупимо A у тачку"

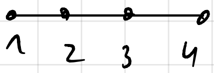


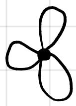
(1) $X/X \approx *$

(2) 

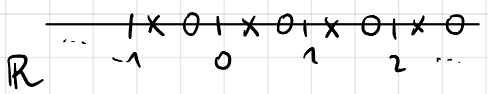
$D^2/A =$ 

(3) $D^n/\partial D^n = S^n$, $n \in \mathbb{N}$

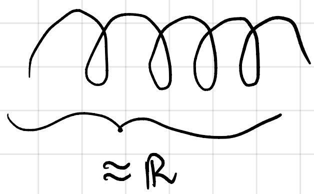
(4) $[1,4]/\{1,2,3,4\} =$ 

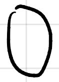
$/_{\{1,2,3,4\}} \approx$ 

Пример (1) $\sim$ на $\mathbb{R}$: $x \sim y \overset{def}{\iff} x - y \in \mathbb{Z}$

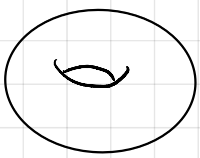


$/_{\sim} \approx S^1$

илустрација 

$\rightarrow$  S^1 („намотало" $\mathbb{R}$ на S^1)

(2) $\sim$ на $\mathbb{R}^2$: $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff x_1 - x_2 \in \mathbb{Z} \wedge y_1 - y_2 \in \mathbb{Z}$

$\mathbb{R}^2/_{\sim} \approx T^2 =$  $=$ торус

Теорема Ако је $f: X \to Y$ количничко, онда је $X/f \approx Y$.

доказ:
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & Y \\ & X/f \arrow[u, dashed, "g"'] \end{tikzcd}$$

Нека је $g: X/f \to Y$ дато са

$$g([x]) := f(x)$$

g је добро деф.: $x, y \in X$

$$[x] = [y] \Leftrightarrow x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow g([x]) = g([y])$$

g је непр.: $g \circ \pi = f$ је непр. и π кол. $\Rightarrow$ g је непр.

g је „1-1": $g([x]) = g([y]) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x \sim y \Leftrightarrow [x] = [y]$

g је „на": $y \in Y \overset{f \text{ „на"}}{\Longrightarrow} (\exists x \in X)\, f(x) = y \Leftrightarrow y = g([x])$.

g је бијекција $\Rightarrow$ постоји g^{-1}

g^{-1} је непр.: $g^{-1} \circ f = \pi$ је непр. и

f количничко $\Rightarrow$ g^{-1} је непр.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & Y \arrow[d, shift left, "g^{-1}"] \\ & X/f \arrow[u, shift left, "g"] \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ g је хомеоморфизам $\Rightarrow$ $X/f \approx Y$. $\blacksquare$

Пример $f: [0,1] \to S^1$ $\quad f(t) = e^{2\pi i t}$

f је непр. и слика компакт $[0,1]$ у T_2 простор S^1, па је затворено.

Дакле, f је непр., „на" и затворено $\Rightarrow$ f је количничко.

$\Rightarrow$ $[0,1]/f \approx S^1$.