Хомеоморфизми

Појам хомеоморфизма је централан у топологији и казује нам шта то значи да су два топ. простора „иста“.

деф. Кажемо да је $h: X \to Y$ **хомеоморфизам** ако је h бијекција и h и h^{-1} су непр.

Ако постоји хомео. између X и Y пишемо $X \approx Y$.

Став $\approx$ је рел. еквиваленције.

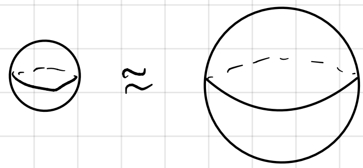
доказ (Р) $\mathbb{1}: (X, \mathcal{T}_X) \to (X, \mathcal{T}_X)$ је хомео. $\Rightarrow X \approx X$

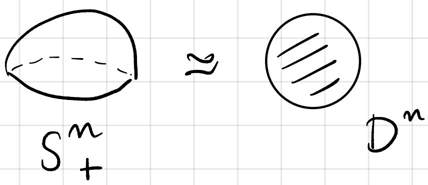
(С) $X \approx Y \Leftrightarrow h: X \xrightarrow{\approx} Y \Leftrightarrow h^{-1}: Y \xrightarrow{\approx} X \Leftrightarrow Y \approx X$

(Т) Нека је $h_1: X \xrightarrow{\approx} Y$ и $h_2: Y \xrightarrow{\approx} Z$. Онда је $h_2 \circ h_1: X \to Z$ такође хомео. па је $X \approx Z$. ∎

Користимо и ознаке: $X \overset{h}{\approx} Y$ и $h: X \approx Y$ за $h: X \to Y$ хомео.

Пример (1) $h: [a, b] \approx [0, 1]$, $h(x) \overset{def}{=} \frac{x-a}{b-a}$

(2)  (хомотетија)

(3) 

(4) $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: X \to \mathbb{R}$, $\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

график функције f

$h: \Gamma_f \approx X$, $h(x, f(x)) \overset{def}{=} x$

Теорема Нека је $f: X \to Y$. Следећа тврђења су еквивалентна.

(1) f је хомеоморфизам.

(2) f је непр., бијекција и отворено.

(3) f је непр., бијекција и затворено.

(4) f је бијекција и $(\forall A \subseteq X)\ f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

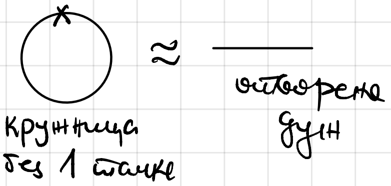
Пример $h: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ дато са $h(x) = \operatorname{tg} x$ је хомео.

Дакле $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \approx \mathbb{R}$ и слично $(a,b) \approx \mathbb{R}$, за свако $a < b$.

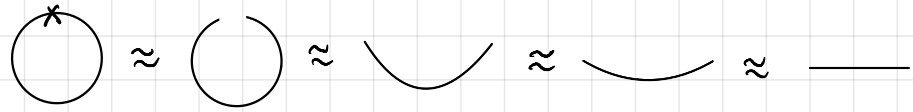
(h замишљамо тако што интервал (a,b) растежемо до бесконачности док не добијемо $\mathbb{R}$)

Пример Илустрација хомеоморфизма: https://youtu.be/VOKgMJEc_ro?si=gA_X7UtmUbBADbHX

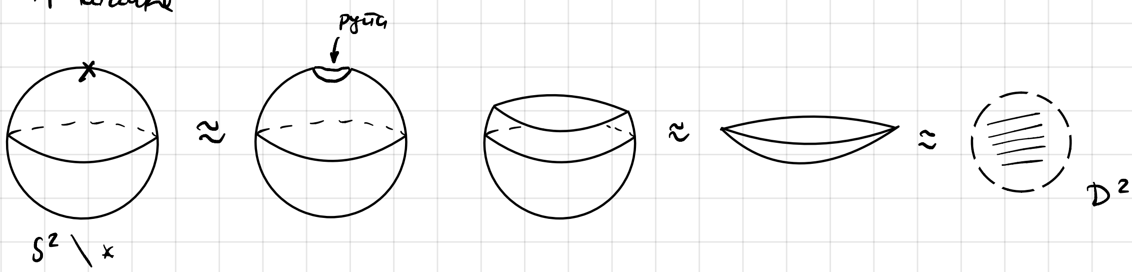
Пример



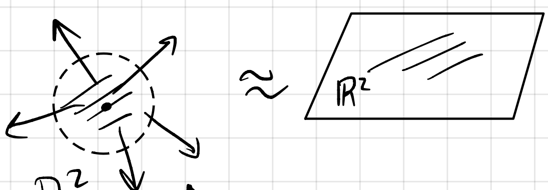
илустрација:



Пример $\underbrace{S^2 \setminus *}_{\text{сфера без 1 тачке}} \approx \operatorname{int} D^2$ ← отворени диск у равни



Пример $\operatorname{int} D^2 \approx \mathbb{R}^2$ Из транзитивности: $S^2 \setminus * \approx \mathbb{R}^2$



„раширимо" диск до бесконачности да покрије $\mathbb{R}^2$

деф. Својства која се чувају при хомеоморфизму називају се тополошким инваријантама.

Неке тополошке инваријанте које ћемо радити су компактност, повезаност, путна повезаност итд. Топ. инваријанте користимо да покажемо да неки простори нису хомео.

Нпр. $[0,1]$ је компактан, $(0,1)$ није, па $[0,1] \not\cong (0,1)$.

Компактност

деф Нека је $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ фамилија подскупова од X. Кажемо да је $\mathcal{U}$ покривач од X ако је $X = \bigcup \mathcal{U}$. Ако је додатно $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}_X$, онда је $\mathcal{U}$ отворен покривач.

Ако су $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ два покривача од X т.д. $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2$, кажемо да је $\mathcal{U}_1$ потпокривач од $\mathcal{U}_2$.

деф Простор X је компактан ако сваки његов отворен покривач има коначан потпокривач. Прецизније, за сваку фамилију $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ отворених скупова важи

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \implies (\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in A) \; X = U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \dots \cup U_{\alpha_n}.$$

деф Нека је $A \subseteq X$. Фамилија $\mathcal{U} \in \mathcal{P}(X)$ је покривач скупа A ако је $A = \bigcup \mathcal{U}$, а ако је додатно $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_X$, онда је $\mathcal{U}$ отворен покривач.

деф. $A \subseteq X$ је компактан у X ако сваки отворен покривач од A има коначан потпокривач.

Став Нека је $A \subseteq X$. A је компактан скуп у X акко је $(A, \mathcal{T}_A)$ компактан као топ. простор.

Став Нека је X компактан и $f: X \to Y$ непрекидно и „на". Тада је и Y компактан.

доказ: Нека је $Y = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$, $V_\alpha \in \mathcal{T}_Y$, $\alpha \in A$.

Тада $X = \bigcup_{\alpha \in A} \underbrace{f^{-1}(V_\alpha)}_{\in \mathcal{T}_X} \xrightarrow{X \text{ комп.}} (\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in A)\ X = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(V_{\alpha_i})$

$\Rightarrow Y = \bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha_i} \Rightarrow Y$ је компактан. $\boxtimes$

Последица Компактност је тополошка инваријанта.

Последица Ако је $f: X \to Y$ непр. и $A \subseteq X$ компактан, онда је и $f(A)$ компактан.

доказ: Применимо став на $f|_A : A \to f(A)$. $\boxtimes$

деф Фамилију свих компактних подскупова од X означавамо са $\mathcal{K}_X$.

Став Ако је X компактан, онда $\mathcal{F}_X \subseteq \mathcal{K}_X$.

(Затворен подскуп компакта је компактан.)

Пример (1) $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ није компактан: $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n)$ - нема коначан потпокривач

(2) X коначан $\Rightarrow X$ је компактан

Заиста, X је коначан, па је и $\mathcal{P}(X)$ коначан, а тим пре и $\mathcal{T}_X$. То значи да је сваки отворен покривач већ коначан, па је сам себи коначан потпокривач, те је X компактан.

Став У $\mathbb{R}^n$ скуп је компактан акко је затворен и ограничен.

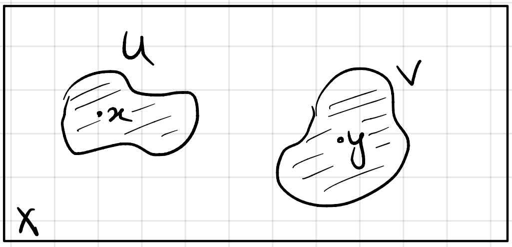
Пример $[0,1]$, $[3,5]\cup[7,8]$ су компактни у $\mathbb{R}$

$(0,1)$, $(0,+\infty)$, $[0,+\infty)$, $[0,1)$ нису компактни у $\mathbb{R}$

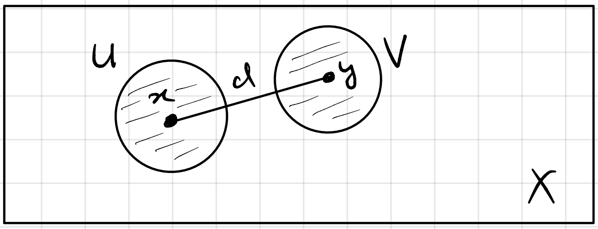
Хаусдорфови простори

деф Кажемо да је X Хаусдорфов простор (или T_2-простор) ако $(\forall x,y\in X)\ x\neq y \Rightarrow (\exists U,V\in\mathcal{T})\ x\in U,\ y\in V,\ U\cap V=\emptyset$.

Дакле, у Хаусдорфовом простору сваке две различите тачке можемо раздвојити отвореним скуповима.



Пример Сваки метрички простор је Хаусдорфов. Заиста, нека је $x\neq y$ и $d=d(x,y)$. Онда узмемо $U=B(x,\frac{d}{3})$, $V=(y,\frac{d}{3})$



Став Својство T_2 је тополошка инваријанта.

<u>доказ</u> Нека је X T_2 и $h: X\to Y$ хомеоморфизам.

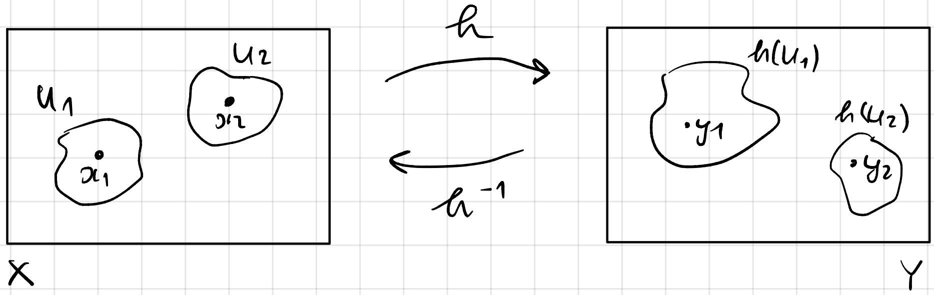
Нека су $y_1,y_2\in Y$, $y_1\neq y_2$ и $x_1=h^{-1}(y_1)$, $x_2=h^{-1}(y_2)$.

X је T_2 па раздвојимо x_1 и x_2 у X:

$(\exists U_1, U_2 \in \mathcal{T}_X)\ x_1 \in U_1,\ x_2 \in U_2,\ U_1 \cap U_2 = \emptyset.$

Тада $h(U_1), h(U_2) \in \mathcal{T}_Y$ и раздвајају y_1 и y_2:

$$y_1 \in h(U_1),\quad y_2 \in h(U_2),\quad h(U_1) \cap h(U_2) = \emptyset.$$



$\blacksquare$

Став Потпростор T_2 простора је T_2.

Став Ако је X T_2, онда $\mathcal{K}_X \subseteq \mathcal{F}_X$

Последица Ако је X компактан и T_2, онда $\mathcal{K}_X = \mathcal{F}_X$.

Став Ако је X компактан, Y T_2, $f: X \to Y$ непр, онда је f затворено.

доказ $F \in \mathcal{F}_X \overset{X \text{ комп.}}{\Longrightarrow} F \in \mathcal{K}_X \Rightarrow f(F) \in \mathcal{K}_Y \overset{Y T_2}{\Longrightarrow} f(F) \in \mathcal{F}_Y.$ $\blacksquare$

Последица Ако је $f: X \to Y$ непрекидна бијекција, X компактан, Y T_2, онда је f хомеоморфизам.

Повезаност

деф. Топ. пр. $(X, \mathcal{T}_X)$ је повезан ако не постоји пар скупова $U, V \in \mathcal{T}_X \setminus \{\emptyset\}$ тј. $U \cap V = \emptyset$ и $U \cup V = X$.

Ако постоје овакви скупови, кажемо да је X неповезан, а пар (U, V) називамо дисконекцијом од X.

Ако је (U, V) дисконекција од X, онда су U и V и отворени и затворени.

Пример (1) $X = [0,1] \cup [3,5]$ је неповезан

(2) $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ је повезан

(3) $(X, \mathcal{T}_d)$ је повезан акко $|X| = 1$.

Став Следећа тврђења су еквивалентна:

(1) X је повезан;

(2) не постоји непр. и „на" $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (\{0,1\}, \mathcal{T}_d)$;

(3) $\mathcal{T} \cap \mathcal{F} = \{\emptyset, X\}$.

доказ $\underline{(1) \Rightarrow (3)}$: ппс. $(\exists U \in (\mathcal{T} \cap \mathcal{F}) \setminus \{\emptyset, X\})$

$\Rightarrow (U, U^c)$ је дисконекција од X $\lightning$

$\underline{(3) \Rightarrow (1)}$: ппс. X није повезан и (U, V) нека дисконекција, тј. $U, V \in \mathcal{T}_X \setminus \{\emptyset\}$, $U \cap V = \emptyset$, $U \cup V = X$.

$\Rightarrow U = V^c \in \mathcal{F}_X \Rightarrow U \in \mathcal{T}_X \cap \mathcal{F}_X$ $\lightning$

$\underline{(1) \Rightarrow (2)}$: ппс. $\exists f : X \to \{0,1\}$ непр. и „на"

$U := f^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{T}_X \setminus \{\emptyset\}$ (јер $\{0\} \in \mathcal{T}_{\{0,1\}}$ и f непр.)

$V := f^{-1}(\{1\}) \in \mathcal{T}_X \setminus \{\emptyset\}$ (јер $\{1\} \in \mathcal{T}_{\{0,1\}}$ и f непр.)

$\Rightarrow (U,V)$ је дисконекција од X $\lightning$

(2) ⇒ (1): ттс. (U,V) дисконекција од X.

дефинишемо $f|_U = 0$, $f|_V = 1$.

f је непр. на основу теореме о лепљењу. $\lightning$ ▨

Пример $\mathbb{Q}$ је неповезан. Једна дисконекција би била:

$$\mathbb{Q} = \left(\mathbb{Q} \cap (-\infty, \sqrt{2})\right) \sqcup \left(\mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, +\infty)\right)$$

Став Ако је X повезан и $f: X \to Y$ непр. и „на", онда је и Y повезан.

доказ: ттс. Y није пов.

$\Rightarrow \exists$ непр. и „на" $g: Y \to \{0,1\}$

$\Rightarrow g \circ f: X \to \{0,1\}$ непр. и „на". $\lightning$ ▨

Последица Повезаност је тополошка инваријанта.

Последица Ако је $f: X \to Y$ непр. и $A \subseteq X$ повезан, онда је и $f(A)$ повезан.

Пример Сви интервали су повезани:

$(0,1)$, $[0,1]$, $[0,1)$, $(-\infty,1]$, $(-\infty,1)$, $[1,+\infty)$, $(1,+\infty)$

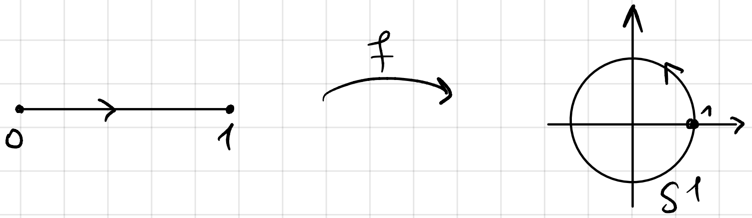
Пример Кружница S^1 је повезана.

Заиста, кружницу можемо видети као слику при пресликавању

$$f: [0,1] \xrightarrow{\text{"на"}} S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$$

датом са

$$f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$



Знамо да је слика повезаног скупа при непр. пресликавању повезана, па је $f([0,1]) = S^1$ повезан.

Став Нека је X топ. пр. $A, B \subseteq X$, $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$. Ако је A повезан, онда је и B повезан.

Последица A повезан $\Rightarrow$ $\overline{A}$ повезан.

Пример A повезан $\not\Rightarrow$ $\operatorname{int} A$ повезан

два затворена диска у равни спојена једном дужи

два дисјунктна отворена диска

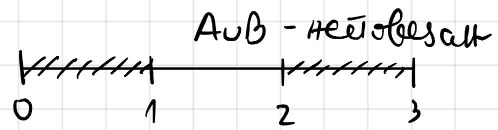
Пример A повезан $\not\Rightarrow$ ∂A повезан

Нпр. $A = [3,7]$, $\partial A = \{3,7\}$

Пример A, B повезани $\not\Rightarrow$ $A \cup B$ повезан

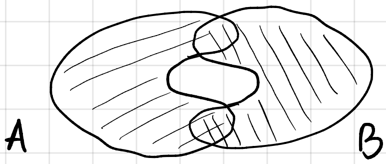
Нпр. $A = (0,1)$, $B = (2,3) \subseteq \mathbb{R}$

A, B - повезани,



Пример A, B повезани $\not\Rightarrow$ $A \cap B$ повезан

Нпр.



$A \cap B =$  неповезан