Ретракти и својство фиксне тачке

деф Нека је X топ. пр. и $A \subseteq X$. Кажемо да је A **ретракт** од X ако постоји непр. $r : X \to A$ т.д. $r|_A = \mathbb{1}_A$, тј.

$$(\forall a \in A) \quad r(a) = a.$$

Пресликавање r називамо **ретракцијом**.

Ако постоји ретракција $r : X \to A$ можемо је видети као део следећег комутативног дијаграма:

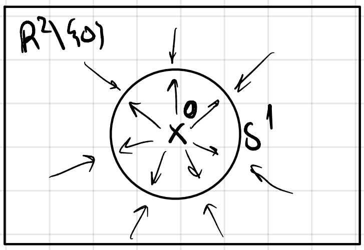
$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "r"] \\ A \arrow[ur, hook, "i"] \arrow[r, "\mathbb{1}_A"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3ex, "\circlearrowright"] & A \end{tikzcd}$$

тј. $r \circ i = \mathbb{1}_A$, где је $i : A \to A$ инклузија.

Пример (1) X т. пр., $x_0 \in X$ произвољно и $A = \{x_0\}$

$\Rightarrow$ A је ретракт од X. Ретракција је константно пресликавање $r = C_{x_0} : X \to \{x_0\}$ $\quad (C_{x_0}(x) := x_0)$

(2) $r : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to S^1$ дато са $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$ јесте ретракција



$\Rightarrow$ S^1 је ретракт од $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

(3) $(0,1)$ није ретракт од $[0,1]$

Зашто, ако $\exists$ с. $r : [0,1] \to (0,1)$ ретракција

$\Rightarrow$ r је непр. и „на"

$[0,1]$ компактан $\Rightarrow$ $\operatorname{im} r = (0,1)$ компактан $\lightning$

(4) $\mathbb{Z}$ није ретракт од $\mathbb{R}$

пп. $r: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ ретракција $\Rightarrow$ r непр. и „на"

$\mathbb{R}$ путно пов. $\Rightarrow$ $\operatorname{im} r = \mathbb{Z}$ путно пов. $\lightning$

деф. Нека је X скуп и $f: X \to X$. Ако за $x_0 \in X$ важи $f(x_0) = x_0$, онда је x_0 фиксна тачка пресликавања f.

деф. Нека је X топ. пр. Кажемо да X има својство фиксне тачке (СФТ) ако свако непр. $f: X \to X$ има фиксну тачку.

Пример (1) $X = *$ има СФТ јер постоји само једно пресл. $f: * \to *$

(2) $\mathbb{R}$ нема СФТ јер $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дато са $f(x) = x+5$ нема ФТ

(3) $\mathbb{R}^n$ нема СФТ јер $t_\alpha: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (транслација за вектор $\alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$) дато са $t_\alpha(x) = x + \alpha$, $x \in \mathbb{R}^n$, нема ФТ

(4) S^1 нема СФТ јер $\rho_\varphi: S^1 \to S^1$ (ротација око O за угао $\varphi \neq 2k\pi$) нема ФТ

Специјално, $a_{S^1} = \rho_\pi$ - антиподално пресл.

$$a_{S^1}(x) = -x, \quad x \in S^1$$

нема ФТ.

(5) S^n нема СФТ јер $a_{S^n}: S^n \to S^n$ дато са

$$a_{S^n}(x) = -x, \quad x \in S^n$$

нема ФТ.

Став СФТ је тополошка инваријанта тј.

X има СФТ и $X \approx Y \Rightarrow Y$ има СФТ.

<u>доказ:</u> Нека X има СФТ, нека је $h: X \to Y$ хомеоморфизам и нека је $f: Y \to Y$ непр. Посматрајмо композицију

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[rrr, bend right, dashed] & Y \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "h^{-1}"] & X \end{tikzcd}$$

$h^{-1} \circ f \circ h : X \to X$ непр. и X има СФТ, па $h^{-1} \circ f \circ h$ има ФТ. Нека је $x_0 \in X$ т.д.

$$(h^{-1} \circ f \circ h)(x_0) = x_0 \quad / \, h$$

$$(\underbrace{h \circ h^{-1}}_{1_Y} \circ f \circ h)(x_0) = h(x_0)$$

$$(f \circ h)(x_0) = h(x_0)$$

$$f(h(x_0)) = h(x_0)$$

$\Rightarrow h(x_0)$ је ФТ од $f \Rightarrow Y$ има СФТ. ∎

Став Ако X има СФТ и $A \subseteq X$ је ретракт од X, онда A има СФТ.

<u>доказ:</u> Нека је $r: X \to A$ ретракција, $i: A \hookrightarrow X$ инклузија и $f: A \to A$ непр. Посматрајмо композицију:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "r"] \arrow[rrr, bend right, dashed] & A \arrow[r, "f"] & A \arrow[r, "i"] & X \end{tikzcd}$$

$i \circ f \circ r : X \to X$ је непр. и X има СФТ, па $i \circ f \circ r$ има ФТ. Нека је $x_0 \in X$ т.д. $(i \circ f \circ r)(x_0) = x_0$, тј.

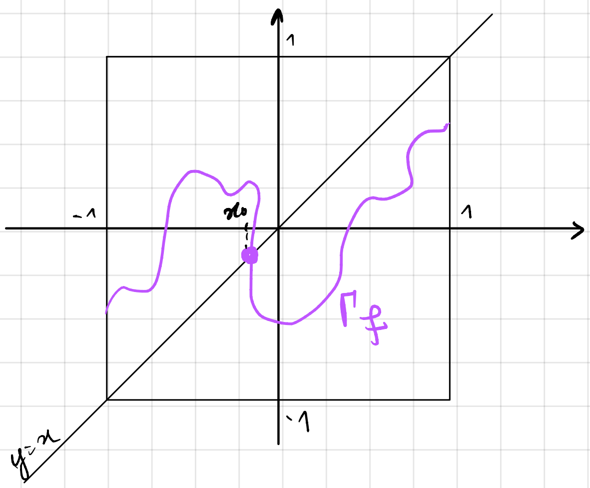
$i(f(\tau(x_0))) = x_0$. Како је $i: A \hookrightarrow X$ дато са $i(a)=a$, закључујемо да је $\operatorname{im} i = A$, то је $x_0 \in A$ (јер $x_0 = i(f(\tau(x_0)))$).

$i(f(\underbrace{\tau(x_0)}_{\substack{\| \\ x_0 \\ (\text{јер } x_0 \in A)}})) = x_0 \Rightarrow f(x_0) = x_0 \Rightarrow f$ има ФТ $\Rightarrow A$ има СФТ $\boxtimes$

Брауерова теорема о фиксној тачки

Теорема [Брауер] За свако $n \in \mathbb{N}$ диск D^n има СФТ.

доказ (скица за $n=1$):



Нека је $f: [-1,1] \to [-1,1]$ непр.

Уочимо график Γ_f функције f и праву $y=x$.

Са слике видимо да се график и праве мора негде сећи

$\Rightarrow (\exists x_0 \in [-1,1])\ f(x_0) = x_0$. $\boxtimes$

Сада наводимо неке еквиваленте Брауерове т.

Теорема Нека је $n \in \mathbb{N}$. Следећа тврђења су еквивалентна:

(1) D^n има СФТ

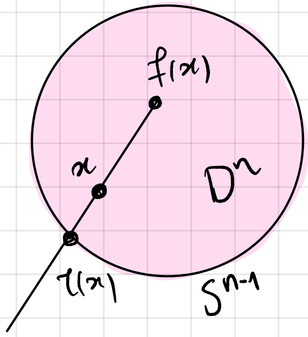
(2) S^{n-1} није ретракт од D^n

(3) S^{n-1} није контрактибилна.

доказ: (1) $\Rightarrow$ (2) пнс. S^{n-1} јесте ретракт. Из (1) D^n има СФТ $\Rightarrow S^{n-1}$ има СФТ $\lightning$

(2) $\Rightarrow$ (1) пнс. да D^n нема СФТ, тј. да постоји

$f: D^n \to D^n$ које нема ФТ, тј. $(\forall x \in D^n)\ f(x) \neq x$.



Дефинишемо $r: D^n \to S^{n-1}$ на следећи начин. Нека је $x \in D^n$. Тада $f(x) \neq x$, па x и $f(x)$ одређују јединствену полуправу из $f(x)$ кроз x. Нека је $r(x)$ тачка у пресеку ове полуправе и границе сфере S^{n-1}. Пресликавање r се може и експлицитно задати и може се показати да је $r: D^n \to S^{n-1}$ ретракција што је ↯ са (2).

(2) $\Leftrightarrow$ (3): Показаћемо еквиваленцију негација од (2) и (3) (што је у реду јер $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \Leftrightarrow \neg q)$)

$\neg(2) \Leftrightarrow S^{n-1}$ је ретракт од D^n

$\Leftrightarrow \exists\, r: D^n \to S^{n-1}$ непр. тј. $r|_{S^{n-1}} = 1_{S^{n-1}}$

$\Leftrightarrow 1_{S^{n-1}}$ се може проширити на D^n

$\Leftrightarrow 1_{S^{n-1}} \simeq const$

$\Leftrightarrow S^{n-1} \simeq *$

$\Leftrightarrow \neg(3)$. ∎

деф. Кажемо да је X просто повезан ако је путно повезан и $\pi_1(X) = 0$.

Пример (1) $X \simeq * \Rightarrow X$ је просто повезан

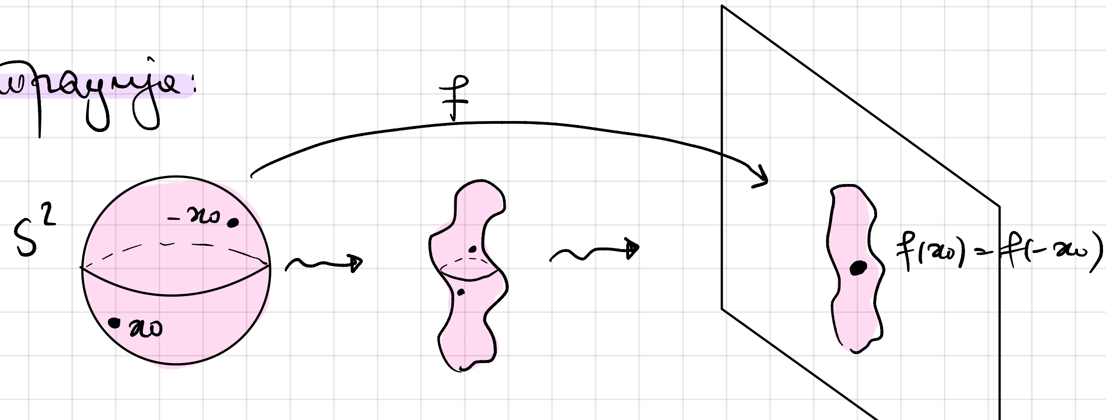
(2) X просто пов. $\not\Rightarrow X \simeq *$

нпр. S^n, $n \geq 2$ је просто повезана, али није контрактибилна.

Борсук-Уламова теорема

Теорема [БУТ] Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $f: S^n \to \mathbb{R}^n$. Тада постоји $x_0 \in S^n$ т.д. $f(x_0) = f(-x_0)$

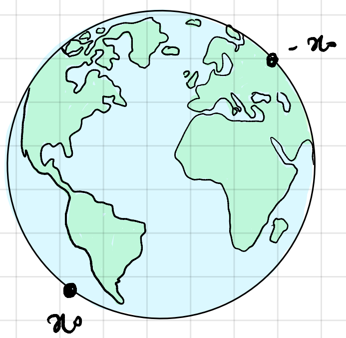
илустрација:



f непр. = „згужвамо S^2 и спљескамо на $\mathbb{R}^2$"

$\Rightarrow$ постоје дијаметрално супротне тачке $x_0, -x_0 \in S^2$ које су се „спљескале" у исту тачку, тј. $f(x_0) = f(-x_0)$

Пример У сваком тренутку на Земљи постоји пар антиподалних тачака са истом температуром и ваздушним притиском.



$\approx S^2$

Нека је $f: S^2 \to \mathbb{R}^2$ дато са

$$f(x) = (t(x), p(x))$$

темп. у x — притисак у x

$$f \text{ је непр. } \xRightarrow{\text{БУТ}} (\exists x_0 \in S^2)\ f(x_0) = f(-x_0), \text{ тј. }$$
$$t(x_0) = t(-x_0) \text{ и } p(x_0) = p(-x_0)$$

деф. Нека су $m, n \in \mathbb{N}_0$. Пресликавање $g: S^m \to S^n$ је **непарно** ако за свако $x \in S^m$ важи $g(-x) = -g(x)$.

У следећој теореми наводимо неколико тврђења еквивалентних БУТ.

Теорема Нека је $n \in \mathbb{N}$. Следећа тврђења су еквивалентна:

(1) $f: S^n \to \mathbb{R}^n$ непр. $\Rightarrow (\exists x_0 \in S^n)\ f(x_0) = f(-x_0)$ (ово је БУТ)

(2) Не постоји непрекидно и непарно пресл. $g: S^n \to S^{n-1}$.

доказ: (1) ⇒ (2): пнс. Нека је $g: S^n \to S^{n-1}$ непр. и непарно и $i: S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ инклузија. Тада је $i \circ g: S^n \to \mathbb{R}^n$ непр

$\overset{(1)}{\Rightarrow} (\exists x_0 \in S^n)\quad i(g(x_0)) = i(g(-x_0))$, тј. $g(x_0) = g(-x_0)$,

али g је непарно па $g(x_0) = g(-x_0) = -g(x_0) \Rightarrow 2g(x_0) = 0$

$\Rightarrow g(x_0) = 0$ ↯ (ово је немогуће јер $g(x_0) \in S^{n-1}$ и $0 \notin S^{n-1}$).

(2) ⇒ (1): Нека је $f: S^n \to \mathbb{R}^n$ непр. и пнс. $(\forall x \in S^n)\ f(x) \neq f(-x)$

Нека је $g: S^n \to S^{n-1}$ дато са:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}$$

g је непр. и $g(-x) = \dfrac{f(-x) - f(x)}{\|f(-x) - f(x)\|} = -g(x)$, тј. g је непарно ↯ (због (2)). ▨