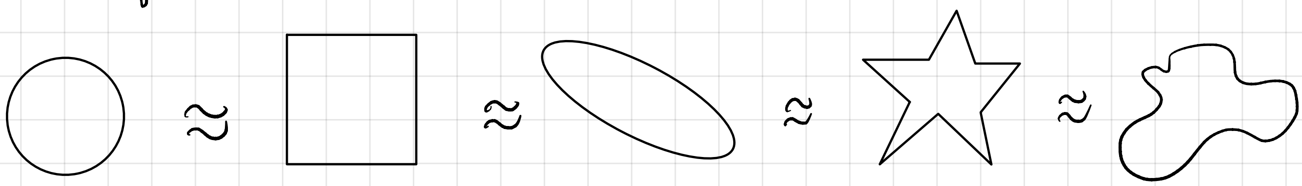
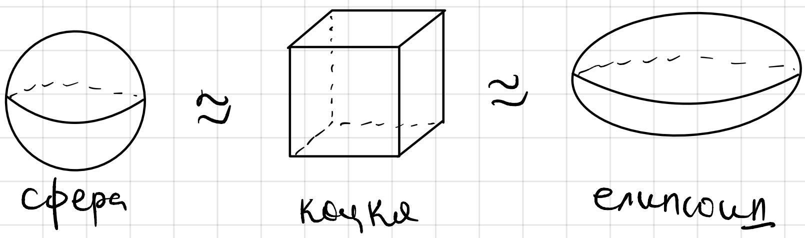
Увод

Главни објекти у топологији које изучавамо су тзв. тополошки простори, које можемо схватити као уопштења метричких простора. Објекте које можемо трансформисати једне у друге непрекидним трансформацијама (без цепања или лепљења делова тих објеката), тзв. хомеоморфизмима, сматраћемо „истим" објектима. Тако су у топологији ово исти објекти:



као и:



али ово нису исти објекти:

Тополошки простор

деф. Нека је $X \neq \emptyset$ скуп и $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ фамилија подскупова т.д.

(T1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,

(T2) $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$,

(T3) $U_\alpha \in \mathcal{T},\ \alpha \in A \Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$.

Тада $\mathcal{T}$ називамо топологијом на X, а пар $(X, \mathcal{T})$ тополошким простором. Елементе фамилије $\mathcal{T}$ називамо отвореним скуповима.

(Ознака $\mathcal{P}(X)$ представља партитивни скуп од X, тј. скуп свих подскупова од X.)

- Често пишемо и само т. пр. X уместо $(X, \mathcal{T})$
- Индукцијом из (T2) се показује да важи и:

$$U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T} \Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_n \in \mathcal{T}.$$

Пример (1) $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_a = \{\emptyset, X\}$ антидискретна топологија

(2) $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$ дискретна топологија

(3) (M, d) метрички простор

$\mathcal{T} = \{U \subseteq M \mid U$ отворен у $(M, d)\}$

топ. индукована метриком

(4) $(\mathbb{R}^n, d)$ d - стандардна метрика

уобичајена (стандардна) топологија

(5) $X = \{a, b\}$, $a \neq b$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$

(6) $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_{cf} = \{U \subseteq X \mid U^c$ коначан$\} \cup \{\emptyset\}$

кофинитна топ. (X коначан $\Rightarrow \mathcal{T}_{cf} = \mathcal{T}_d$)

(7) $X \neq \emptyset$ $\mathcal{T}_{cc} = \{U \subseteq X \mid U^c$ пребројив$\} \cup \{\emptyset\}$

копребројива топ.

деф. Нека су $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ две топологије на $X \neq \emptyset$. Ако је $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ кажемо да је $\mathcal{T}_1$ грубља (ужа), а $\mathcal{T}_2$ финија (шира).
($\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ могу бити и неупоредиве.)

деф. Кажемо да је скуп $F \subseteq X$ затворен у $(X, \mathcal{T})$ ако је $F^c \in \mathcal{T}$. Фамилију свих затворених скупова означавамо са $\mathcal{F}$, тј. $\mathcal{F} = \{F \subseteq X \mid F^c \in \mathcal{T}\}$.

Теорема Нека је $(X, \mathcal{T})$ топ. пр. и $\mathcal{F}$ фамилија затворених скупова. Тада

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{F}$,

(2) $F, G \in \mathcal{F} \Rightarrow F \cup G \in \mathcal{F}$,

(3) $F_\alpha \in \mathcal{F},\ \alpha \in A \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \in \mathcal{F}$.

доказ: (1) Знамо $\emptyset, X \in \mathcal{T}$, па $\emptyset^c, X^c \in \mathcal{F}$, тј. $X, \emptyset \in \mathcal{F}$.

(2) $$F, G \in \mathcal{F} \underset{\text{деф. } \mathcal{F}}{\Leftrightarrow} F^c, G^c \in \mathcal{T} \underset{\substack{\text{деф. топологије} \\ (T2)}}{\Longrightarrow} F^c \cap G^c \in \mathcal{T} \underset{\text{деф. } \mathcal{F}}{\Leftrightarrow} (F^c \cap G^c)^c \in \mathcal{F}$$

Али како је
$$(F^c \cap G^c)^c = (F^c)^c \cup (G^c)^c = F \cup G,$$
закључујемо $F \cup G \in \mathcal{F}$.

(3) $$F_\alpha \in \mathcal{F},\ \alpha \in A \Leftrightarrow F_\alpha^c \in \mathcal{T},\ \alpha \in A \overset{(T3)}{\Longrightarrow} \bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha^c \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \left(\bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha^c\right)^c \in \mathcal{F}$$

Слично као у (2):

$$\left(\bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha^c\right)^c = \bigcap_{\alpha \in A} (F_\alpha^c)^c = \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \in \mathcal{F}. \qquad \blacksquare$$

Пример (1) У дискретној топологији $\mathcal{T}_d$ на било ком скупу X су сви скупови отворени, па су њихови комплементи затворени, тј. $\mathcal{F}_d = \{F \subseteq X \mid F^c \in \mathcal{T}_d\} = \mathcal{P}(X)$.

Дакле у $(X, \mathcal{T}_d)$ су сви скупови и отворени и затворени.

(2) У $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ ($\mathcal{U}$ - уобичајена топологија, тј. наслеђена од метрике)

скупови $\mathbb{R}$, $(0,1)$, $(3,+\infty)$, $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$ су отворени,

скупови $\mathbb{R}$, $[0,1]$, $[3,+\infty)$, $(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$, $\{4\}$ су затворени,

а $[0,1)$, $(3,4)\cup\{5\}$ нису ни отворени ни затворени.

Основни појмови у топ. пр.

Нека је $(X, \mathcal{T})$ топ. пр.

деф. Скуп G је околина тачке $x \in X$ ако

$$(\exists U \in \mathcal{T}) \; x \in U \subseteq G$$

Околински систем $\mathcal{O}(x) \overset{\text{def}}{=} \{G \subseteq X \mid (\exists U \in \mathcal{T}) \; x \in U \subseteq G\}$ је фамилија свих околина тачке x.

Ако $G \in \mathcal{O}(x) \cap \mathcal{T}$, G је отворена околина.

особине:
(1) $(\forall x \in X) \; \mathcal{O}(x) \neq \emptyset$
(2) $G \in \mathcal{O}(x) \Rightarrow x \in G$
(3) $G \in \mathcal{O}(x) \land G \subseteq H \Rightarrow H \in \mathcal{O}(x)$
(4) $G, H \in \mathcal{O}(x) \Rightarrow G \cap H \in \mathcal{O}(x)$

деф. Нека је $A \subseteq X$. Кажемо да је $x \in A$ унутрашња тачка од A ако постоји $V \in \mathcal{T}$ тд. $x \in V \subseteq A$. Унутрашњост (интериор) скупа A је скуп свих његових унутрашњих тачака:

$$\operatorname{int} A = \{x \in A \mid (\exists V \in \mathcal{T}) \; x \in V \subseteq A\}.$$

Став Ако је $A \subseteq X$, онда $\operatorname{int} A = \bigcup_{\substack{V \in \mathcal{T} \\ V \subseteq A}} V$.

доказ: Означимо $D = \bigcup_{\substack{V \in \mathcal{T} \\ V \subseteq A}} V$. Покажимо $\operatorname{int} A = D$.

$\subseteq$: $x \in \operatorname{int} A \Rightarrow (\exists V \in \mathcal{T})\ x \in V \subseteq A \Rightarrow x \in D$

$\supseteq$: $x \in D \Rightarrow (\exists V \in \mathcal{T})\ x \in V \subseteq A \Rightarrow x \in \operatorname{int} A$. ▨

Последица: Ако је $A \subseteq X$, онда:

(а) $\operatorname{int} A \in \mathcal{T}$;

(б) $\operatorname{int} A \subseteq A$;

(в) $B \in \mathcal{T}$ и $B \subseteq A \Rightarrow B \subseteq \operatorname{int} A$;

(г) $A \in \mathcal{T} \Leftrightarrow A = \operatorname{int} A$.

доказ: (а) На основу претходног става, $\operatorname{int} A$ је унија отворених скупова, па је отворен.

(б) Имамо $\operatorname{int} A = \bigcup_{\substack{V \in \mathcal{T} \\ V \subseteq A}} V$, па како је сваки скуп у унији садржан у A, то је и цела унија, тј. $\operatorname{int} A \subseteq A$.

(в) B је управо један од скупова у унији $\bigcup_{\substack{V \in \mathcal{T} \\ V \subseteq A}} V$, па је $B \subseteq \operatorname{int} A$.

(г) $\Rightarrow$: из (б) имамо $\operatorname{int} A \subseteq A$, а из (в) имамо $A \subseteq \operatorname{int} A$, па је $A = \operatorname{int} A$.

$\Leftarrow$: директно из (а). ▨

Претходна последица нам заправо каже да је $\operatorname{int} A$ највећи отворен скуп садржан у A.

Став За $A \subseteq X$ важи: $A \in \mathcal{T} \Leftrightarrow (\forall x \in A)(\exists V \in \mathcal{T})\ x \in V \subseteq A$.

доказ: директно из дела (г) претходне последице. ▨

деф. Нека је $A \subseteq X$. Кажемо да је $x \in X$ адхерентна тачка скупа A ако $(\forall G \in \mathcal{O}(x))\ G \cap A \neq \emptyset$. Затворење (адхеренција) скупа A је скуп свих адх. тачака:

$$\bar{A} = \{x \in X \mid (\forall G \in \mathcal{O}(x))\ G \cap A \neq \emptyset\}$$

(користи се и ознака $\mathrm{cl}\,A$)

Став Ако је $A \subseteq X$, онда $\bar{A} = \bigcap\limits_{\substack{F \in \mathcal{F} \\ A \subseteq F}} F$.

Последица Ако је $A \subseteq X$, онда

(а) $\bar{A} \in \mathcal{F}$;

(б) $A \subseteq \bar{A}$;

(в) $B \in \mathcal{F}$ и $A \subseteq B$, онда $\bar{A} \subseteq B$;

(г) $A \in \mathcal{F} \iff A = \bar{A}$.

доказ: (а) $\bar{A}$ је пресек затворених скупова, па је затворен.

(б) Сваки од скупова F из пресека $\bigcap\limits_{\substack{F \in \mathcal{F} \\ A \subseteq F}} F$ садржи A, па и цео пресек садржи A, тј. $A \subseteq \bar{A}$.

(в) B је један од скупова у пресеку $\bigcap\limits_{\substack{F \in \mathcal{F} \\ A \subseteq F}} F$, па он садржи цео пресек, тј. $\bar{A} \subseteq B$.

(г) $\Rightarrow$: из (б) је $A \subseteq \bar{A}$, а из (в) је $\bar{A} \subseteq A$.

$\Leftarrow$: из (а). $\boxtimes$

деф. Граница (руб) скупа $A \subseteq X$ је $\partial A \overset{\text{def}}{=} \bar{A} \setminus \mathrm{int}A$.

Пример $X=\mathbb{R}$, $A=[3,5)$, $B=(-\infty,2)\cup(2,4]$, стандардна топ. на $\mathbb{R}$

$$\operatorname{int} A=(3,5),\quad \overline{A}=[3,5],\quad \partial A=\{3,5\}$$

$$\operatorname{int} B=(-\infty,2)\cup(2,4),\quad \overline{B}=(-\infty,4],\quad \partial B=\{2,4\}$$

Пример $X=\mathbb{R}$, $A=\mathbb{Q}$, стандардна топ. на $\mathbb{R}$

$$\operatorname{int} A=\emptyset,\quad \overline{A}=\mathbb{R},\quad \partial A=\mathbb{R}$$

Пример $X=\mathbb{R}$, $A=[3,5)$, коефинитна топ. на $\mathbb{R}$, тј.

$$\mathcal{T}_{cf}=\{U\subseteq\mathbb{R}\mid \mathbb{R}\setminus U \text{ коначан}\}\cup\{\emptyset\}$$

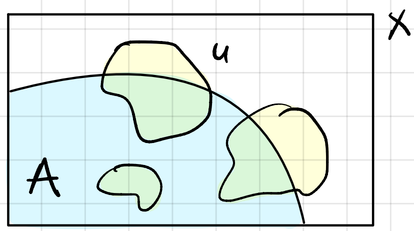
$$\operatorname{int} A=\emptyset,\quad \overline{A}=\mathbb{R},\quad \partial A=\mathbb{R}$$

Коментар Из претходних примера видимо да $\operatorname{int}A$, $\operatorname{cl}A$, ∂A зависе од топологије.

Тополошки потпростор

Нека је $(X,\mathcal{T})$ т. пр. и $A\subseteq X$. Дефинишемо

$$\mathcal{T}_A:=\{U\cap A\mid U\in\mathcal{T}\}$$



Став $(A,\mathcal{T}_A)$ је тополошки простор.

<u>доказ</u>: Показујемо да $\mathcal{T}_A$ задовољава T1, T2 и T3 из деф. топологије.

(T1) $\emptyset, X\in\mathcal{T} \Rightarrow \emptyset\cap A,\ X\cap A\in\mathcal{T}_A \Rightarrow \emptyset, A\in\mathcal{T}_A$

(T2) $U_1,U_2\in\mathcal{T}_A \Rightarrow U_1=V_1\cap A,\ U_2=V_2\cap A$ за неке $V_1,V_2\in\mathcal{T}$.

$$U_1\cap U_2=(V_1\cap A)\cap(V_2\cap A)=\underbrace{(V_1\cap V_2)}_{\in\mathcal{T}}\cap A\in\mathcal{T}_A$$

(T3) $U_\alpha \in \mathcal{T}_A,\ \alpha \in \mathcal{A} \Rightarrow U_\alpha = V_\alpha \cap A,\ \alpha \in \mathcal{A}$, за неке $V_\alpha \in \mathcal{T}$.

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} (V_\alpha \cap A) = \underbrace{\Big(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha\Big)}_{\in \mathcal{T}} \cap A \in \mathcal{T}_A.$$

$\Rightarrow \mathcal{T}_A$ јесте једна топологија на A. $\boxtimes$

деф Топологију $\mathcal{T}_A$ називамо релативном топ. или топологијом наслеђеном од простора X и кажемо да је $(A, \mathcal{T}_A)$ потпростор од $(X, \mathcal{T})$.

Како изгледају затворени скупови у A:

$$F \in \mathcal{F}_A \Leftrightarrow (\exists U \in \mathcal{T})\ F = A \setminus U$$

$$\Leftrightarrow (\exists U \in \mathcal{T})\ F = A \setminus (U \cap A) = A \cap (U \cap A)^c = A \cap (U^c \cup A^c)$$

$$= (A \cap U^c) \cup (A \cap A^c) = A \cap U^c$$

$$\Leftrightarrow (\exists V \in \mathcal{F})\ F = A \cap V$$

Дакле, $\mathcal{F}_A = \{ F \cap A \mid F \in \mathcal{F} \}$

Пример Посматрамо $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ и потпростор $[0,5) \subset \mathbb{R}$.

Скуп $[0,1)$ није отворен у $\mathbb{R}$, али јесте отворен у $[0,5)$ јер $[0,1) = \underbrace{(-1,1)}_{\in \mathcal{U}} \cap [0,5) \in \mathcal{T}_{[0,5]}$.

Слично, $[3,5)$ није затворен у $\mathbb{R}$, али јесте у $[0,5)$ јер

$$[3,5) = \underbrace{[3,7]}_{\in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}} \cap [0,5) \in \mathcal{T}_{[3,5)}.$$

Став: (1) $A \in \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{T}_A \subseteq \mathcal{T}_X$

(2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F}_A \subseteq \mathcal{F}_X$

доказ: (1) Нека је $A \in \mathcal{T}$ и $U \in \mathcal{T}_A$, тј. $U = V \cap A$, $V \in \mathcal{T}$.

Тада $U = \underbrace{V \cap A}_{\in \mathcal{T}} \in \mathcal{T}_X$ по особини (T2) за $\mathcal{T}_X$, па $\mathcal{T}_A \subseteq \mathcal{T}_X$.

(2) Нека је $A \in \mathcal{F}$ и $F \in \mathcal{F}_A$, тј. $F = G \cap A$, $G \in \mathcal{F}_X$.

Тада $F = \underbrace{G \cap A}_{\in \mathcal{F}_X} \in \mathcal{F}_X$ на основу теореме на стр. 3. $\boxtimes$

Непрекидност

деф. Нека су $(X, \mathcal{T}_X)$ и $(Y, \mathcal{T}_Y)$ топ. пр. Пресликавање $f : X \to Y$ је **непрекидно** ако $(\forall V \in \mathcal{T}_Y)\ f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$.

Подсетник: $f^{-1}(V)$ је инверзна слика скупа V, тј. све тачке из X које се са f сликају у неки ел. из V:

$$f^{-1}(V) = \{ x \in X \mid f(x) \in V \} \subseteq X.$$

Пример (1) $f : X \to Y$, $f = \text{const} \Rightarrow f$ је непр. (произвољне топ. на X и Y)

Зашто, $(\forall V \in \mathcal{T}_Y)\ f^{-1}(V) = X \in \mathcal{T}_X$

(2) $f : X \to (Y, \mathcal{T}_a)$ је непр. ($\mathcal{T}_a = \{\emptyset, Y\}$ антидискретна топ.)

$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T}_X$, $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{T}_X$

(3) $f : (X, \mathcal{T}_d) \to Y$ је непр ($\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$ дискретна топ.)

(4) $f(x) = \mathbb{1}_X(x) = x$, $f : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$

f је непр. $\Leftrightarrow \mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$

(Користимо ознаку $\mathbb{1}$ за идентичко пресликавање)

Теорема $f: X \to Y$ је непрекидно акко

$$(\forall F \in \mathcal{F}_Y)\ f^{-1}(F) \in \mathcal{F}_X. \quad (\star)$$

доказ: $\Rightarrow$: Нека је f непр. и $F \in \mathcal{F}_Y$,

$$F^c \in \mathcal{T}_Y \overset{f \text{ непр.}}{\Longrightarrow} \underbrace{f^{-1}(F^c)}_{= (f^{-1}(F))^c} \in \mathcal{T}_X \Rightarrow f^{-1}(F) \in \mathcal{F}_X$$

$\Leftarrow$: Нека важи $(\star)$ и нека је $V \in \mathcal{T}_Y$.

$$V \in \mathcal{T}_Y \Rightarrow V^c \in \mathcal{F}_Y \overset{(\star)}{\Longrightarrow} \underbrace{f^{-1}(V^c)}_{= (f^{-1}(V))^c} \in \mathcal{F}_X \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$$

$\Rightarrow f$ је непр. $\blacksquare$

деф. Пресликавање $f: (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ је непр. у тачки $x_0 \in X$ ако

$$(\forall V \in \mathcal{O}(f(x_0)))\ f^{-1}(V) \in \mathcal{O}(x_0).$$

Став $f: X \to Y$ је непр. акко је непр. у свакој тачки $x \in X$.

Став Композиција непр. пресликавања је непр.

доказ Нека су $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$ непр. Показујемо да је и $g \circ f: X \to Z$ непр. Нека је $W \in \mathcal{T}_Z$

$$(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(W)}_{\in \mathcal{T}_Y \text{ јер је } g \text{ непр.}}) \in \mathcal{T}_X \text{ јер је } f \text{ непр.}$$

$\Rightarrow g \circ f$ је непр. $\blacksquare$

Став Ако је $f: X \to Y$ непр. и $A \subseteq X$, онда је $f|_A : A \to Y$ непр.

Теорема [о лепљењу] Нека је $X = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, $n \in \mathbb{N}$ и $A_1, A_2, \dots, A_n$ отворени (или су сви затворени). Ако је $f: X \to Y$ т.д. је $f|_{A_i}: A_i \to Y$ непр. за свако $i = \overline{1,n}$, онда је и f непр.

Пример $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$A_1 = (-\infty, 0]$, $A_2 = [0, +\infty)$

$f|_{A_1}$, $f|_{A_2}$ су непр. и $A_1, A_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow f$ је непр.

деф. Нека је $f: X \to Y$.

(1) f је **отворено** ако $(\forall U \in \mathcal{T}_X)\ f(U) \in \mathcal{T}_Y$.

(2) f је **затворено** ако $(\forall V \in \mathcal{F}_X)\ f(V) \in \mathcal{F}_Y$.

Коментар: $f(U)$ је директна слика од U, тј.

$$f(U) = \{ f(x) \mid x \in U \} \subseteq Y$$

Пример (1) $\mathbb{1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ је и отворено и затворено

(2) $\mathbb{1}: (\mathbb{R}, \mathcal{U}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_a)$ није ни отворено ни затворено.

$$\mathbb{1}(\underbrace{(0,1)}_{\in \mathcal{U}}) = (0,1) \notin \mathcal{T}_a = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{1}(\underbrace{[0,1]}_{\in \mathcal{F}}) = [0,1] \notin \mathcal{F}_a = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$