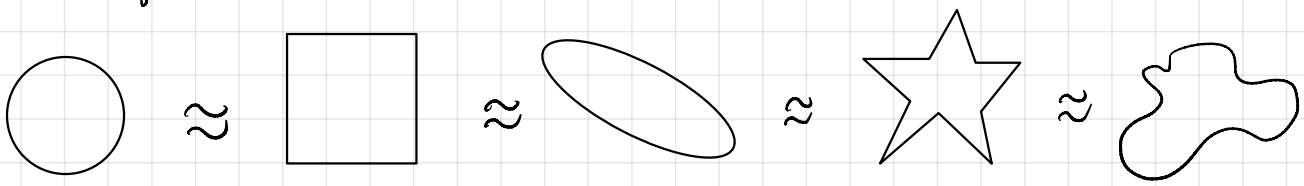
# очигледна топологија

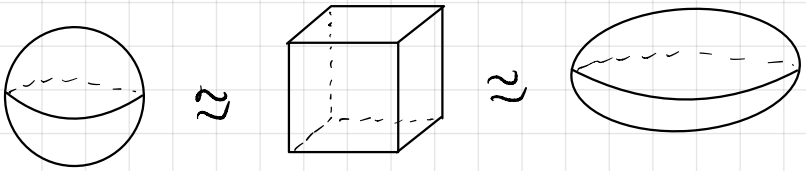
ОЧИГЛЕДНА ТОПОЛОГИЈА

# Увод

Главни објекти у топологији које изучавамо су тзв. тополошки простори, које можемо сагледати као уопштења метричких простора. Објекте које можемо трансформисати једне у друге непрекидним трансформацијама (без цепања или лепљења делова тих објеката), тзв. хомеоморфизмима, сматраћемо „истим" објектима. Тако су у топологији ова четири објекта:



као и:



сфера  коцка  елипсоид

али ова наредна четири објекта:



# Тополошки простор

**деф.** Нека је $X \neq \emptyset$ скуп и $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ фамилија подскупова т.д.

(T1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,

(T2) $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$,

(T3) $U_\alpha \in \mathcal{T}, \alpha \in A \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$.

Тада $\mathcal{T}$ називамо **топологијом** на $X$, а пар $(X, \mathcal{T})$ **тополошким простором**. Елементе фамилије $\mathcal{T}$ називамо **отвореним скуповима**.

(Ознака $\mathcal{P}(X)$ представља партитивни скуп од $X$, тј. скуп свих подскупова од $X$.)

- Често пишемо и само т. пр. $X$ уместо $(X, \mathcal{T})$
- Индукцијом из (T2) се показује да важи и:

$$U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T} \Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_n \in \mathcal{T}.$$

**Пример** (1) $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_a = \{\emptyset, X\}$ антидискретна топологија

(2) $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$ дискретна топологија

(3) $(M, d)$ метрички простор

$\mathcal{T} = \{U \subseteq M \mid U$ отворен у $(M, d)\}$

тзв. индукована метриком

(4) $(\mathbb{R}^n, d)$ $d$ - стандардна метрика

уобичајена (стандардна) топологија

(5) $X = \{a, b\}$, $a \neq b$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$

(6) $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_{cf} = \{U \subseteq X \mid U^c$ коначан$\} \cup \{\emptyset\}$

коконечна топ. ($X$ коначан $\Rightarrow \mathcal{T}_{cf} = \mathcal{T}_d$)

(7) $X \neq \emptyset$ $\mathcal{T}_{cc} = \{U \subseteq X \mid U^c$ пребројив$\} \cup \{\emptyset\}$

копребројива топ.

**деф.** Нека су $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ две топологије на $X \neq \emptyset$. Ако је $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ кажемо да је $\mathcal{T}_1$ грубља (ужа), а $\mathcal{T}_2$ финија (шира).
($\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ могу бити и неупоредиве.)

**деф.** Кажемо да је скуп $F \subseteq X$ затворен у $(X, \mathcal{T})$ ако је $F^c \in \mathcal{T}$. Фамилију свих затворених скупова означавамо са $\mathcal{F}$, тј. $\mathcal{F} = \{F \subseteq X \mid F^c \in \mathcal{T}\}$.

**Теорема** Нека је $(X, \mathcal{T})$ топ. пр. и $\mathcal{F}$ фамилија затворених скупова. Тада

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{F}$,

(2) $F, G \in \mathcal{F} \Rightarrow F \cup G \in \mathcal{F}$,

(3) $F_\alpha \in \mathcal{F},\ \alpha \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha \in \mathcal{F}$.

доказ: (1) Знамо $\emptyset, X \in \mathcal{T}$, па $\emptyset^c, X^c \in \mathcal{F}$, тј. $X, \emptyset \in \mathcal{F}$.

(2) $F, G \in \mathcal{F} \overset{\text{деф. } \mathcal{F}}{\Leftrightarrow} F^c, G^c \in \mathcal{T} \overset{\text{деф. топологије (T2)}}{\Rightarrow} F^c \cap G^c \in \mathcal{T} \overset{\text{деф. } \mathcal{F}}{\Leftrightarrow} (F^c \cap G^c)^c \in \mathcal{F}$

Али како је

$$(F^c \cap G^c)^c = (F^c)^c \cup (G^c)^c = F \cup G,$$

закључујемо $F \cup G \in \mathcal{F}$.

(3) $F_\alpha \in \mathcal{F},\ \alpha \in \mathcal{A} \Leftrightarrow F_\alpha^c \in \mathcal{T},\ \alpha \in \mathcal{A} \overset{(T3)}{\Rightarrow} \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha^c \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha^c\right)^c \in \mathcal{F}$

Слично као у (2):

$$\left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha^c\right)^c = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} \left(F_\alpha^c\right)^c = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha \in \mathcal{F}. \quad \square$$

Пример (1) у дискретној топологији $\mathcal{T}_d$ на било ком скупу $X$ су сви скупови отворени, па су њихови комплементи затворени, тј. $\mathcal{F}_d = \{F \subseteq X \mid F^c \in \mathcal{T}_d\} = \mathcal{P}(X)$.

Дакле у $(X, \mathcal{T}_d)$ су сви скупови и отворени и затворени.

(2) у $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ ($\mathcal{U}$ - уобичајена топологија, тј. наслеђена од метрике)

скупови $\mathbb{R}$, $(0,1)$, $(3,+\infty)$, $(-\infty,1) \cup (2,+\infty)$ су отворени,

скупови $\mathbb{R}$, $[0,1]$, $[3,+\infty)$, $(-\infty,1] \cup [2,+\infty)$, $\{4\}$ су затворени,

а $[0,1)$, $(3,4) \cup \{5\}$ нису ни отворени ни затворени.

## Основни појмови у топ. пр.

Нека је $(X, \mathcal{T})$ топ. пр.

деф. Скуп $G$ је околина тачке $x \in X$ ако

$$(\exists U \in \mathcal{T}) \quad x \in U \subseteq G$$

Околински систем $\mathcal{O}(x) \overset{\text{def}}{=} \{G \subseteq X \mid (\exists U \in \mathcal{T}) \; x \in U \subseteq G\}$ је фамилија свих околина тачке $x$.

Ако $G \in \mathcal{O}(x) \cap \mathcal{T}$, $G$ је отворена околина.

особине: (1) $(\forall x \in X) \; \mathcal{O}(x) \neq \emptyset$

(2) $G \in \mathcal{O}(x) \Rightarrow x \in G$

(3) $G \in \mathcal{O}(x) \wedge G \subseteq H \Rightarrow H \in \mathcal{O}(x)$

(4) $G, H \in \mathcal{O}(x) \Rightarrow G \cap H \in \mathcal{O}(x)$

деф. Нека је $A \subseteq X$. Кажемо да је $x \in A$ унутрашња тачка од $A$ ако постоји $V \in \mathcal{T}$ тј. $x \in V \subseteq A$. Унутрашњост (интериор) скупа $A$ је скуп свих његових унутрашњих тачака:

$$\operatorname{int} A = \{x \in A \mid (\exists V \in \mathcal{T}) \; x \in V \subseteq A\}.$$

**Став** Ако је $A \subseteq X$, онда $\operatorname{int} A = \bigcup_{\substack{V \in \mathcal{T} \\ V \subseteq A}} V$.

*доказ:* Означимо $D = \bigcup_{\substack{V \in \mathcal{T} \\ V \subseteq A}} V$. Показујемо $\operatorname{int} A = D$.

$\subseteq$: $x \in \operatorname{int} A \Rightarrow (\exists V \in \mathcal{T})\ x \in V \subseteq A \Rightarrow x \in D$

$\supseteq$: $x \in D \Rightarrow (\exists V \in \mathcal{T})\ x \in V \subseteq A \Rightarrow x \in \operatorname{int} A$. ▨

**Последица:** Ако је $A \subseteq X$, онда:

(а) $\operatorname{int} A \in \mathcal{T}$;

(б) $\operatorname{int} A \subseteq A$;

(в) $B \in \mathcal{T}$ и $B \subseteq A \Rightarrow B \subseteq \operatorname{int} A$;

(г) $A \in \mathcal{T} \Leftrightarrow A = \operatorname{int} A$.

*доказ:* (а) На основу претходног става, $\operatorname{int} A$ је унија отворених скупова, па је отворен.

(б) Имамо $\operatorname{int} A = \bigcup_{\substack{V \in \mathcal{T} \\ V \subseteq A}} V$, па како је сваки скуп у унији садржан у $A$, исто је и цела унија, тј. $\operatorname{int} A \subseteq A$.

(в) $B$ је управо један од скупова у унији $\bigcup_{\substack{V \in \mathcal{T} \\ V \subseteq A}} V$, па је $B \subseteq \operatorname{int} A$.

(г) $\Rightarrow$: из (б) имамо $\operatorname{int} A \subseteq A$, а из (в) имамо $A \subseteq \operatorname{int} A$, одакле је $A = \operatorname{int} A$.

$\Leftarrow$: директно из (а). ▨

Претходна последица нам заправо каже да је $\operatorname{int} A$ највећи отворен скуп садржан у $A$.

**Став** За $A \subseteq X$ важи: $A \in \mathcal{T} \Leftrightarrow (\forall x \in A)(\exists V \in \mathcal{T})\ x \in V \subseteq A$.

*доказ:* директно из дела (г) претходне последице. ▨

**деф.** Нека је $A \subseteq X$. Кажемо да је $x \in X$ **адхерентна тачка** скупа $A$ ако $(\forall G \in \mathcal{O}(x))\ G \cap A \neq \emptyset$. **Затворење** (адхеренција) скупа $A$ је скуп свих адх. тачака:

$$\overline{A} = \{ x \in X \mid (\forall G \in \mathcal{O}(x))\ G \cap A \neq \emptyset \}$$

(користи се и ознака $\mathrm{cl}\, A$)

**Став** Ако је $A \subseteq X$, онда $\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \in \mathcal{F} \\ A \subseteq F}} F$.

**Последица** Ако је $A \subseteq X$, онда

(а) $\overline{A} \in \mathcal{F}$;

(б) $A \subseteq \overline{A}$;

(в) $B \in \mathcal{F}$ и $A \subseteq B$, онда $\overline{A} \subseteq B$;

(т) $A \in \mathcal{F} \iff A = \overline{A}$.

доказ: (а) $\overline{A}$ је пресек затворених скупова, па је затворен.

(б) Сваки од скупова $F$ из пресека $\bigcap_{\substack{F \in \mathcal{F} \\ A \subseteq F}} F$ садржи $A$, па и цео пресек садржи $A$, тј. $A \subseteq \overline{A}$.

(в) $B$ је један од скупова у пресеку $\bigcap_{\substack{F \in \mathcal{F} \\ A \subseteq F}} F$, па он садржи цео пресек, тј. $\overline{A} \subseteq B$.

(т) $\Rightarrow$: из (б) је $A \subseteq \overline{A}$, а из (в) је $\overline{A} \subseteq A$.

$\Leftarrow$: из (а). ☐

**деф.** **Граница** (руб) скупа $A \subseteq X$ је $\partial A \overset{\text{def}}{=} \overline{A} \setminus \mathrm{int} A$.

**Пример** $X = \mathbb{R}$, $A = [3,5)$, $B = (-\infty, 2) \cup (2,4]$, стандардне топ. на $\mathbb{R}$

$\operatorname{int} A = (3,5)$, $\overline{A} = [3,5]$, $\partial A = \{3,5\}$

$\operatorname{int} B = (-\infty,2) \cup (2,4)$, $\overline{B} = (-\infty,4]$, $\partial B = \{2,4\}$

**Пример** $X = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$, стандардна топ. на $\mathbb{R}$

$\operatorname{int} A = \emptyset$, $\overline{A} = \mathbb{R}$, $\partial A = \mathbb{R}$

**Пример** $X = \mathbb{R}$, $A = [3,5)$, кофинитна топ. на $\mathbb{R}$, тј.

$$\mathcal{T}_{cf} = \{U \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus U \text{ коначан}\} \cup \{\emptyset\}$$

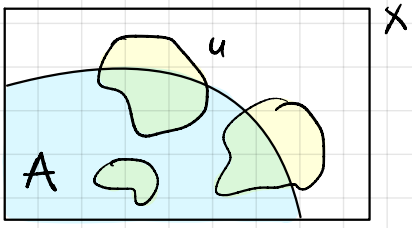
$\operatorname{int} A = \emptyset$, $\overline{A} = \mathbb{R}$, $\partial A = \mathbb{R}$

**Коментар** Из претходних примера видимо да $\operatorname{int} A$, $cl A$, $\partial A$ зависе од топологије.

## Потпросторна топологија

Нека је $(X, \mathcal{T})$ т. пр. и $A \subseteq X$. Дефинишемо

$$\mathcal{T}_A := \{U \cap A \mid U \in \mathcal{T}\}$$




**Став** $(A, \mathcal{T}_A)$ је тополошки простор.

*доказ*: Показујемо да $\mathcal{T}_A$ задовољава T1, T2 и T3 из деф. топологије.

(T1) $\emptyset, X \in \mathcal{T} \Rightarrow \emptyset \cap A,\ X \cap A \in \mathcal{T}_A \Rightarrow \emptyset, A \in \mathcal{T}_A$

(T2) $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_A \Rightarrow U_1 = V_1 \cap A$, $U_2 = V_2 \cap A$ за неке $V_1, V_2 \in \mathcal{T}$.

$$U_1 \cap U_2 = (V_1 \cap A) \cap (V_2 \cap A) = \underbrace{(V_1 \cap V_2)}_{\in \mathcal{T}} \cap A \in \mathcal{T}_A$$

(T3) $U_\alpha \in \mathcal{T}_A$, $\alpha \in \Lambda \Rightarrow U_\alpha = V_\alpha \cap A$, $\alpha \in \Lambda$, za neke $V_\alpha \in \mathcal{T}$.

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} (V_\alpha \cap A) = \underbrace{\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha\right)}_{\in \mathcal{T}} \cap A \in \mathcal{T}_A.$$

$\Rightarrow \mathcal{T}_A$ jeste jedna topologija na $A$. ☒

def Topologiju $\mathcal{T}_A$ nazivamo relativnom ili topologijom nasleđenom od prostora $X$ i kažemo da je $(A, \mathcal{T}_A)$ potprostor od $(X, \mathcal{T})$.

Kako izgledaju zatvoreni skupovi u $A$:

$F \in \mathcal{F}_A \iff (\exists U \in \mathcal{T})\ F = A \setminus U$

$\iff (\exists U \in \mathcal{T})\ F = A \setminus (U \cap A) = A \cap (U \cap A)^c = A \cap (U^c \cup A^c)$

$= (A \cap U^c) \cup (A \cap A^c) = A \cap U^c$

$\iff (\exists V \in \mathcal{F})\ F = A \cap V$

Dakle, $\mathcal{F}_A = \{ F \cap A \mid F \in \mathcal{F} \}$

Primer Posmatrajmo $(\mathbb{R}, U)$ i potprostor $[0,5) \subset \mathbb{R}$.

Skup $[0,1)$ nije otvoren u $\mathbb{R}$, ali jeste otvoren u $[0,5)$ jer $[0,1) = \underbrace{(-1,1)}_{\in U} \cap [0,5) \in \mathcal{T}_{[0,5]}$.

Slično, $[3,5)$ nije zatvoren u $\mathbb{R}$, ali jeste u $[0,5)$ jer

$[3,5) = \underbrace{[3,7]}_{\in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}} \cap [0,5) \in \mathcal{T}_{[3,5)}$.

**Став**: (1) $A \in \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{T}_A \subseteq \mathcal{T}_X$

(2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F}_A \subseteq \mathcal{F}_X$

**доказ**: (1) Нека је $A \in \mathcal{T}$ и $U \in \mathcal{T}_A$, тј. $U = V \cap A$, $V \in \mathcal{T}$.

Тада $U = \underbrace{V}_{\in \mathcal{T}} \cap A \in \mathcal{T}_X$ по особини (T2) за $\mathcal{T}_X$, па $\mathcal{T}_A \subseteq \mathcal{T}_X$.

(2) Нека је $A \in \mathcal{F}$ и $F \in \mathcal{F}_A$, тј. $F = G \cap A$, $G \in \mathcal{F}_X$.

Тада $F = \underbrace{G}_{\in \mathcal{F}_X} \cap A \in \mathcal{F}_X$ на основу теореме на стр. 3. ☐

## Непрекидност

**деф.** Нека су $(X, \mathcal{T}_X)$ и $(Y, \mathcal{T}_Y)$ топ. пр. Пресликавање $f: X \to Y$ је **непрекидно** ако $(\forall V \in \mathcal{T}_Y)\ f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$.

**Подсетник**: $f^{-1}(V)$ је инверзна слика скупа $V$, тј. све тачке из $X$ које се са $f$ сликају у неки el. из $V$:

$$f^{-1}(V) = \{ x \in X \mid f(x) \in V \} \subseteq X.$$

**Пример** (1) $f: X \to Y$, $f = const \Rightarrow f$ је непр. (произвољне топ. на $X$ и $Y$)

Заиста, $(\forall V \in \mathcal{T}_Y)\ f^{-1}(V) = X \in \mathcal{T}_X$

(2) $f: X \to (Y, \mathcal{T}_a)$ је непр. ($\mathcal{T}_a = \{\phi, Y\}$ антидискретна топ.)

$f^{-1}(\phi) = \phi \in \mathcal{T}_X$, $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{T}_X$

(3) $f: (X, \mathcal{T}_d) \to Y$ је непр ($\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$ дискретна топ.)

(4) $f(x) = 1\!\!1_X(x) = x$, $f: (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$

$f$ је непр. $\iff \mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$

(Користимо ознаку $1\!\!1$ за **идентичко пресликавање**)

**Теорема** $f: X \to Y$ је непрекидно акко

$$(\forall F \in \mathcal{F}_Y)\ f^{-1}(F) \in \mathcal{F}_X. \quad (\star)$$

*доказ*: $\Rightarrow$: Нека је $f$ непр. и $F \in \mathcal{F}_Y$,

$$F^c \in \mathcal{T}_Y \overset{f \text{ непр.}}{\Longrightarrow} \underbrace{f^{-1}(F^c)}_{(f^{-1}(F))^c} \in \mathcal{T}_X \Rightarrow f^{-1}(F) \in \mathcal{F}_X$$

$\Leftarrow$: Нека важи $(\star)$ и нека је $V \in \mathcal{T}_Y$.

$$V \in \mathcal{T}_Y \Rightarrow V^c \in \mathcal{F}_Y \overset{(\star)}{\Longrightarrow} \underbrace{f^{-1}(V^c)}_{(f^{-1}(V))^c} \in \mathcal{F}_X \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$$

$\Rightarrow f$ је непр. ▨

**деф.** Пресликавање $f: (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ је непр. у тачки $x_0 \in X$ ако

$$(\forall V \in \mathcal{O}(f(x_0)))\ f^{-1}(V) \in \mathcal{O}(x_0).$$

**Став** $f: X \to Y$ је непр. акко је непр. у свакој тачки $x \in X$.

**Став** Композиција непр. пресликавања је непр.

*доказ* Нека су $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$ непр. Показујемо да је и $g \circ f: X \to Z$ непр. Нека је $W \in \mathcal{T}_Z$

$$(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}\Big(\underbrace{g^{-1}(W)}_{\in \mathcal{T}_Y \text{ јер је } g \text{ непр.}}\Big) \in \mathcal{T}_X \text{ јер је } f \text{ непр.}$$

$\Rightarrow g \circ f$ је непр. ▨

Став Ако је $f: X \to Y$ непр. и $A \subseteq X$, онда је $f|_A: A \to Y$ непр.

**Теорема** [о лепљењу] Нека је $X = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, $n \in \mathbb{N}$ и $A_1, A_2, \dots, A_n$ отворени (или су сви затворени). Ако је $f: X \to Y$ тј. је $f|_{A_i} : A_i \to Y$ непр. за свако $i = \overline{1,n}$, онда је и $f$ непр.

**Пример** $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$A_1 = (-\infty, 0]$, $A_2 = [0, +\infty)$

$f|_{A_1}$, $f|_{A_2}$ су непр. и $A_1, A_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow f$ је непр.

**дефр.** Нека је $f: X \to Y$.

(1) $f$ је **отворено** ако $(\forall U \in \mathcal{T}_X)\ f(U) \in \mathcal{T}_Y$.

(2) $f$ је **затворено** ако $(\forall V \in \mathcal{F}_X)\ f(V) \in \mathcal{F}_Y$.

**Коментар:** $f(U)$ је директна слика од $U$, тј.

$$f(U) = \{ f(x) \mid x \in U \} \subseteq Y$$

**Пример** (1) $1\!\!1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ је и отворено и затворено

(2) $1\!\!1 : (\mathbb{R}, \mathcal{U}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_a)$ није ни отворено ни затворено:

$$1\!\!1(\underbrace{(0,1)}_{\in \mathcal{U}}) = (0,1) \notin \mathcal{T}_a = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$

$$1\!\!1(\underbrace{[0,1]}_{\in \mathcal{F}}) = [0,1] \notin \mathcal{F}_a = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$

# Хомеоморфизми

Појам хомеоморфизма је централан у топологији и каже нам шта то значи да су два топ. простора „иста".

**деф.** Кажемо да је $h: X \to Y$ **хомеоморфизам** ако је $h$ бијекција и $h$ и $h^{-1}$ су непр.
Ако постоји хомео. између $X$ и $Y$ пишемо $X \approx Y$.

**Став** $\approx$ је рел. еквиваленције.

**доказ** (P) $\mathbb{1}: (X, \mathcal{T}_X) \to (X, \mathcal{T}_X)$ је хомео. $\Rightarrow X \approx X$

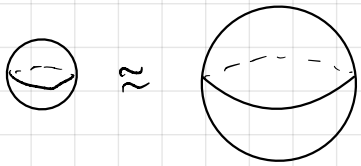
(C) $X \approx Y \Leftrightarrow h: X \xrightarrow{\approx} Y \Leftrightarrow h^{-1}: Y \xrightarrow{\approx} X \Leftrightarrow Y \approx X$

(T) Нека је $h_1: X \xrightarrow{\approx} Y$ и $h_2: Y \xrightarrow{\approx} Z$. Онда је $h_2 \circ h_1: X \to Z$ такође хомео. па је $X \approx Z$. ☐

Корисне ознаке: $X \overset{h}{\approx} Y$ и $h: X \approx Y$ за $h: X \to Y$ хомео.

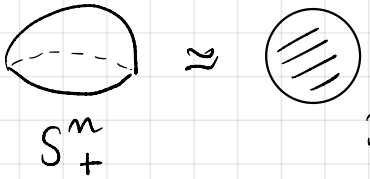
**Пример** (1) $h: [a, b] \approx [0, 1]$, $h(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{x-a}{b-a}$

(2)



(хомотопија)

(3)



$S^n_+$ $D^n$

(4) $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: X \to \mathbb{R}$, $\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

↑ график функције $f$

$h: \Gamma_f \approx X$, $h(x, f(x)) \overset{\text{def}}{=} x$

**Теорема** Нека је $f: X \to Y$. Следећа тврђења су еквивалентна.

(1) $f$ је хомеоморфизам.

(2) $f$ је нетр., бијекција и отворено.

(3) $f$ је нетр., бијекција и затворено.

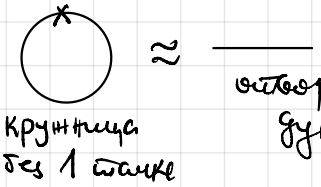
(4) $f$ је бијекција и $(\forall A \subseteq X)\ f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

**Пример** $h: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ дато са $h(x) = \operatorname{tg} x$ је хомео.

Дакле $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \approx \mathbb{R}$ и свако $(a,b) \approx \mathbb{R}$, за свако $a < b$.

(h замишљамо тако што интервал $(a,b)$ растежемо до бесконачности док не добијемо $\mathbb{R}$)

**Пример** Илустрација хомеоморфизма: https://youtu.be/VOKgMJEc_ro?si=gA_X7UtmUbBADbHX

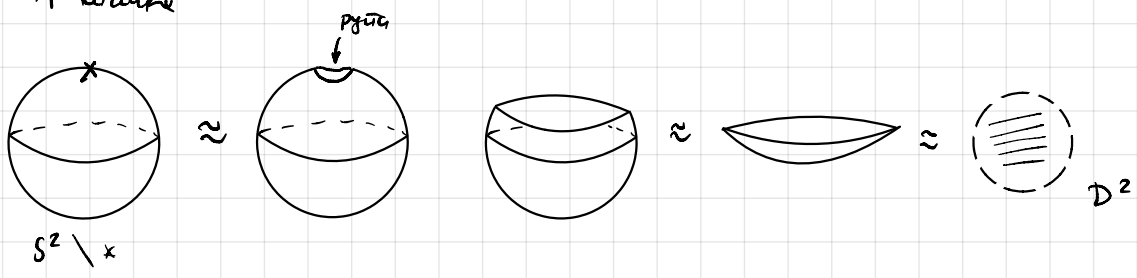
**Пример**  $\approx$ —

кружница без 1 тачке — отворена дуж

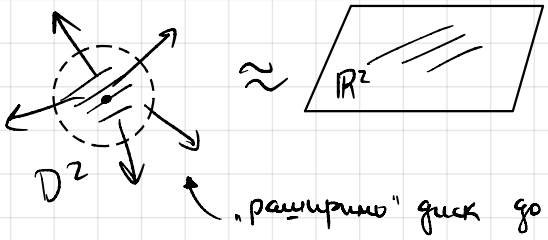
илустрација: 

**Пример** $S^2 \setminus * \approx \operatorname{int} D^2$

сфера без 1 тачке — ↑ отворен диск у равни




**Пример** $\operatorname{int} D^2 \approx \mathbb{R}^2$ Из транзитивности: $S^2 \setminus * \approx \mathbb{R}^2$




↑ „раширимо" диск до бесконачности да покрије $\mathbb{R}^2$

**деф.** Својства која се чувају при хомеоморфизму називају се **тополошким инваријантама.**

Неке тополошке инваријанте које ћемо радити су компактност, повезаност, путна повезаност итд. Топ. инваријанте користимо да покажемо да неки простори нису хомео.

Нпр. $[0,1]$ је компактан, $(0,1)$ није, па $[0,1] \not\cong (0,1)$.

## Компактност

**деф** Нека је $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ фамилија подскупова од $X$. Кажемо да је $\mathcal{U}$ **покривач** од $X$ ако је $X = \bigcup \mathcal{U}$. Ако је додатно $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}_X$, онда је $\mathcal{U}$ **отворен покривач**.

Ако су $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ два покривача од $X$ тд. $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2$, кажемо да је $\mathcal{U}_1$ **поткокривач** од $\mathcal{U}_2$.

**деф** Простор $X$ је **компактан** ако сваки његов отворен покривач има коначан поткокривач. Прецизније, за сваку фамилију $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ отворених скупова важи

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \Rightarrow (\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in A) \quad X = U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \dots \cup U_{\alpha_n}.$$

**деф** Нека је $A \subseteq X$. Фамилија $\mathcal{U} \in \mathcal{P}(X)$ је **покривач** скупа $A$ ако је $A = \bigcup \mathcal{U}$, а ако је додатно $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_X$, онда је $\mathcal{U}$ **отворен покривач**.

**деф.** $A \subseteq X$ је **компактан** у $X$ ако сваки отворен покривач од $A$ има коначан поткокривач.

**Став** Нека је $A \subseteq X$. $A$ је компактан скуп у $X$ акко је $(A, \mathcal{T}_A)$ компактан као топ. простор.

**Став** Нека је $X$ компактан и $f: X \to Y$ непрекидно и „на". Тада је и $Y$ компактан.

доказ: Нека је $Y = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha$, $V_\alpha \in \mathcal{T}_Y$, $\alpha \in \Lambda$.

Тада $X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \underbrace{f^{-1}(V_\alpha)}_{\in \mathcal{T}_X} \overset{X \text{ комп.}}{\Longrightarrow} (\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Lambda)\ X = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(V_{\alpha_i})$

$\Rightarrow Y = \bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha_i} \Rightarrow Y$ је компактан. ▨

**Последица** Компактност је тополошка инваријанта.

**Последица** Ако је $f: X \to Y$ непр. и $A \subseteq X$ компактан, онда је и $f(A)$ компактан.

доказ: Применимо став на $f|_A: A \to f(A)$. ▨

дефиниција Фамилију свих компактних подскупова од $X$ означавамо са $\mathcal{K}_X$.

**Став** Ако је $X$ компактан, онда $\mathcal{T}_X \subseteq \mathcal{K}_X$.

( Затворен подскуп компакта је компактан.)

**Пример** (1) $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ није компактан: $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n)$ – нема коначан потпокривач

(2) $X$ коначан $\Rightarrow X$ је компактан

Заиста, $X$ је коначан, па је и $\mathcal{P}(X)$ коначан, а тиме пре и $\mathcal{T}_X$. То значи да је сваки отворен покривач већ коначан, па је сам себи коначан потпокривач, те је $X$ компактан.

**Став** У $\mathbb{R}^n$ скуп је компактан акко је затворен и ограничен.

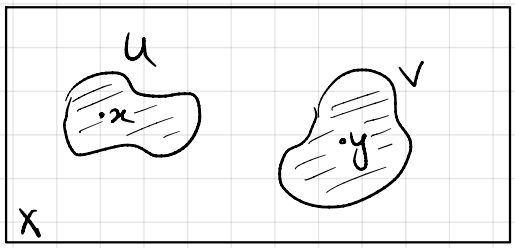
**Пример** $[0,1]$, $[3,5]\cup[7,8]$ су компактни у $\mathbb{R}$

$(0,1)$, $(0,+\infty)$, $[0,+\infty)$, $[0,1)$ нису компактни у $\mathbb{R}$

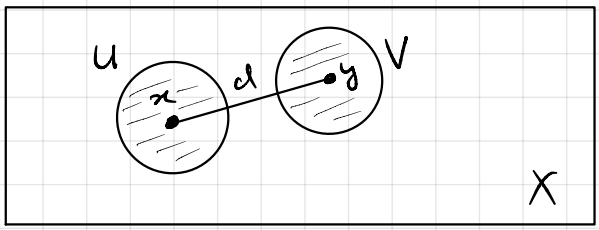
## Хаусдорфови простори

**дефиниција** Кажемо да је $X$ **Хаусдорфов простор** (или $T_2$-простор) ако $(\forall x,y\in X)\ x\neq y \Rightarrow (\exists U,V\in\mathcal{T})\ x\in U,\ y\in V,\ U\cap V=\emptyset$.

Дакле, у Хаусдорфовом простору сваке две различите тачке можемо раздвојити отвореним скуповима.




**Пример** Сваки метрички простор је Хаусдорфов. Заиста, нека је $x\neq y$ и $d=d(x,y)$. Онда узмемо $U=B(x,\frac{d}{3})$, $V=(y,\frac{d}{3})$




**Став** Својство $T_2$ је тополошка инваријанта.

*доказ* Нека је $X$ $T_2$ и $h: X\to Y$ хомеоморфизам.

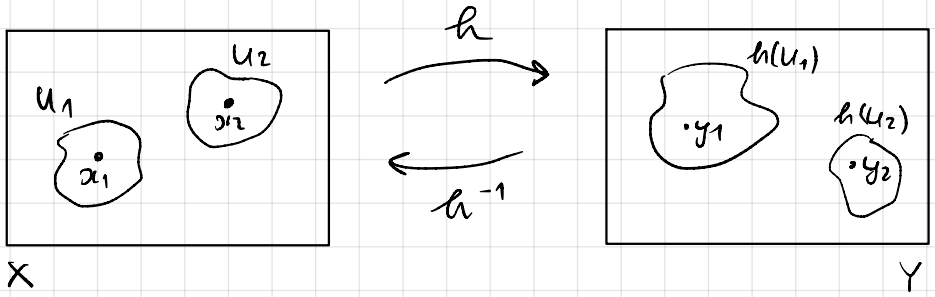
Нека су $y_1,y_2\in Y$, $y_1\neq y_2$ и $x_1=h^{-1}(y_1)$, $x_2=h^{-1}(y_2)$.

$X$ је $T_2$ па раздвојимо $x_1$ и $x_2$ у $X$:

$(\exists U_1, U_2 \in \mathcal{T}_X)\ x_1 \in U_1,\ x_2 \in U_2,\ U_1 \cap U_2 = \emptyset.$

Тада $h(U_1), h(U_2) \in \mathcal{T}_Y$ и разводају $y_1$ и $y_2$:

$y_1 \in h(U_1),\ y_2 \in h(U_2),\ h(U_1) \cap h(U_2) = \emptyset.$




**Став** Потпростор $T_2$ простора је $T_2$.

**Став** Ако је $X$ $T_2$, онда $\mathcal{K}_X \subseteq \mathcal{F}_X$

**Последица** Ако је $X$ компактан и $T_2$, онда $\mathcal{K}_X = \mathcal{F}_X$.

**Став** Ако је $X$ компактан, $Y$ $T_2$, $f: X \to Y$ непр, онда је $f$ затворено

доказ $F \in \mathcal{F}_X \overset{X\text{ комп.}}{\Longrightarrow} F \in \mathcal{K}_X \Rightarrow f(F) \in \mathcal{K}_Y \overset{Y T_2}{\Longrightarrow} f(F) \in \mathcal{F}_Y.$

Последица Ако је $f: X \to Y$ непрекидна бијекција, $X$ компактан, $Y$ $T_2$, онда је $f$ хомеоморфизам.

# Повезаност

**деф.** Топ. пр. $(X, \mathcal{T}_X)$ је **повезан** ако не постоји пар скупова $U, V \in \mathcal{T}_X \setminus \{\emptyset\}$ тј. $U \cap V = \emptyset$ и $U \cup V = X$.

Ако постоје овакви скупови, кажемо да је $X$ **неповезан**, а пар $(U, V)$ називамо **дисконексијом** од $X$.

Ако је $(U, V)$ дисконексија од $X$, онда су $U$ и $V$ и **отворени** и **затворени**.

**Пример** (1) $X = [0,1] \cup [3,5]$ је неповезан

(2) $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ је повезан

(3) $(X, \mathcal{T}_d)$ је повезан акко $|X| = 1$.

**Став** Следећа тврђења су еквивалентна:

(1) $X$ је повезан;

(2) не постоји непр. и „на" $f: (X, \mathcal{T}_X) \to (\{0,1\}, \mathcal{T}_d)$;

(3) $\mathcal{T} \cap \mathcal{F} = \{\emptyset, X\}$.

**доказ** (1) $\Rightarrow$ (3): тј. $\exists U \in (\mathcal{T} \cap \mathcal{F}) \setminus \{\emptyset, X\}$

$\Rightarrow (U, U^c)$ је дисконексија од $X$ ↯

(3) $\Rightarrow$ (1): тј. $X$ није повезан и $(U, V)$ нека дисконексија, тј. $U, V \in \mathcal{T}_X \setminus \{\emptyset\}$, $U \cap V = \emptyset$, $U \cup V = X$.

$\Rightarrow U = V^c \in \mathcal{F}_X \Rightarrow U \in \mathcal{T}_X \cap \mathcal{F}_X$ ↯

(1) $\Rightarrow$ (2): тј. $\exists f: X \to \{0,1\}$ непр. и „на"

$U := f^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{T}_X \setminus \{\emptyset\}$ (јер $\{0\} \in \mathcal{T}_{\{0,1\}}$ и $f$ непр.)

$V := f^{-1}(\{1\}) \in \mathcal{T}_X \setminus \{\emptyset\}$ (јер $\{1\} \in \mathcal{T}_{\{0,1\}}$ и $f$ непр.)

$\Rightarrow (U,V)$ је дисконексија од $X$ ↯

(2) $\Rightarrow$ (1): тј. $(U,V)$ дисконексија од $X$.

дефинишемо $f|_U = 0$, $f|_V = 1$.

$f$ је непр. на основу теореме о лепљењу. ↯ ▨

**Пример** $\mathbb{Q}$ је неповезан. Једна дисконексија би била:

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Q} \cap (-\infty, \sqrt{2})) \sqcup (\mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, +\infty))$$

**Став** Ако је $X$ повезан и $f: X \to Y$ непр. и „на", онда је и $Y$ повезан.

доказ: тј. $Y$ није пов.

$\Rightarrow$ $\exists$ непр. и „на" $g: Y \to \{0,1\}$

$\Rightarrow$ $g \circ f: X \to \{0,1\}$ непр. и „на". ↯ ▨

**Последица** Повезаност је тополошка инваријанта.

**Последица** Ако је $f: X \to Y$ непр. и $A \subseteq X$ повезан, онда је и $f(A)$ повезан.

**Пример** Сви интервали су повезани:

$(0,1)$, $[0,1]$, $[0,1)$, $(-\infty,1]$, $(-\infty,1)$, $[1,+\infty)$, $(1,+\infty)$

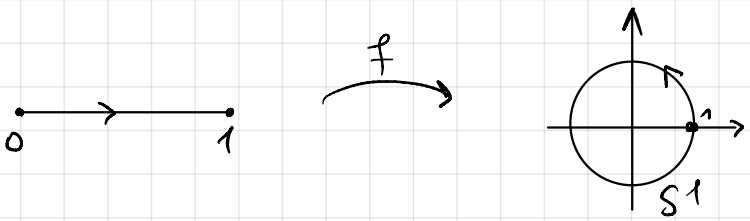
**Пример** Кружница $S^1$ је повезана.

Замислимо кружницу можемо видети као слику при пресликавању

$$f: [0,1] \xrightarrow{\text{"на"}} S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$$

датом са

$$f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

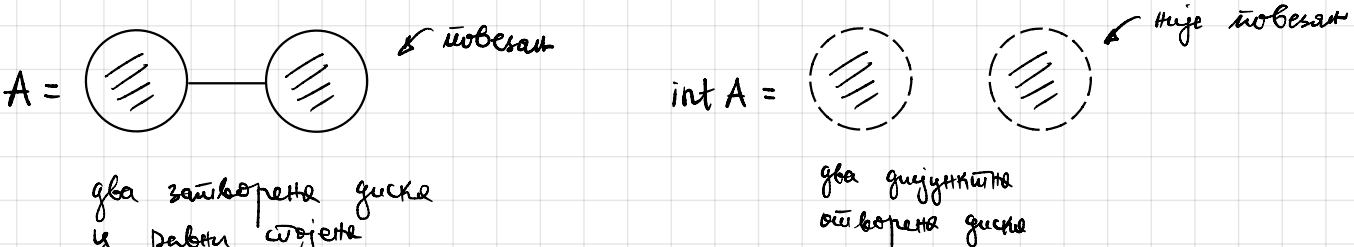



Знамо да је слика повезаног скупа при нпр. пресликавању повезана, па је $f([0,1]) = S^1$ повезан.

**Став** Нека је $X$ топ. пр. $A, B \subseteq X$, $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$. Ако је $A$ повезан, онда је и $B$ повезан.

**Последица** $A$ повезан $\Rightarrow$ $\bar{A}$ повезан.

**Пример** $A$ повезан $\not\Rightarrow$ $\text{int}A$ повезан




два затворена диска
у равни стоје
једном дуж

два дисјунктна
отворена диска

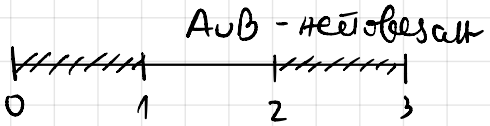
**Пример** $A$ повезан $\not\Rightarrow$ $\partial A$ повезан

нпр. $A = [3,7]$, $\partial A = \{3,7\}$

**Пример** $A, B$ повезани $\not\Rightarrow$ $A \cup B$ повезан

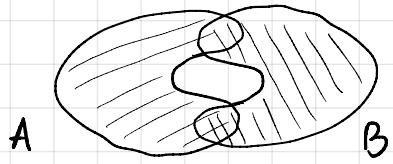
нпр. $A = (0,1)$, $B = (2,3) \subseteq \mathbb{R}$

$A, B$ - повезани,



**Пример** $A, B$ повезани $\not\Rightarrow$ $A \cap B$ повезан

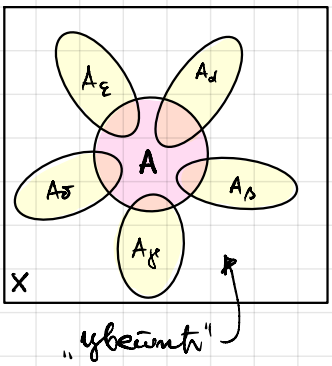
Нпр.




$A \cap B =$  нетповезан

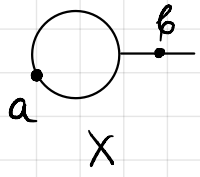
У једном специјалном случају та унија повезаних скупова биће повезана:

**Теорема** [увећати] Нека је $X$ топ. пр. а $A$ и $A_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{A}$ повезани подскупови од $X$. Ако је $A \cap A_\alpha \neq \emptyset$ за свако $\alpha \in \mathcal{A}$, онда је $A \cup \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$ повезан.




**деф.** Нека је $X$ повезан. Тачка $x \in X$ је **разводна** ако је $X \setminus \{x\}$ нетповезан. У супротном, $x$ је **неразводна**.

**Пример**




a је неразводна тачка

b је једна разводна тачка

**Став** Бројеви разводних и неразводних тачака су тополошке инваријанте.

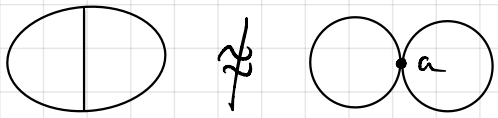
**Пример** $(0,1)$, $[0,1)$ и $[0,1]$ нису међусобно хомеоморфни

$(0,1)$: нема неразводних тачака

$[0,1)$: има једну неразводну тачку - 0

$[0,1]$: има две неразводне тачке - 0 и 1

**Пример** (1)




нема разводних тачака — a је разводна тачка

(2)



1 разводна тачка — $\infty$ разводних тачака

**Пример** $\mathbb{R} \not\cong \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$

$(\forall x \in \mathbb{R})$ $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ је неповезан $\Rightarrow$ све тачке су разводне

$(\forall y \in \mathbb{R}^n)$ $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$ је повезан $\Rightarrow$ све тачке су неразводне

## Компонента повезаности

Нека је $X$ топ. пр. Дефинишемо релацију $\sim$ на $X$:

за $x, y \in X$

$$x \sim y \iff (\exists A \subseteq X)\ x, y \in A \text{ и } A \text{ је повезан.}$$

**Став** $\sim$ је релација еквиваленције.

доказ (P) $x \sim x$ – узмемо $A := \{x\}$ - повезан

(C) очигледно

(T) $x \sim y \iff (\exists A \subseteq X)\ x, y \in A$ и $A$ је повезан

$y \sim z \iff (\exists\ \subseteq X)\ y, z \in B$ и $B$ је повезан

$y \in A \cap B \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \cup B$ је повезан на основу теореме увеће

Узмемо $C := A \cup B$

$x, z \in A \cup B$ - повезан $\Rightarrow x \sim z$. ☐

**деф.** Класе еквиваленције релације $\sim$ називамо **компонентама повезаности** од $X$. Класу од $x \in X$ означавамо са $C_x$.

**Став** Број компонената повезаности је тополошка инваријанта.

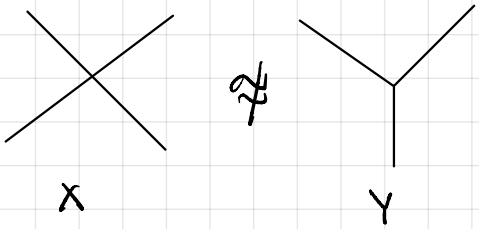
**Пример** (1)  $\not\simeq$ 

1 компонента 2 компоненте

(2) $(0,1) \cup (1,2) \not\simeq (3,4) \cup (4,5) \cup (5,6)$

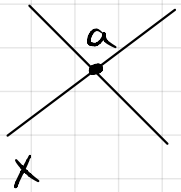
2 компоненте 3 компоненте

**Пример**

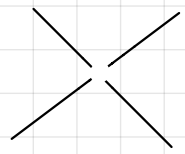


X Y

X и Y су повезани, тј. имају по 1 компоненту па ту нема проблема. Нека је $a \in X$ као на слици. Ако би било $h: X \simeq Y$, онда $X \setminus \{a\}$ и $Y \setminus \{h(a)\}$ морају имати исти број компонената. Не знамо где је $h(a)$ али имамо 2 случаја:



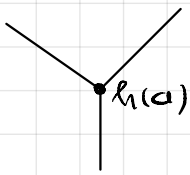
X



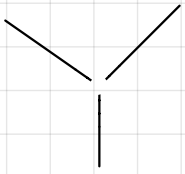
$X \setminus \{a\}$

4 компоненте

1° $h(a)$ је у средини



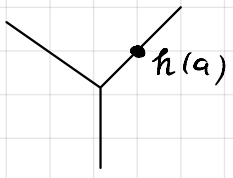
Y



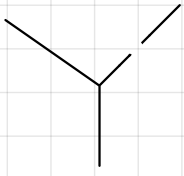
$Y \setminus \{h(a)\}$

3 компоненте

2° $h(a)$ је на „краку"



Y



$Y \setminus \{h(a)\}$

2 компоненте

Дакле, $X \setminus \{a\}$ има 4 компоненте, а $Y \setminus \{f(a)\}$ 2 или 3, па $X \not\cong Y$.

**Став** Нека је $X$ топ. пр. и $x \in X$

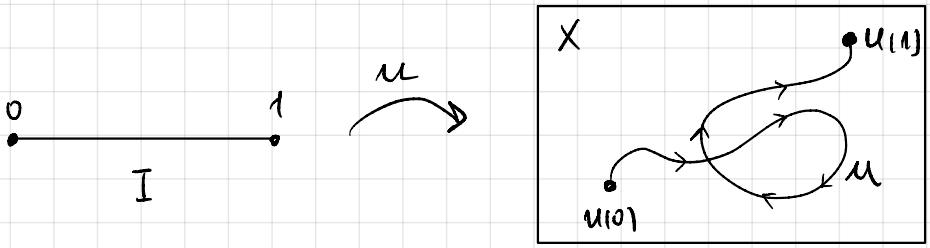
(1) $C_x$ је највећи повезан скуп који садржи $x$.

(2) $C_x$ је затворен у $X$.

## Путна повезаност

**деф.** Пут у топ. пр. $X$ је непрекидно пресликавање $u : [0,1] \to X$. $u(0)$ је почетак, а $u(1)$ крај пута $u$.

Надаље користимо ознаку $I = [0,1]$.




**деф.** $X$ је путно повезан ако за сваке две тачке $x, y \in X$ постоји пут од $x$ до $y$, тј.

$$(\forall x, y \in X)(\exists u : I \to X \text{ непр.})\ u(0) = x,\ u(1) = y$$

**Став** Ако је $X$ путно повезан и $f : X \to Y$ непр. и „на", онда је и $Y$ путно повезан.

*доказ*: Нека су $y_1, y_2 \in Y$. $f$ је „на" па постоје $x_1, x_2 \in X$ тј. $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$. $X$ је путно пов. па постоји пут $u : I \to X$ од $x_1$ до $x_2$. Тада је $f \circ u : I \to Y$ пут од $y_1$ до $y_2$. ▨

**Последица** Путна повезаност је тополошка инваријанта.

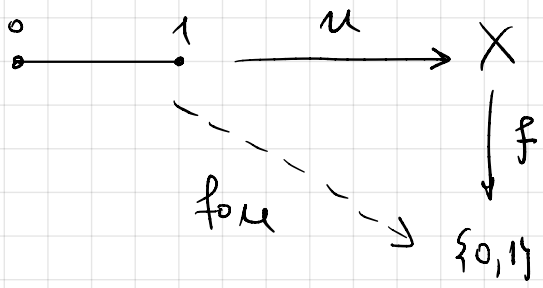
**Последица** Ако је $f : X \to Y$ непр. и $A \subseteq X$ путно повезан, онда је и $f(A)$ путно повезан.

**Став** Ако је $X$ путно пов, онда је и повезан.

*доказ* тис. Нека је $f: X \to \{0,1\}$ нетр. сур.

$$(\exists x, y \in X) \quad f(x) = 0, \ f(y) = 1$$

Нека је $u: [0,1] \to X$ пут од $x$ до $y$, тј. $u(0) = x$, $u(1) = y$.




$f \circ u$ је нетр. и „на"

$[0,1]$ је пов. $\Rightarrow \{0,1\}$ је повезан ↯ ▨

**Пример** $X$ повезан $\not\Rightarrow$ путно повезан

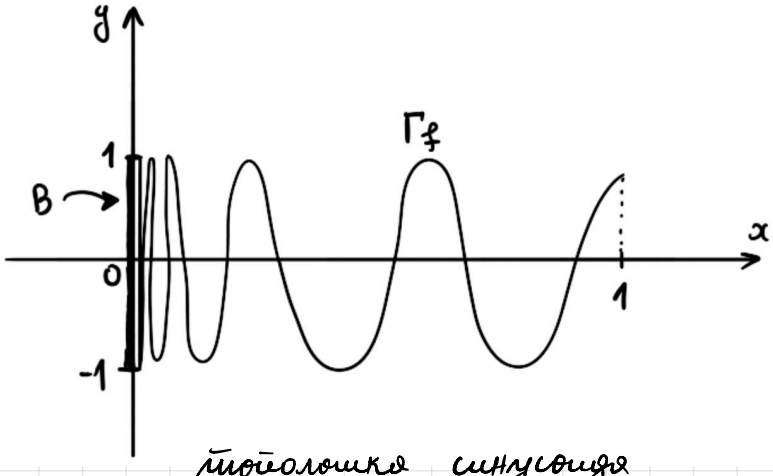
Нека је $f: (0,1] \to \mathbb{R}$ дато са $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ и

$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in (0,1]\}$ график ове функције.

$\Gamma_f$ је путно повезан $\Rightarrow \Gamma_f$ је повезан $\Rightarrow X := \overline{\Gamma_f}$ је повезан

Није тешко доказати да је

$$X = \underbrace{(\{0\} \times [-1,1])}_{\text{!! } B} \cup \Gamma_f$$




*тополошка синусоида*

$X$ није путно повезан јер тачке са $B$ не можемо спојити путем са тачком са $\Gamma_f$.

## Тополошки производ

Нека су $(X, \mathcal{T}_X)$ и $(Y, \mathcal{T}_Y)$ топ. пр.

$$\mathcal{T}_{X\times Y} \overset{\text{def}}{=} \{ W \subseteq X \times Y \mid (\forall (x,y)\in W)(\exists U\in\mathcal{T}_X)(\exists V\in\mathcal{T}_Y)\ (x,y)\in U\times V\subseteq W\}$$

$$= \left\{ \bigcup_{\alpha\in\Lambda} (U_\alpha \times V_\alpha) \mid (\forall \alpha\in\Lambda)\ U_\alpha\in\mathcal{T}_X,\ V_\alpha\in\mathcal{T}_Y \right\}$$

**Став** $\mathcal{T}_{X\times Y}$ је једна топологија на $X\times Y$.

**деф.** Топ. пр. $(X\times Y, \mathcal{T}_{X\times Y})$ је **тополошки производ** простора $X$ и $Y$, а $\mathcal{T}_{X\times Y}$ називамо **топологијом производа** или **Тихоновљевом топологијом**.

**Став** Пројекције $p_X : X\times Y \to X$ и $p_Y : X\times Y \to Y$ дате са

$$p_X(x,y) := x, \quad p_Y(x,y) := y$$

су непрекидне и отворене.

**Став** $f : Z \to X\times Y$ је нетр. акко су нетр. $p_X \circ f$ и $p_Y \circ f$.

$$Z \xrightarrow{f} X\times Y \begin{array}{l} \xrightarrow{p_X} X \\ \xrightarrow{p_Y} Y \end{array}$$

**деф.** Кажемо да је својство P **продуктибилно** ако:

$X$ и $Y$ имају својство P $\Rightarrow$ $X\times Y$ има својство P

**Теорема** $X, Y$ компактни $\Rightarrow$ $X\times Y$ је компактан.

**Теорема** $X, Y$ Хаусдорфови $\Rightarrow$ $X\times Y$ је Хаусдорфов.

**Теорема** $X, Y$ повезани $\Rightarrow$ $X\times Y$ је повезан.

**Теорема** $X, Y$ путно повезани $\Rightarrow$ $X\times Y$ је путно повезан.

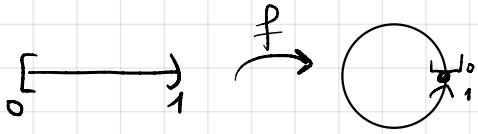
# Количничка пресликавања

**деф.** Пресликавање $f: X \to Y$ је **количничко** ако је „на" и

$$(\forall B \subseteq Y) \quad B \in \mathcal{T}_Y \iff f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X.$$

(Приметимо: смер „$\Rightarrow$" је непрекидност.)

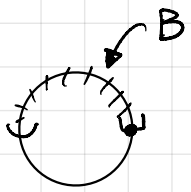
**Пример** $f: [0,1) \to S^1$, $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$




$f$ је непр. и „на", али не важи услов „$\Leftarrow$" па није количничко

За $B := f([0, \frac{1}{2}))$ имамо:

$$f^{-1}(B) = [0, \tfrac{1}{2}) \in \mathcal{T}_{[0,1)} \not\Rightarrow B \in \mathcal{T}_{S^1}$$




**Став** Пресликавање $f: X \to Y$ је количничко акко је „на" и

$$(\forall B \subseteq Y) \quad B \in \mathcal{F}_Y \iff f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_X.$$

**Став** Ако је $f$ непр., „на" и отворено/затворено, онда је $f$ количничко.

доказ $f$ отворено:

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X \overset{f \text{ отв.}}{\Longrightarrow} \underbrace{f(f^{-1}(B))}_{\overset{f \text{ „на"}}{=} B} \in \mathcal{T}_Y$$

$f$ затворено: слично. ▨

**Последица** $f: X \to Y$ непр. и „на", $X$ компактан, $Y$ $T_2$
$\Rightarrow$ $f$ је затворено.

*доказ* Имали смо раније тврђење: $f$: комп. $\to T_2$ је затворено. ▨

**Став** Нека су $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$ затворена. Тада је и $g \circ f$ затворено.

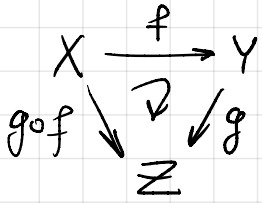
*доказ*: $g \circ f$ је непр. и „на" ✓
Нека је $B \subseteq Z$ и $(g \circ f)^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$

$$(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}\left(g^{-1}(B)\right) \in \mathcal{T}_X \overset{f \text{ зат.}}{\Longrightarrow} g^{-1}(B) \in \mathcal{T}_Y \overset{g \text{ зат.}}{\Longrightarrow} B \in \mathcal{T}_Z$$ ▨

**Теорема** Нека је $f: X \to Y$ затворено и $g: Y \to Z$. Тада је $g$ непрекидно акко је $g \circ f$ непр.

*доказ*: $\Rightarrow$: композиција непр. је непр.

$\Leftarrow$: Нека је $g \circ f$ непр. и $V \in \mathcal{T}_Z$.




$$g \circ f \text{ непр.} \Rightarrow (g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}\left(g^{-1}(V)\right) \in \mathcal{T}_Z \overset{f \text{ зат.}}{\Longleftrightarrow} g^{-1}(V) \in \mathcal{T}_Z \Rightarrow g \text{ непр.}$$ ▨

## Количнички простори

Нека је $X$ т. пр. и $Y$ скуп и $f: X \to Y$ „на".
На $Y$ дефинишемо финалну топологију помоћу $f$:

$$\mathcal{T}_Y := \mathcal{T}_f = \left\{ V \subseteq Y \mid f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X \right\}$$

**Став** $\mathcal{T}_f$ јесте топологија на $Y$.

*доказ* по деф. ▨

**Став** $f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_f)$ је количнички.

*доказ* директно из деф. □

**Став** $\mathcal{T}_f$ је најјача топ. тр. је $f$ непр.

Количнички простор задајемо на 3 начина.

① Помоћу релације екв.

Нека је $X$ топ. пр. и $\sim$ рел. екв. на $X$. Природна пројекција $\pi: X\to X/_\sim$, $x\mapsto[x]$ нам даје топ. на $X/_\sim$:

$$\mathcal{T}_{X/_\sim} := \mathcal{T}_\pi = \left\{ V\subseteq X/_\sim \mid \pi^{-1}(V)\in\mathcal{T}_X \right\}.$$

Пар $(X/_\sim, \mathcal{T}_{X/_\sim})$ је количнички простор.

② Помоћу подскупа.

Нека је $X$ топ. пр. и $A\subseteq X$. Дефинишемо рел. $\sim$ на $X$:

$$x\sim y \overset{def}{\iff} x=y \ \vee\ x,y\in A$$

$\sim$ је рел. екв. па дефинишемо:

$$X/A \overset{def}{=} X/_\sim \quad\text{и}\quad \mathcal{T}_{X/A} \overset{def}{=} \mathcal{T}_{X/_\sim}$$

Пар $(X/A, \mathcal{T}_{X/A})$ је количнички простор.

③ Помоћу пресликавања.

Нека су $X,Y$ топ. пр. и $f:X\to Y$ непр. Дефинишемо $\sim$ на $X$:

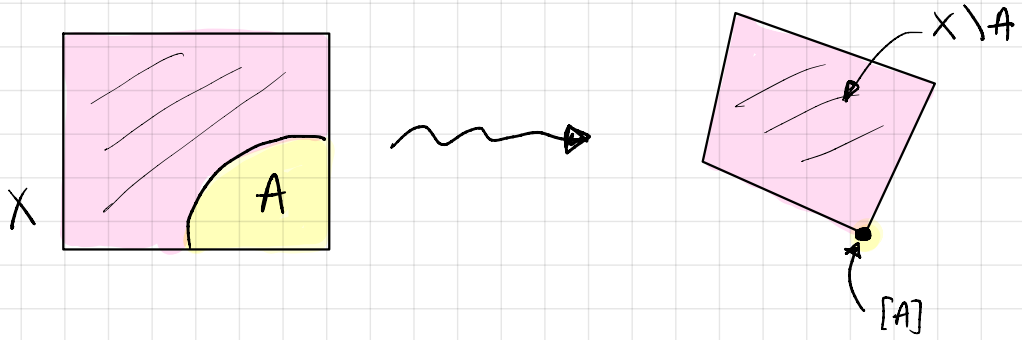
$$x\sim y \iff f(x)=f(y).$$

$\sim$ је рел. екв. и

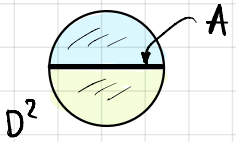
$$X/f \overset{def}{=} X/_\sim, \quad \mathcal{T}_{X/f} \overset{def}{=} \mathcal{T}_{X/_\sim}.$$

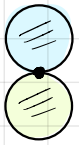
Пар $(X/f, \mathcal{T}_{X/f})$ је количнички простор.

**Пример** $A \subseteq X$, $X/A =$ „скупимо $A$ у тачку"

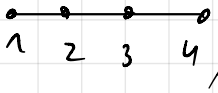


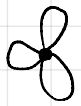

(1) $X/X \approx *$

(2) 

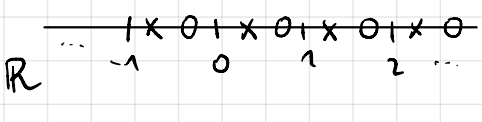
$D^2/A =$ 

(3) $D^n/\partial D^n = S^n$, $n \in \mathbb{N}$

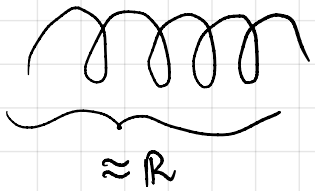
(4) $[1,4]/\{1,2,3,4\} =$ 

$\approx$ 

**Пример** (1) $\sim$ на $\mathbb{R}$: $x \sim y \overset{def}{\iff} x - y \in \mathbb{Z}$

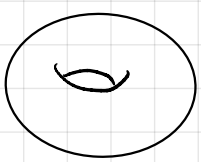


$/_{\sim} \approx S^1$

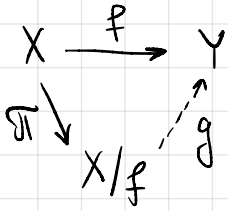
илустрација  $\to 0_{S^1}$ („намотамо" $\mathbb{R}$ на $S^1$)

$\approx \mathbb{R}$

(2) $\sim$ на $\mathbb{R}^2$: $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff x_1 - x_2 \in \mathbb{Z} \wedge y_1 - y_2 \in \mathbb{Z}$

$\mathbb{R}^2/_{\sim} \approx T^2 =$  = тороус

**Теорема** Ако је $f: X \to Y$ количничко, онда је $X/f \approx Y$.

**доказ:** 


Нека је $g: X/f \to Y$ дато са

$$g([x]) := f(x)$$

g је добро деф.: $x, y \in X$

$[x] = [y] \iff x \sim y \iff f(x) = f(y) \iff g([x]) = g([y])$

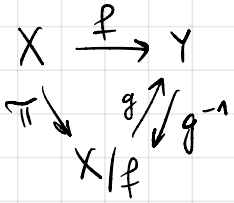
g је непр.: $g \circ \pi = f$ је непр. и $\pi$ кол. $\Rightarrow$ g је непр.

g је „1-1": $g([x]) = g([y]) \iff f(x) = f(y) \iff x \sim y \iff [x] = [y]$

g је „на": $y \in Y \overset{f \text{ „на"}}{\Longrightarrow} (\exists x \in X)\ f(x) = y \iff y = g([x])$.

g је бијекција $\Rightarrow$ постоји $g^{-1}$

$g^{-1}$ је непр.: $g^{-1} \circ f = \pi$ је непр. и f количничко $\Rightarrow$ $g^{-1}$ је непр.




$\Rightarrow$ g је хомеоморфизам $\Rightarrow$ $X/f \approx Y$. ▨

**Пример** $f: [0,1] \to S^1 \qquad f(t) = e^{2\pi i t}$

f је непр. и слика компакта $[0,1]$ у $T_2$ простор $S^1$, па је затворена.

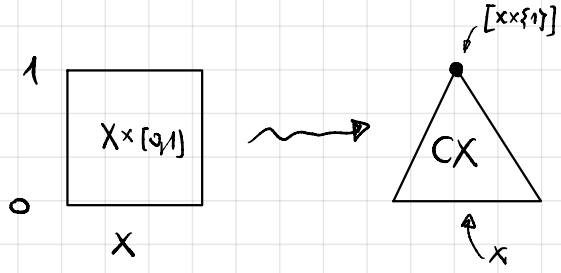
Дакле, f је непр., „на" и затворена $\Rightarrow$ f је количничко.

$\Rightarrow [0,1]/f \approx S^1$.

# Конструкции новых т.пр.

## ① Конус т.пространства $X$

$$CX \overset{\text{def}}{=} X \times [0,1] \Big/ X \times \{1\} = X \times [0,1] \Big/ \substack{(x,1)\sim(y,1) \\ (\forall x,y \in X)}$$

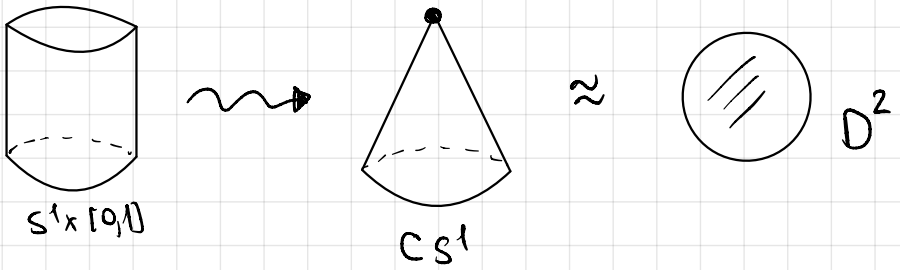



Имеем вложение $i : X \hookrightarrow CX$:

$i(x) = [(x,0)]$

(а может и $i(x) = [(x,t)]$, $t \in [0,1)$)

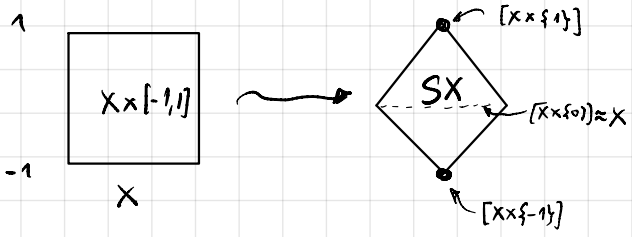
**Пример** $CS^1 = S^1 \times [0,1] \Big/ S^1 \times \{1\} = D^2$




Теперь: $CS^n = D^{n+1}$.

## ② Суспензия т.пространства $X$

$$SX = X \times [-1,1] \Big/ \substack{(x,1)\sim(y,1), \\ (x,-1)\sim(y,-1), \\ (\forall x,y \in X)}$$

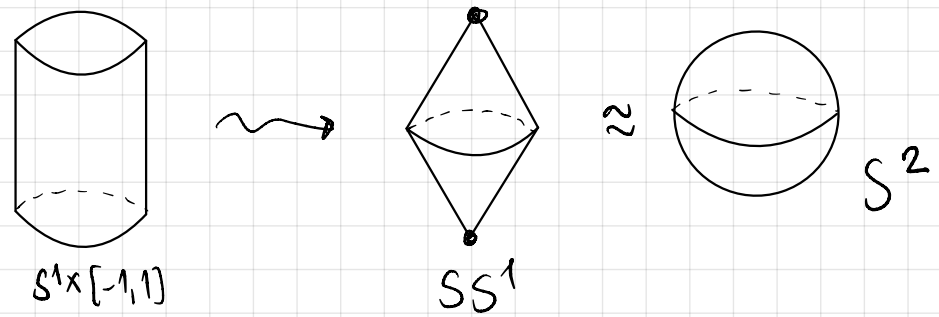



Имеем вложение $i : X \hookrightarrow SX$:

$i(x) = [(x,0)]$

(а может и $i(x) = [(x,t)]$, $t \in (-1,1)$)

**Пример** $SS^1 = S^1 \times [-1,1]/_{\sim} \approx S^2$




Генерално $SS^n \approx S^{n+1}$

③ Дисјунктна унија $X$ и $Y$: $(X \sqcup Y, \mathcal{T}_{X \sqcup Y})$

$$\mathcal{T}_{X \sqcup Y} = \{ U \in X \sqcup Y \mid U \cap X \in \mathcal{T}_X,\ U \cap Y \in \mathcal{T}_Y \}$$

④ Простор са базном тачком $(X, x_0)$

$x_0 \in X$ – произвољна тачка из $X$

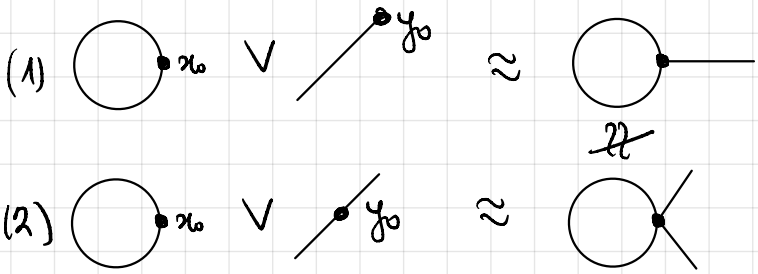
(овде ништа не конструишемо, само увадимо појам базне тачке)

⑤ Букет простора $X$ и $Y$

$x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ базне тачке

$$(X, x_0) \vee (Y, y_0) \overset{def}{=} X \sqcup Y /_{x_0 \sim y_0}$$

**Пример**



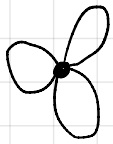

Букет зависи од избора базне тачке!

У неким просторима је свеједно шта је базна т. и тада пишемо само $X \vee Y$. Тј.

$$(\forall x_0, x_1 \in X)(\forall y_0, y_1 \in Y)\ (X, x_0) \vee (Y, y_0) \approx (X, x_1) \vee (Y, y_1)$$

$$\Rightarrow \quad X \vee Y \overset{def}{=} (X, x_0) \vee (Y, y_0), \quad \text{за } x_0 \in X,\ y_0 \in Y \text{ произвољно.}$$

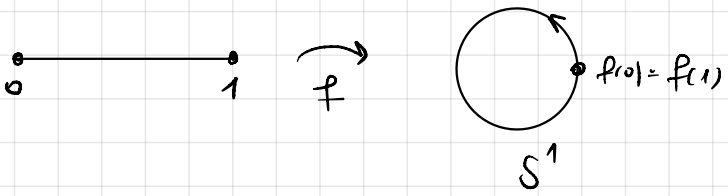
(углавном се и срећемо баш са овом ситуацијом.)

**Пример** $[1,4]/_{\{1,2,3,4\}} \approx$  $= S^1 \vee S^1 \vee S^1$

## Примери количничких простора

### ① Кружница

$f: I \to S^1, \qquad f(t) \overset{def}{=} (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$



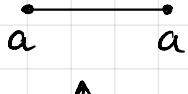
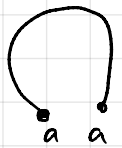
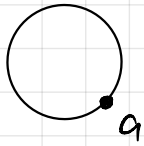

$f$ је непр. и „на", $I$ је компактан, $S^1$ је $T_2 \Rightarrow f$ је кол.

$\Rightarrow I/_f \approx S^1$. Шта је $I/f$? За $s,t \in I$:

$$s \sim t \iff f(s) = f(t) \iff (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$$

$$\iff t = s \ \vee \ t, s \in \{0,1\}$$

Дакле, $I/f$ је сегмент $[0,1]$ коме су почетак и крај идентификовани:

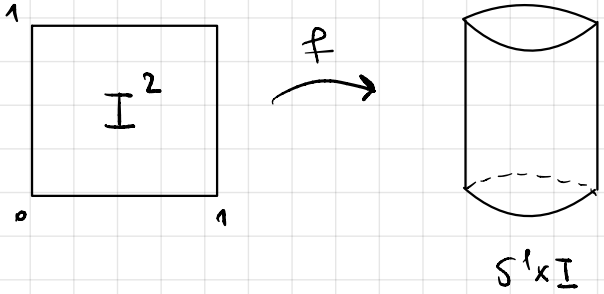
$I/f =$  $\approx$  $\approx$  $= S^1$



ова слика значи да „лепимо" a и a

## ② цилиндар

$$f: I^2 \to S^1 \times I, \quad f(u,v) \overset{def}{=} (\cos 2\pi u, \sin 2\pi u, v)$$



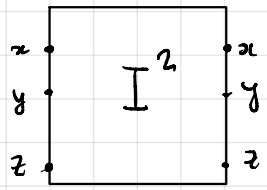

$f$ је количничко (непр., „на", компакт $\to T_2$)

$\Rightarrow \quad I^2/f \approx S^1 \times I$

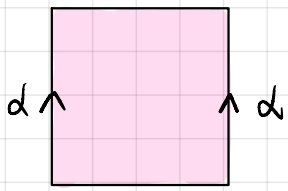
Класе у $I^2/f$:

$$(u_1, v_1) \sim (u_2, v_2) \iff \left(u_1 = u_2 \lor u_1, u_2 \in \{0,1\}\right) \land v_1 = v_2$$

Дакле, идентификујемо тачке: $(0,v) \sim (1,v)$, $v \in I$

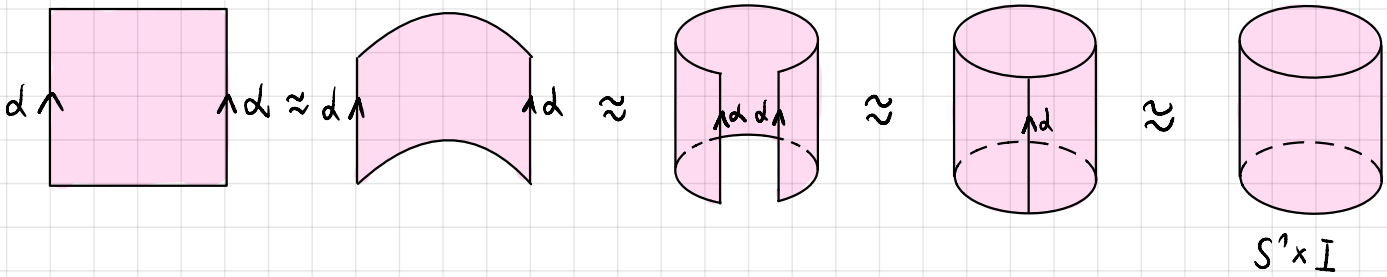



Користимо ознаку:



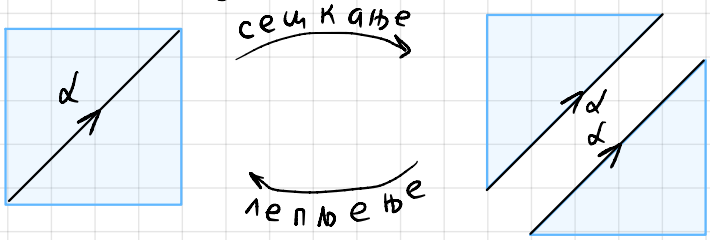

ово значи да лепимо дужи означене са $\alpha$ у смеру стрелица

илустрација:



**деф.** Количнички простор хомеоморфан неком топ. пр. $X$ је његов **количнички модел**.

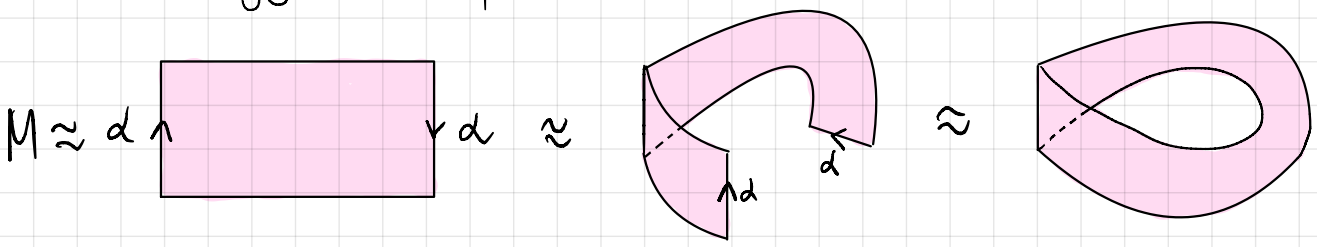
Количнички модели нам служе да простор представимо на лакши начин, нпр. често тродимензионалне објекте можемо представити раванским моделом (као цилиндар у претходном примеру). Имамо две (међусобно инверзне) операције са кол. моделима:




(Обе ове слике представљају квадрат.)

Сецкањем и лепљењем можемо трансформисати моделе (али све време добијамо међусобно хомеоморфне просторе).

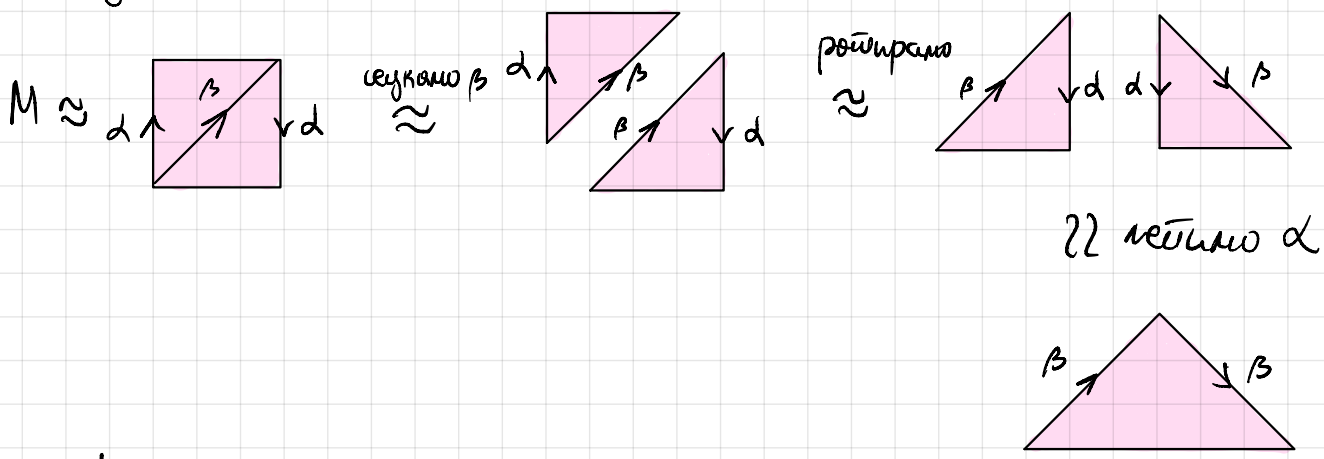
③ **Мебијусова трака** $M$



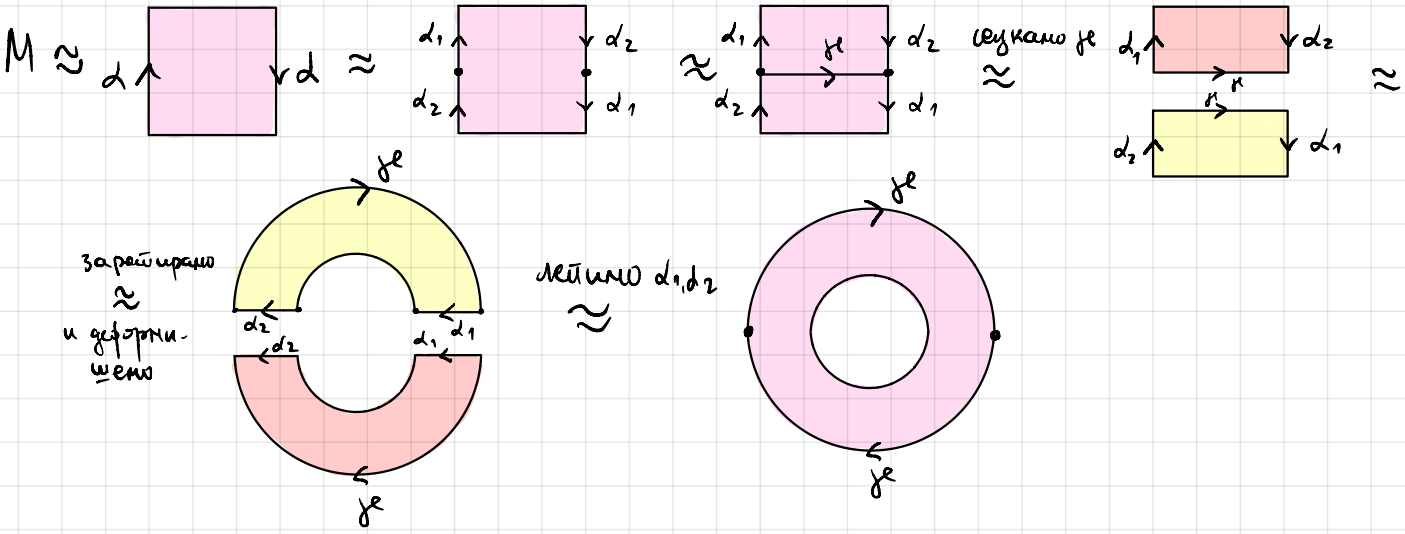

основни модел за $M$

$M$ има још 2 корисна модела која добијамо сецкањем и лепљењем овог модела

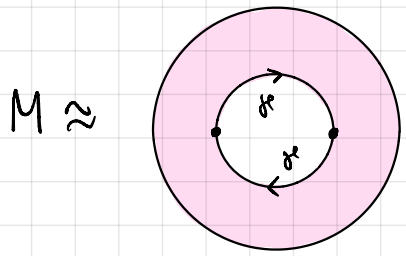
## други модел:



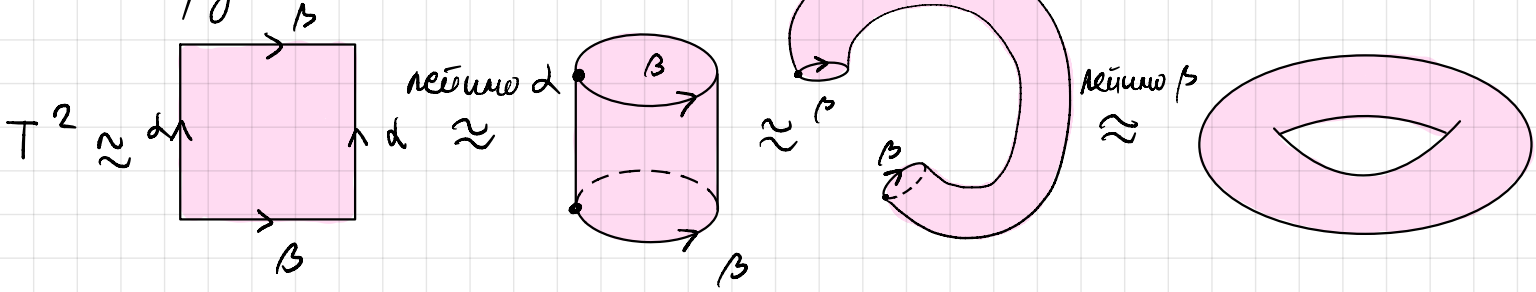

## трећи модел:




Кружни прстен можемо и „изокренути", тј.

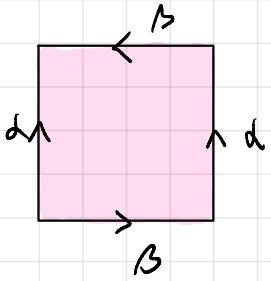



## ④ торус $T^2$



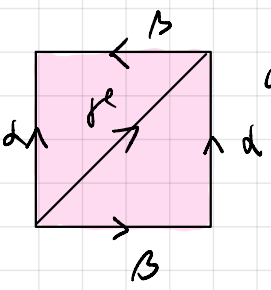
⑤ Клајнова боца $K$

$K \approx$

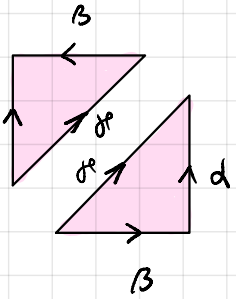



други модел:

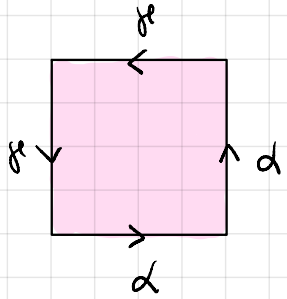
$K \approx$




сечено γ $\approx$




лепимо β $\approx$




⑥ Реални пројективни простор $\mathbb{R}P^n$

На $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ дефинишемо релацију:

$$x \sim y \iff (\exists \lambda \in \mathbb{R}) \quad y = \lambda x$$

(тј. $x \sim y$ ако припадају истој правој која пролази кроз 0)

Може се показати да је $\sim$ рел. екв.

деф. $\mathbb{R}P^n \stackrel{def}{=} (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$

(тј. елементи $\mathbb{R}P^n$ су праве у $\mathbb{R}^{n+1}$ кроз 0)

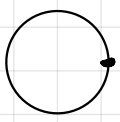
Став $\mathbb{R}P^n \approx S^n / x \sim -x$

Став $\mathbb{R}P^n \approx D^n / x \sim -x,\ x \in \partial D^n$

$n=1$: $\mathbb{R}P^1 \approx D^1/\sim \approx$

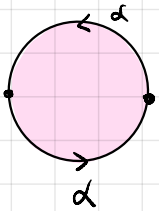



$=$




$= S^1$

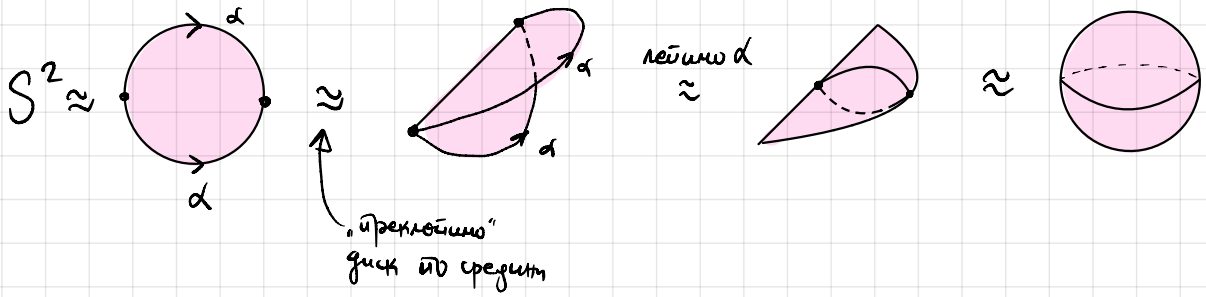
$n=2$: $\mathbb{R}P^2 \approx D^2/\sim =$




пројективна раван

Став $\mathbb{R}P^n$ је компактан, Хаусдорфов, повезан и глуво тов.

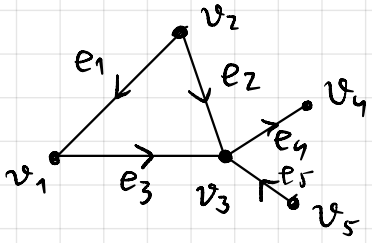
(7) сфера $S^2$



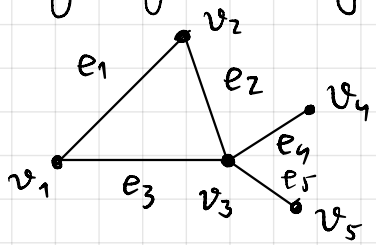
# Графови

**дефр.** Нека су $V$ и $E$ скупови, $V \neq \emptyset$ и $f: E \to V^2$. Уређена тројка $(V, E, f)$ је **усмерени граф**. Елементи скупа $V$ су **темена** графа, а елементи скупа $E$ су **гране** графа.
Ако је $f(v_1, v_2) = e$, кажемо да грана $e$ спаја темена $v_1$ и $v_2$.

**Пример** $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$




Неусмерени граф добијамо кад заборавимо оријентацију




формално:

**дефр.** **Неусмерен граф** (или само граф) је уређена тројка $(V, E, f)$, где су $V, E$ скупови, $V \neq \emptyset$ и $f: V \to \mathcal{P}_{1,2}(V)$ (где је $\mathcal{P}_{1,2}(V) = \{U \subseteq V \mid |U| = 1 \vee |U| = 2\}$ тј. $\mathcal{P}_{1,2}(V)$ су једночлани и двочлани подскупови од $V$).
Елементи скупа $V$ су **чворови**, а елементи скупа $E$ су **гране**.
Ако је $f(e) = \{v\}$, онда је $e$ **петља** у $v$.
Ако је $f(e) = \{v_1, v_2\}$, кажемо да $e$ спаја $v_1$ и $v_2$.
Граф је коначан ако су $V$ и $E$ коначни скупови.

Надаље радимо са коначним неусмереним графовима.

**Пример** $G=(V,E,f)$, $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$, $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$

$f: E \to P_{1,2}(V)$ дато са:

$f(e_1)=\{v_1,v_2\}$

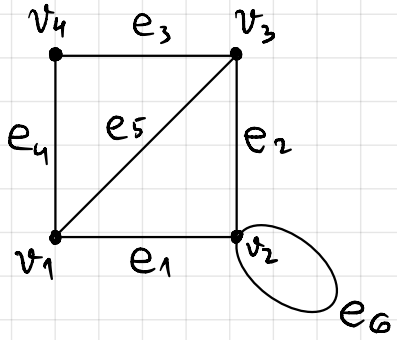
$f(e_2)=\{v_2,v_3\}$

$f(e_3)=\{v_3,v_4\}$

$f(e_4)=\{v_1,v_4\}$

$f(e_5)=\{v_1,v_3\}$

$f(e_6)=\{v_2\}$

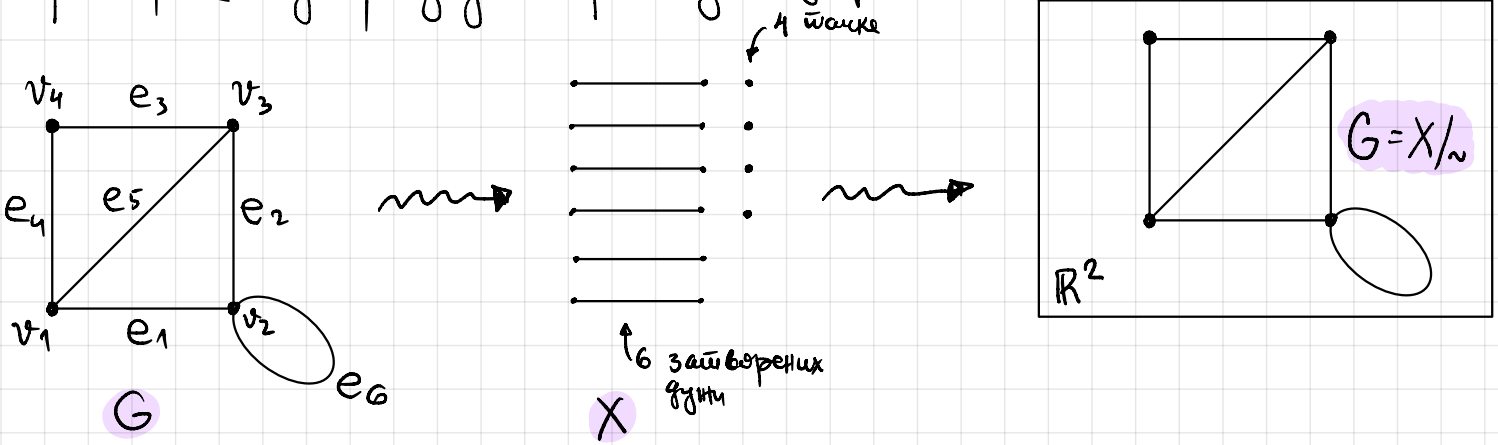



Сваки граф одређује један тополошки простор:

**дефр** Нека је $G=(V,E,f)$ граф. Нека је $n=|V|$ и $m=|E|$. У равни узмимо $n$ тачака и $m$ дисјунктних дужи. Нека је тај подпростор од $\mathbb{R}^2$ означен са $X$. Даље, свакој дужи из $X$ одговара једна ивица из $E$, а $n$ тачака одговарају теменима графа. Ако је $e \in E$ и $f(e)=\{v_1,v_2\}$, идентификујемо крајеве дужи (у $X$) која одговара ивици $e$ са тачкама (у $X$) које одговарају теменима $v_1$ и $v_2$. Ова идентификација је једна релација еквиваленције, а количнички простор $X/\sim$ (који исто означавамо са $G$) такође називамо графом (у тополошком смислу).

**Напомена**: граф можемо видети и као комбинаторни објекат $(V,E,f)$ и као тополошки пр. $X/\sim$, како нам која одговара.

**Пример** (илустрација претходне деф.)

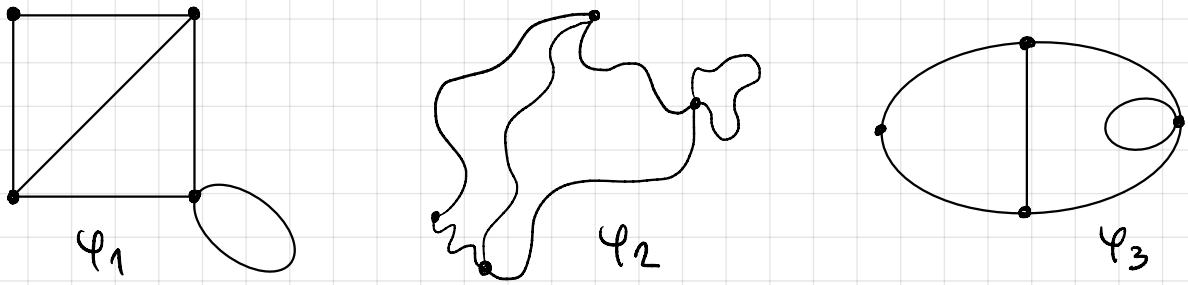



$|V|=4,\ |E|=6$

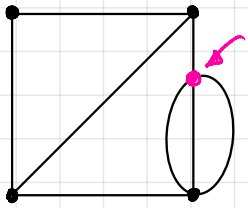
## Геометријска реализација графа

деф. Геометријска реализација графа је утапање (тј. непр. и „1-1" пресликавање) тог графа у $\mathbb{R}^n$. Ако постоји утапање $\varphi: G \to \mathbb{R}^n$, кажемо да се $G$ може реализовати у $\mathbb{R}^n$.

**Пример** Граф се може на разне начине утопити у $\mathbb{R}^n$. нпр. за $n=2$ и $G$ из претходног примера неколико утапања:

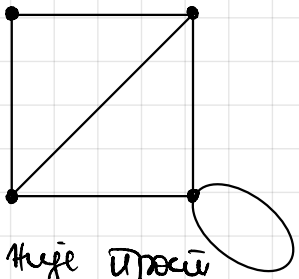



ово <u>није</u> утапање графа $G$:

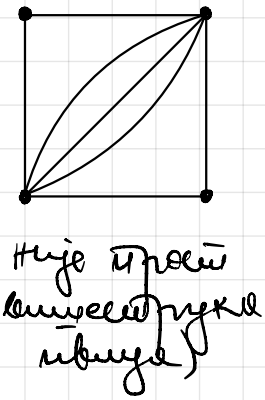


**дефиниција** Граф је **прост** ако нема петљи ни вишеструких ивица (тј. 2 темена су спојена највише једном ивицом).
Формално, $G=(V,E,f)$ је прост ако је $f$ „1-1" и $|f(e)|=2$ за свако $e\in E$.

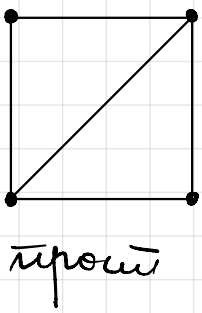
**Пример**



није прост (петља)



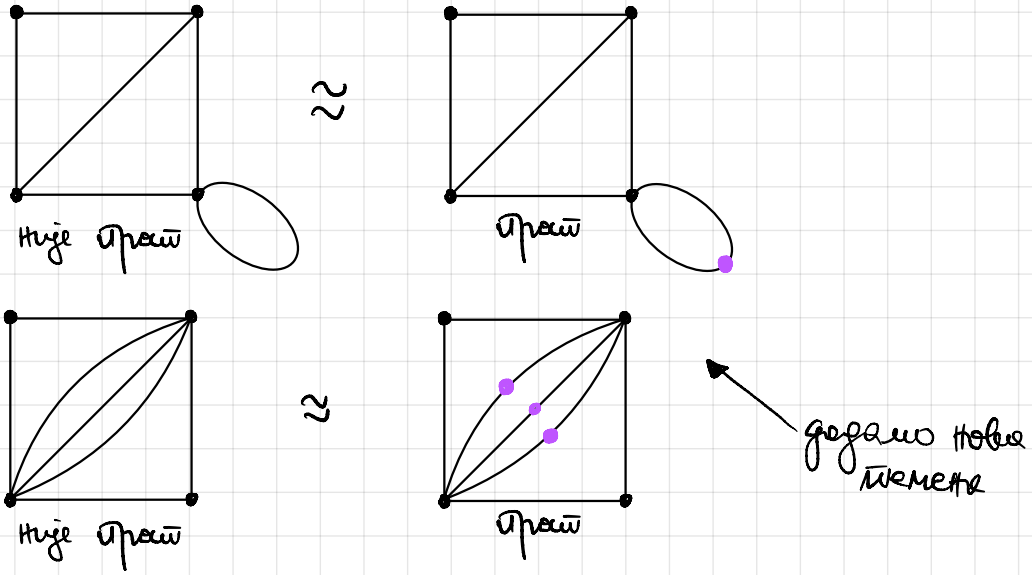
није прост (вишеструка ивица)



прост

**Лема** Сваки граф је хомеоморфан неком простом графу

**Пример**

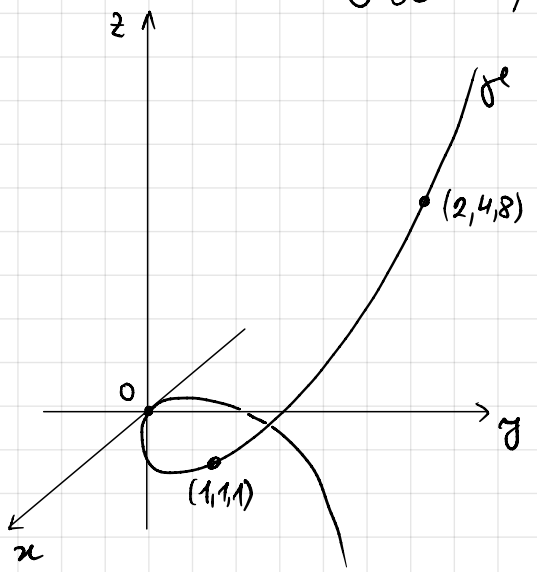



**Теорема** Сваки граф се може реализовати у $\mathbb{R}^3$.

*доказ* (скица): Нека је $G=(V,E,f)$ граф, $|V|=n$ и $V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$. За $i\in\{1,\dots,n\}$ узимамо тачке $(i,i^2,i^3)$, тј.

$(1,1,1)$, $(2,4,8)$, $(3,9,27)$, …, $(n,n^2,n^3)$.

Ове тачке припадају кривој $\gamma = \{(t, t^2, t^3) \mid t \in \mathbb{R}\}$




Нека је $\varphi: G \to \mathbb{R}^3$ дато са

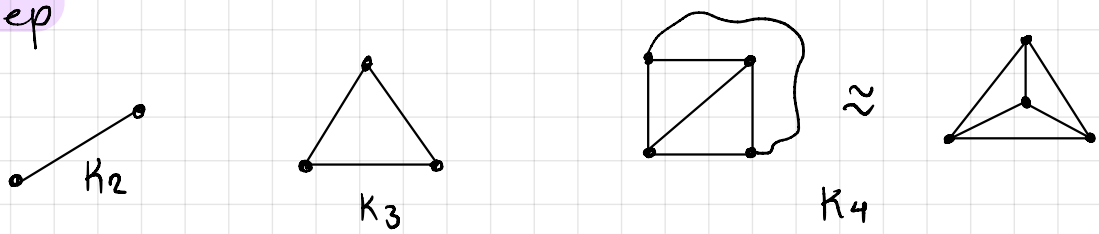
$$\varphi(v_i) := (i, i^2, i^3), \quad i = \overline{1,n}.$$

Може се показати да су сваке три тачке облика $(i, i^2, i^3)$ неколинеарне, а сваке четири некопланарне.

Ивицу $e \in E$ тд. је $f(e) = \{v_i, v_j\}$ сликамо у дуж од $(i, i^2, i^3)$ до $(j, j^2, j^3)$. $\varphi$ ће бити једно утапање, па се $G$ може утопити у $\mathbb{R}^3$. ▨

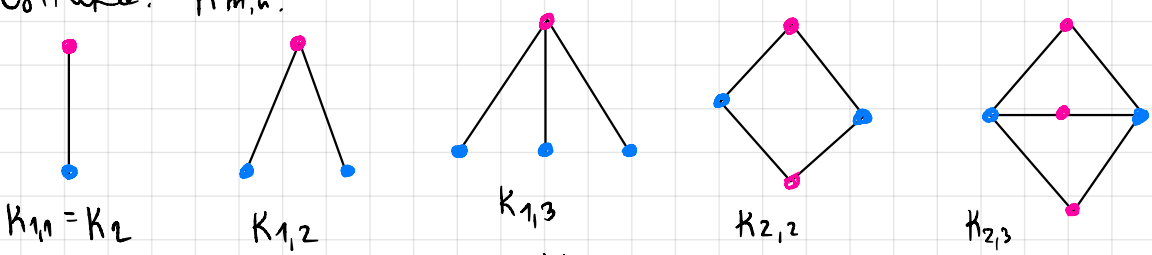
**деф.** Нека је $n \in \mathbb{N}$. Потпун (комплетан) граф над $n$ темена је граф коме су свака два темена спојена. Ознака: $K_n$.

**Пример**




**деф.** Нека је $m, n \in \mathbb{N}$. Бипартитни граф реда $(m, n)$ је граф са $m+n$ темена подељених у две групе са $m$ односно $n$ темена. Свако теме је спојено са сваким из друге групе, док темена унутар исте групе нису спојена. Ознака: $K_{m,n}$.

**Пример**

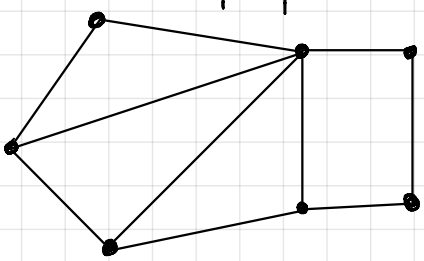


# Уникурсални графови

**дефиниција** Граф $G'=(V',E',f')$ је **подграф** од $G=(V,E,f)$ ако је $V'\subseteq V$, $E'\subseteq E$ и $f'=f|_{E'}$

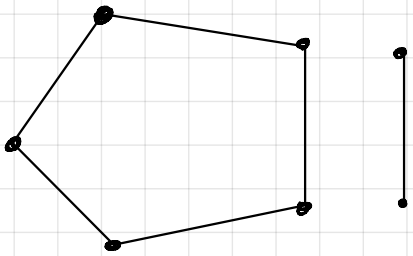
**Пример**

граф:



$G$

један подграф:



$G'$

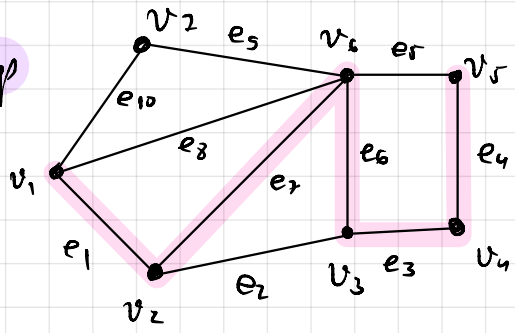
**дефиниција** Нека је $G=(V,E,f)$ граф. **Ланац** у $G$ чине (коначан) низ темена тог графа $(v_1,v_2,\dots,v_{n+1})$ и низ ивица $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ тј. $f(e_i)=\{v_i,v_{i+1}\}$, $i=\overline{1,n}$. Означава се уобичајено са $L$ и пишемо

$$L:\ v_1 \xrightarrow{e_1} v_2 \xrightarrow{e_2} v_3 \xrightarrow{e_3} \cdots \xrightarrow{e_{n-1}} v_n \xrightarrow{e_n} v_{n+1}$$

Кажемо да $L$ повезује темена $v_1$ и $v_{n+1}$ и пишемо $v_1 L v_{n+1}$.

Дужина ланца је $n$ (тј. бр. ивица).

**Пример**

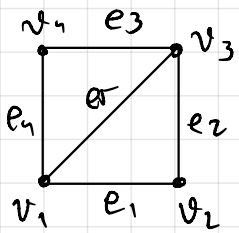



$v_1 L v_5$

$L: v_1 \xrightarrow{e_1} v_2 \xrightarrow{e_7} v_6 \xrightarrow{e_6} v_3 \xrightarrow{e_3} v_4 \xrightarrow{e_4} v_5$

**дефиниција** Ланац је **уникурсалан** ако су све ивице у њему различите

**Пример**



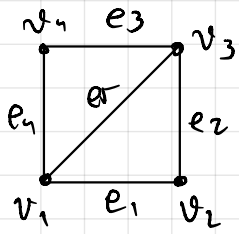

$L_1: v_2 \xrightarrow{e_1} v_1 \xrightarrow{e_4} v_4$ је уникурсалан

$L_2: v_2 \xrightarrow{e_1} v_1 \xrightarrow{e_5} v_3 \xrightarrow{e_2} v_2 \xrightarrow{e_1} v_1 \xrightarrow{e_4} v_4$

није уникурсалан

**деф.** Ланац је **елементаран** ако су сва темена у њему различита.

**Пример**




$L_1$: $v_2 \xrightarrow{e_1} v_1 \xrightarrow{e_4} v_4$ је елементаран

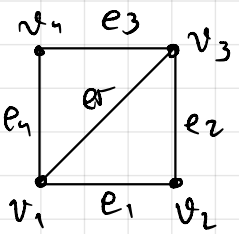
$L_2$: $v_2 \xrightarrow{e_1} v_1 \xrightarrow{e_5} v_3 \xrightarrow{e_2} v_2 \xrightarrow{e_1} v_1 \xrightarrow{e_4} v_4$

није елементаран.

Очигледно: елементаран $\Rightarrow$ једноставан

**деф.** Ланац $L$ је **циклус** (**контура**) ако су му сва темена различита осим прве и последње које су једнаке

**Пример**




$L$: $v_1 \xrightarrow{e_1} v_2 \xrightarrow{e_3} v_3 \xrightarrow{e_5} v_1$

је циклус

очигледно: $L \approx S^1$ ($S^1$ - кружница)

**деф.** Граф $G$ је **повезан** ако за свака два темена $v$ и $w$ у том графу постоји ланац од $v$ до $w$.

**Став** Нека је $G=(V,E,f)$ граф. Следећа тврђења су еквивалентна:

(1) $(\forall v,w \in V)(\exists L)\ v L w$

(2) $(\forall v,w \in V)(\exists L)\ v L w$, $L$ елементаран

(3) $G$ је тривијално повезан (као тополошки пр.)

(4) $G$ је повезан (као тополошки пр.)

Нека је $G=(V,E,f)$, $v\in V$ и

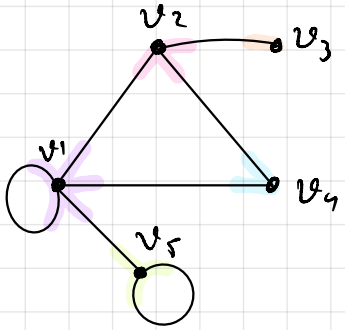
$E_v \overset{def}{=} \{e\in E \mid v\in f(e)\}$ - све ивице у темену $v$

$P_v \overset{def}{=} \{e\in E \mid f(e)=\{v\}\}$ - све петље у $v$

**деф.** Индекс (степен) темена $v$ у $G$ је

$$\operatorname{ind} v \overset{def}{=} |E_v| + |P_v|$$

**Пример**




$\operatorname{ind} v_1 = 5$

$\operatorname{ind} v_2 = 3$

$\operatorname{ind} v_3 = 1$

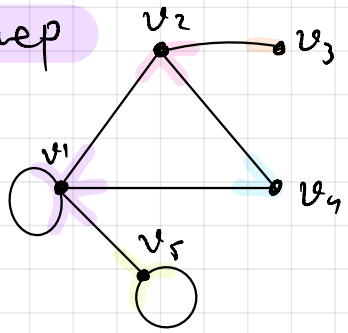
$\operatorname{ind} v_4 = 2$

$\operatorname{ind} v_5 = 3$

**Став** $\sum_{v\in V} \operatorname{ind} v = 2|E|$

*доказ* Ако је $f(e)=\{v,w\}$, онда се $e$ рачуна двапут, једном у $\operatorname{ind} v$, једном у $\operatorname{ind} w$. Ако је $f(e)=\{v\}$, тј. $e$ је петља, онда се $e$ опет рачуна двапут у $\operatorname{ind} v$. ☐

**Пример**




$$\sum_{i=1}^{5} \operatorname{ind}(v_i) = 5+3+1+2+3 = 14 = 2\cdot \underbrace{|E|}_{7}$$

**Став** Ако је $a_k(G)$ број темена у $v$ индекса $k$, онда

$$\sum_{v\in V} \operatorname{ind} v = a_1(G) + 2a_2(G) + 3a_3(G) + \cdots$$

**Став** У сваком графу број темена непарног индекса је паран.

доказ: $2|E| = a_1(G) + 2a_2(G) + 3a_3(G) + \cdots$

$= (a_1(G) + 3a_3(G) + 5a_5(G) + \cdots) + (2a_2(G) + 4a_4(G) + \cdots)$

$= (a_1(G) + a_3(G) + a_5(G) + \cdots) + 2(a_3(G) + 2a_5(G) + \cdots)$

$+ 2(a_2(G) + 2a_4(G) + \cdots)$

$$a_1(G) + a_3(G) + a_5(G) + \cdots = 2\left[(a_3(G) + 2a_5(G) + \cdots) + (a_2(G) + 2a_4(G) + \cdots) + |E|\right]$$

$\Rightarrow a_1(G) + a_3(G) + a_5(G) + \cdots$ је паран. ▨

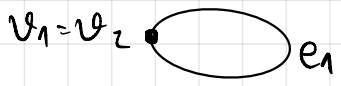
**Лема** Ако су у графу сва темена индекса бар 2, онда постоји циклус у том графу.

доказ: Нека је $v_1 \in V$ произвољно теме.

$$\operatorname{ind} v_1 \geq 2 \Rightarrow (\exists e_1 \in E)\ v_1 \in f(e_1)$$

(тј. $v_1$ је теме ивице $e_1$). Нека је $f(e_1) = \{v_1, v_2\}$.

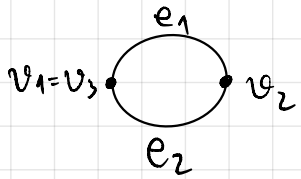
1° $v_1 = v_2 \Rightarrow e_1$ је петља, па и циклус

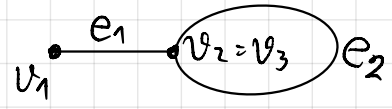



2° $v_1 \neq v_2$:

$$\operatorname{ind} v_2 \geq 2 \Rightarrow (\exists e_2 \in E)\ v_2 \in f(e_2)$$

и $f(e_2) = \{v_2, v_3\}$. Ако $v_3 \in \{v_1, v_2\}$, онда имамо циклус:

или 


или 

Ако $v_3 \notin \{v_1, v_2\}$ настављамо поступак:

$$v_1 \xrightarrow{e_1} v_2 \xrightarrow{e_2} v_3 \xrightarrow{e_3} \cdots \xrightarrow{e_{n-2}} v_{n-1} \xrightarrow{e_{n-1}} v_n$$

Како је $V$ коначан, овај поступак се мора завршити (тј. у неком тренутку морамо добити $v_n \in \{v_1, \dots, v_{n-1}\}$)

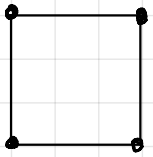
Нека је $v_n = v_i$, $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Онда имамо цикл:

$$v_i \xrightarrow{e_i} v_{i+1} \to \cdots \to v_{n-1} \xrightarrow{e_{n-1}} v_n = v_i \quad \blacksquare$$

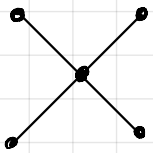
## Критеријум уникурсалности

Неформално: граф је уникурсалан ако се може нацртати једним потезом без подизања оловке са папира.

нпр:



јесте



није

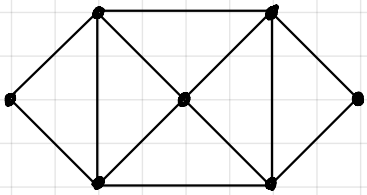
**деф.** Граф је уникурсалан ако у њему постоји уникурсалан ланац који га покрива (тј. у коме се појављују сва темена и све ивице графа.

Како је сваки ланац повезан, закључујемо да неповезани графови не могу бити уникурсални, па надаље подразумевамо да су сви графови повезани.

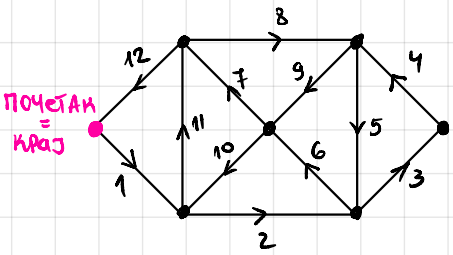
**Лема** Нека је $G=(V,E,f)$ повезан. Ако је $\deg v$ паран за свако $v \in V$, онда је $G$ уникурсалан. Притом, за свако $v \in V$ постоји уникурсалан ланац који повезује теме $v$ са самим собом и који покрива цео граф.

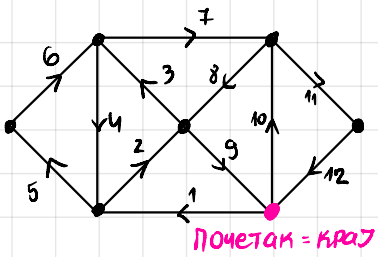
**Пример** Граф $G$ је уникурсалан (степени свих темена су парни)

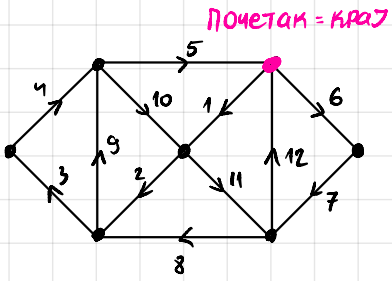
$G$:



различити „цртања једним потезом":




**Теорема** Повезан граф је уникурсалан ако и само ако има највише 2 темена непарног степена.

доказ: $\Rightarrow$: Нека је $G$ уникурсалан и $L: v \to \dots \to w$ уникурсалан ланац који га покрива.

Нека је $u \in V \setminus \{v,w\}$. Теме $u$ се појављује у ланцу $L$ $k$ пута ($k \geq 1$) и свако појављивање изгледа овако: $\dots \xrightarrow{\delta} u \xrightarrow{\varepsilon} \dots$

тј. за свако појављивање темена $u$, имамо 2 ивице ($\delta$ и $\varepsilon$), па је $\deg u = 2k$, тј. паран.

Дакле, једино $v$ и $w$ могу бити непарног степена.

$\Leftarrow$: Нека је $G$ граф са највише 2 темена непарног степена.

1° 0 темена непарног степена $\Rightarrow$ граф је уникурсалан на основу претходне леме

2° 1 теме непарног степена – ово је немогуће јер је број темена непарног степена у сваком графу паран.

3° 2 темена непарног степена $v$ и $w$

Спојимо $v$ и $w$ новом ивицом $\tilde{e}$. Добијени граф има сва темена парног степена, па је уникурсалан. Нека је $L$ уникурсалан ланац који га покрива и има почетак и крај у $v$.

3°1' $L$ је облика

$L: v \xrightarrow{\alpha_1} \dots \xrightarrow{\alpha_m} v \xrightarrow{\tilde{e}} w \xrightarrow{\beta_1} \dots \xrightarrow{\beta_n} v$

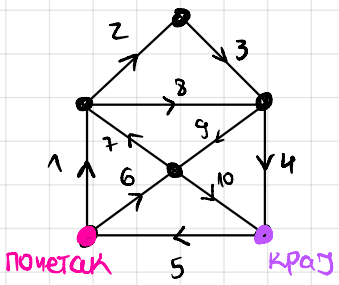
Тада је $L': w \xrightarrow{\beta_1} \dots \xrightarrow{\beta_n} v \xrightarrow{\alpha_1} \dots \xrightarrow{\alpha_m} v$ уникурсалан ланац који покрива $G$

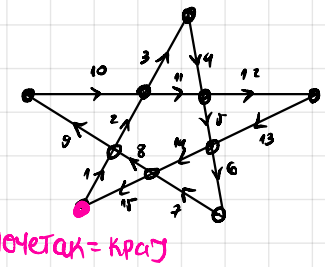
3°2' $L$ је облика

$L: v \xrightarrow{\gamma_1} \dots \xrightarrow{\gamma_k} w \xrightarrow{\tilde{e}} v \xrightarrow{\delta_1} \dots \xrightarrow{\delta_l} v$

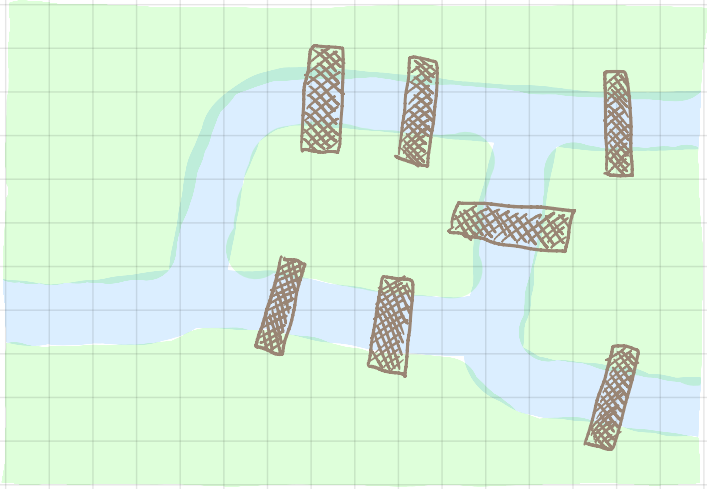
Тада је $L': v \xrightarrow{\delta_1} \dots \xrightarrow{\delta_l} v \xrightarrow{\gamma_1} \dots \xrightarrow{\gamma_k} w$ уникурсалан ланац који покрива $G$. ▨

Пример



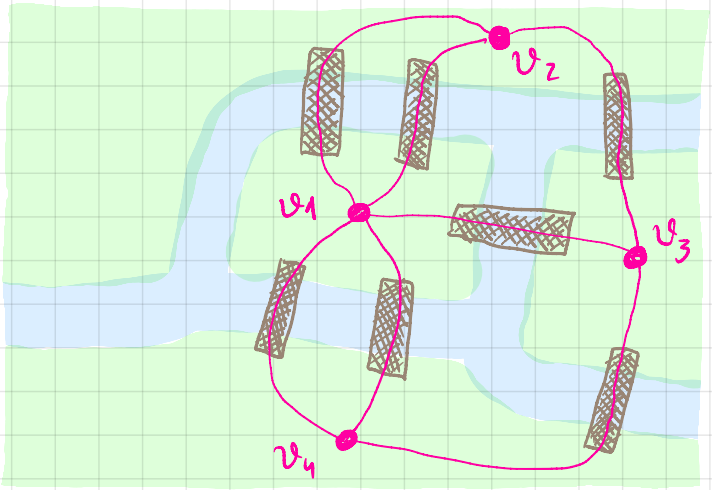



**Пример** Проблем 7 мостова у Кенигзбергу



Како прошетати кроз град тако да се сваки мост пређе само једном? Ојлер је доказао да је то задатак немогућ.

Натрављено граф: копна = темена, мостови = ивице




$\deg v_1 = 5$
$\deg v_2 = 3$
$\deg v_3 = 3$
$\deg v_4 = 3$

} имамо 4 темена непарног степена, па граф није уникурсалан

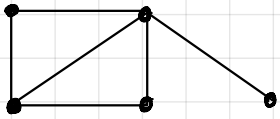
**Пример** $K_n$ је уникурсалан акко је $n$ непаран или $n=2$.

## Ојлерова карактеристика графа

**деф.** Нека је $G=(V,E,f)$ граф. Ојлерова карактеристика графа $G$ је $\chi(G) \overset{def}{=} |V| - |E|$ (тј. разлика броја темена и броја ивица).

**Пример** (1) $K_n$ има $n$ темена и $\binom{n}{2}$ ивица, па је

$$\chi(K_n) = n - \binom{n}{2}, \quad n \geq 2$$

(2) $G =$ 

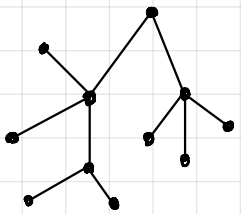
$$\chi(G) = 5 - 6 = -1$$

(3) $K_{m,n}$ има $m+n$ темена и $m \cdot n$ ивица

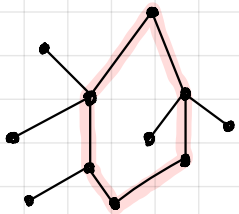
$$\chi(K_{m,n}) = m+n-mn$$

деф. Дрво је повезан граф без циклова.

**Пример**



јесте дрво



није дрво

**Став** Ако је $G$ дрво, онда је $\chi(G) = 1$.

*доказ*: Индукција по $|V|$.

база: $|V| = 1 \Rightarrow G = \bullet \Rightarrow \chi(G) = 1$

*хипотеза*: Нека за свако дрво тј. $|V| < n$ важи $\chi(G) = 1$

*инд. корак*: Нека је $G$ дрво са тачно $n$ темена. Како у $G$ нема циклова, на основу леме на стр. 48. постоји $v \in V$ тј. $\text{ind}\, v = 1$.



Нека је $e$ ивица која је крај $v$.

Избацимо из $G$ теме $v$ и ивицу $e$ и добијемо граф $G'$ који је дрво са $n-1$ темена, па је по м.и. $\chi(G') = 1$.

Коначно, $\chi(G) = |V| - |E| = (|V'|+1) - (|E'|+1) =$

$= |V'| - |E'| = \chi(G') = 1.$ ▨

**Став** Ако је $G$ повезан граф, онда је $\chi(G) \leq 1$.

*доказ* (скица): 1° $G$ дрво $\Rightarrow$ $\chi(G) = 1$ ✓

2° $G$ није дрво $\Rightarrow$ има циклове

Бришемо из $G$ ивице које праве циклове док не добијемо дрво $G'$.

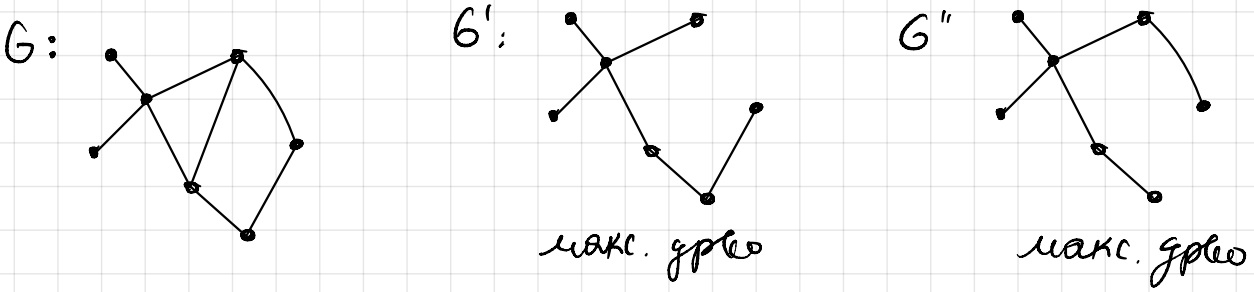
Онда је $|V| = |V'|$ и $|E| > |E'|$, па је

$$\chi(G) = |V| - |E| < |V'| - |E'| = \chi(G') = 1.$$ ▨

**Став** Ако је $G$ повезан граф, онда

$G$ је дрво $\Leftrightarrow \chi(G) = 1$.

**Пример** Максимално дрво у повезаном графу је подграф који је дрво и има исти број темена као полазни граф.




(макс. дрво није јединствено)

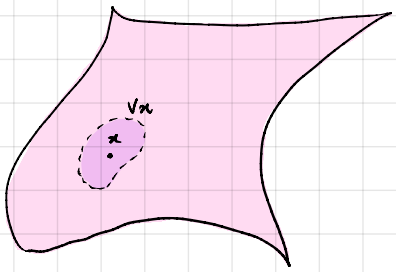
# Површи

**деф.** Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $X$ Хаусдорфов простор. Кажемо да је $X$ $n$-димензионална многострукост ако

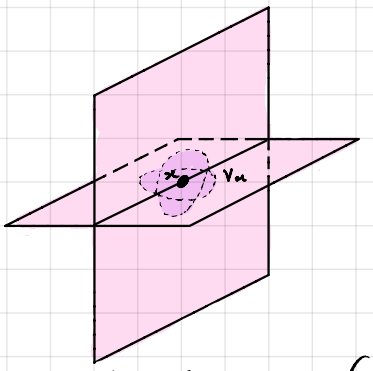
$$(\forall x \in X)(\exists V_x \in \mathcal{O}(x) \cap \mathcal{T}_X) \quad V_x \approx \operatorname{int} D^n.$$

Површ је многострукост димензије $n = 2$.

**Пример**



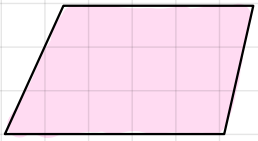

површ



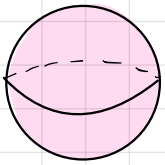

није површ ($V_x \not\approx$  )

Површ је локално „равна", нема самопресека.

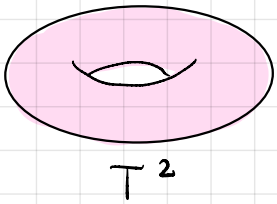
**Пример** Познате површи:



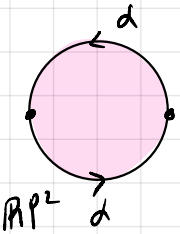
$\mathbb{R}^2$



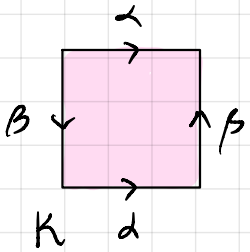
$S^2$



$T^2$




$\mathbb{RP}^2$

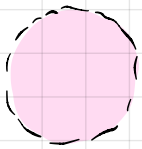



$K$

**Став** Ако су $X$ и $Y$ многострукости димензије $m$ односно $n$, онда је $X \times Y$ мног. димензије $m \times n$.

Означимо $\operatorname{int} D^n_+ \overset{def}{=} \{ x \in \operatorname{int} D^n \mid x_n \geq 0 \}$

Нпр.



$\operatorname{int} D^2$



$\operatorname{int} D^2_+$

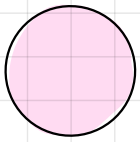
**деф** Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $X$ Хаусдорфов простор. Кажемо да је $X$ **$n$-димензионална многострукост са границом** ако

$$(\forall x \in X)(\exists V_x \in \mathcal{U}(x) \cap \mathcal{T}_X) \quad V_x \approx \operatorname{int} D^n \quad \vee \quad V_x \approx \operatorname{int} D^n_+$$

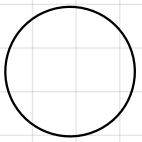
**Граница** (руб) многострукости је скуп свих тачака са околином $V_x \approx \operatorname{int} D^n_+$.

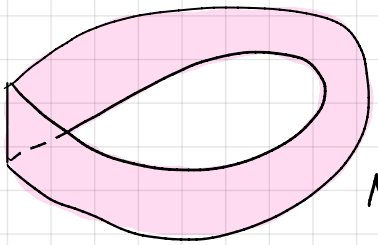
**Пример** $S^2, \mathbb{R}^2, T^2, \mathbb{R}P^2, K$ су површи без границе

$D^2$, $M$ су површи са границом

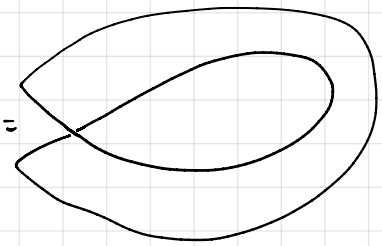


$D^2$

$\partial D^2 =$  $= S^1$



$M$

$\partial M =$  $\approx S^1$

**Пример** Граница многострукости и граница скупа у тополошком простору нису исто.

Нпр. $\partial S^2 = \phi$ - граница површи

$\partial S^2 = S^2$ - граница скупа $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$

**Став** Ако су $X$ и $Y$ $n$-дим. мног. са границом и $X \approx Y$, онда је и $\partial X \approx \partial Y$.

*доказ (скица):* $h : X \to Y$ хомеоморфизам

$\Rightarrow h|_{\partial X} : \partial X \to \partial Y$ је хомеоморфизам. ▨

**Пример** $C \not\approx M$

$C = S^1 \times [0,1] =$  $\Rightarrow \partial C =$  $= S^1 \sqcup S^1$

$\partial C \not\approx \partial M \approx S^1 \Rightarrow C \not\approx M.$

**Став** Ако су $X$ и $Y$ мног. дим. $m$ и $n$ са границом, онда је $X \times Y$ мног. са границом дим. $m+n$ и

$$\partial(X \times Y) = (\partial X \times Y) \cup (X \times \partial Y)$$

**Пример** $C = S^1 \times [0,1]$

$\partial S^1 = \phi, \quad \partial [0,1] = \{0,1\}$

$\Rightarrow \partial C = (\partial S^1 \times [0,1]) \cup (S^1 \times \partial [0,1]) = \phi \cup S^1 \times \{0,1\} = S^1 \sqcup S^1.$

**Дефиниција** Многострукост је **затворена** ако је компактна и без границе.

**Пример** $S^2, T^2, \mathbb{RP}^2, K$ су затворене

$\mathbb{R}^2$ није затворена (јер није компактна)

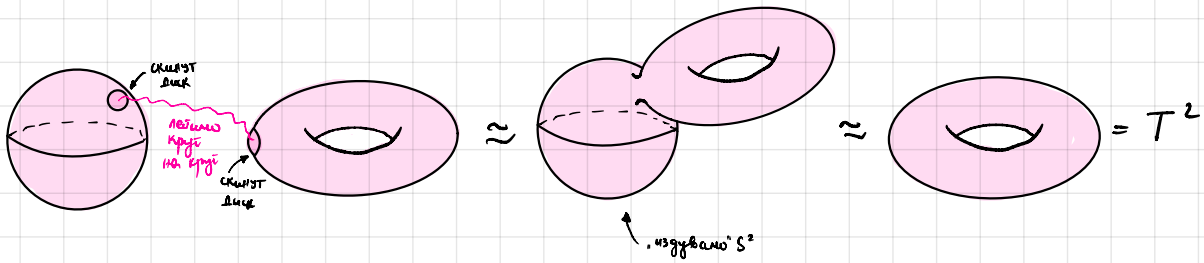
$M, C$ нису затворене (јер имају границу)

# Класификација затворених повезаних површи

За затворене повезане површи $X$ и $Y$ дефинишемо повезану сумбу $X$ и $Y$ ($X \# Y$) на следећи начин:

1. Са $X$ и $Y$ скинемо по мали отворен диск
2. Залепимо $X$ и $Y$ по хомеоморфизму граничних кружница скинутих дискова

**Пример**

$S^2 \# T^2 \approx$ 


$S^2$ је заправо неутрал за $\#$, тј. $S^2 \# X \approx X$.

Посматрамо 2 фамилије повезаних затворених површи.

**$M_g$ површи**, $g \in \mathbb{N}_0$

$M_0 \overset{def}{=} S^2$

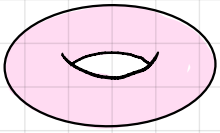
$M_1 \overset{def}{=} M_0 \# T^2 = S^2 \# T^2 \approx T^2$

$M_2 \overset{def}{=} M_1 \# T^2 \approx T^2 \# T^2$

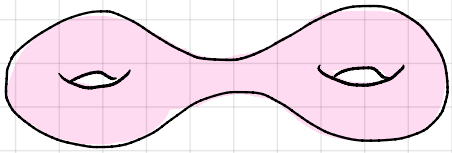
$\vdots$

$M_g \overset{def}{=} M_{g-1} \# T^2$

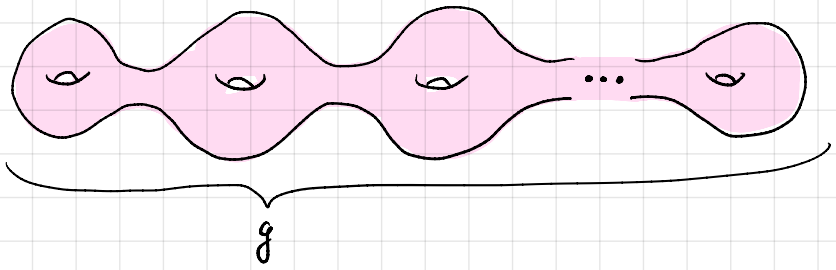
$M_1$ :



$M_2$ :

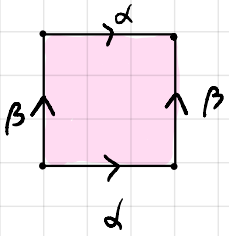


$M_g$ :

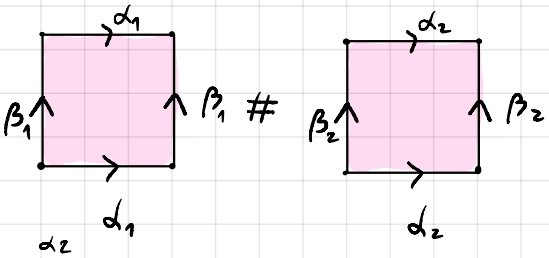



Видели смо раније комплексни модел за $M_1 = T^2$ у равни:

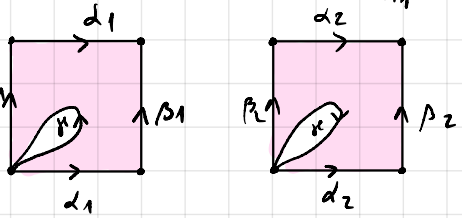
$M_1 =$



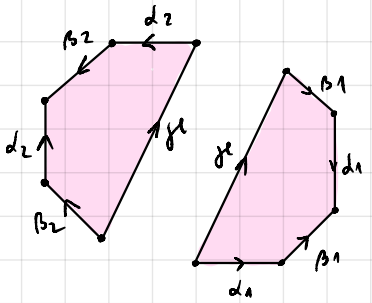

$M_2 = T^2 \# T^2 =$



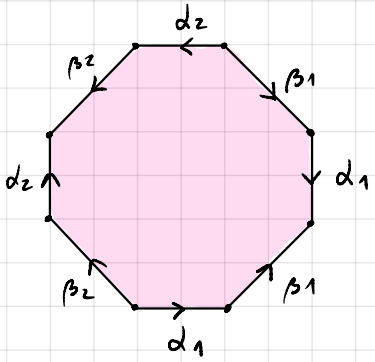

$=$




$=$

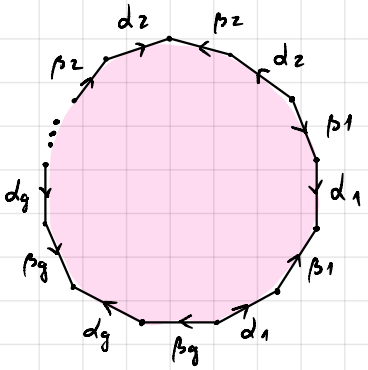



$\simeq$




И генерално имамо:

$M_g \simeq$



Другим речима, $M_g$ је $4g$-тоугао са рубном идентификацијом: $\alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \alpha_2 \beta_2 \alpha_2^{-1} \beta_2^{-1} \cdots \alpha_g \beta_g \alpha_g^{-1} \beta_g^{-1}$.
Приликом ове идентификације се сва темена овог $4g$-тоугла заправо идентификују.

**$N_h$ површи**, $h \in \mathbb{N}$

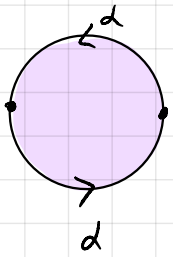
$$N_1 \overset{def}{=} \mathbb{R}P^2$$

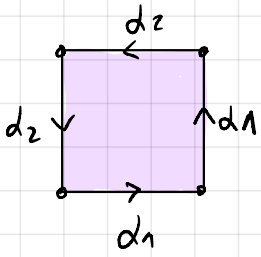
$$N_2 \overset{def}{=} N_1 \# \mathbb{R}P^2 \approx K$$

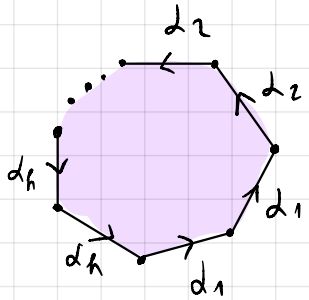
$$\vdots$$

$$N_h \overset{def}{=} N_{h-1} \# \mathbb{R}P^2$$

Површи $N_h$ не можемо да замислимо у $\mathbb{R}^3$ као $M_g$, већ их представљамо количничким моделима

$N_1 =$ 


$N_2 =$ 


$N_h =$ 


тј. $N_h$ је $2h$-тоугао са идентификацијом $\alpha_1^2 \alpha_2^2 \cdots \alpha_h^2$.
И овде се свих $2h$ темена идентификује.

Особине:

(1) површи $M_g$ су оријентабилне

(2) површи $N_h$ су неоријентабилне

(3) међу површима $M_g$ и $N_h$ нема хомеоморфних

**Теорема** [о класификацији повезаних затворених површи] Нека је $X$ повезана затворена површ. Тада

(1) $X$ оријентабилна $\Rightarrow (\exists g \in \mathbb{N}_0)\ X \approx M_g$,

(2) $X$ неоријентабилна $\Rightarrow (\exists h \in \mathbb{N})\ X \approx N_h$.

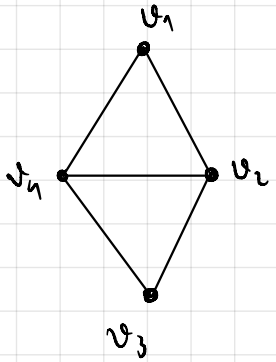
## Мапе на површима

У овом делу посматрамо повезане површи без границе.

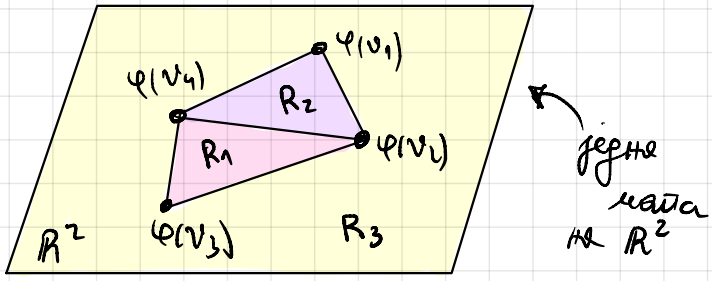
**деф.** Нека је $S$ површ. Уређење $\varphi: G \to S$, где је $G = (V, E, f)$ неки граф, називамо **мапом на површи** $S$. Тачке $\varphi(v)$, $v \in V$ су **темена** ове мапе, $\varphi(e)$, $e \in E$ су **ивице**, док су компоненте повезаности од $S \setminus \varphi(G)$ **региони** мапе.

**Пример**

$G$:

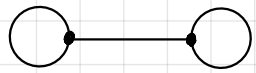



$S = \mathbb{R}^2$

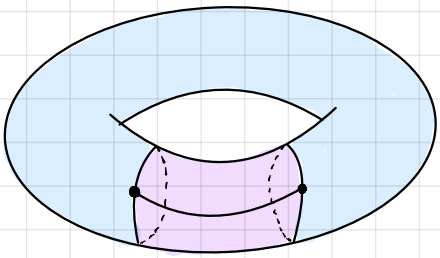



3 региона: $R_1, R_2, R_3$

**Пример** Мапа не зависи само од графа $G$ и површи $S$, већ и од уграђења. Граф $G$ можемо уградити у $S = T^2$ на 2 различита начина.

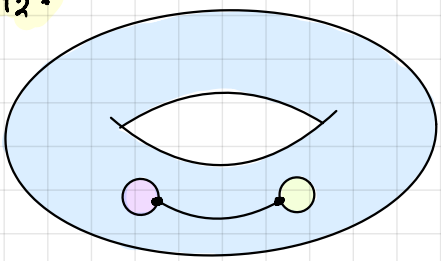
$G$: 

$\varphi_1$:



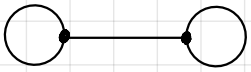
2 региона

$\varphi_2$:



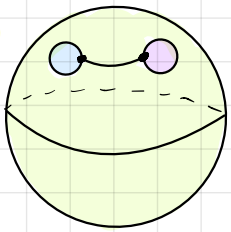
3 региона

**дефр.** Мапа је **регуларна** ако је свака њен регион хомеоморфан отвореном диску.

**Пример** $G =$  уграђено у сферу и торус.

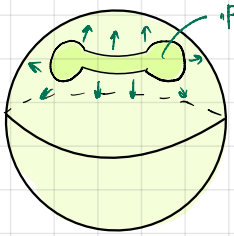
$S_1 = S^2$

$\varphi_1$:



региони:  $\approx \text{int } D^2$

 $\approx \text{int } D^2$

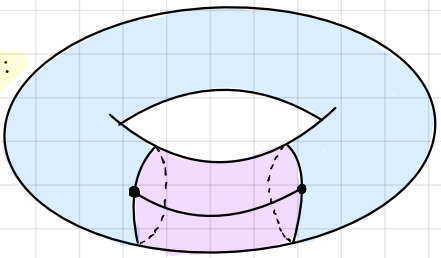


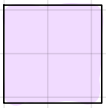

$\approx$  $\approx \text{int } D^2$

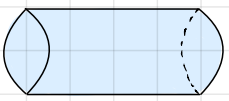
$\Rightarrow \varphi_1$ је регуларна

$S_2 = T^2$

$\varphi_2$:



региони:  $\approx$  $\approx \text{int } D^2$

 $\approx C \not\approx \text{int } D^2$

цилиндар

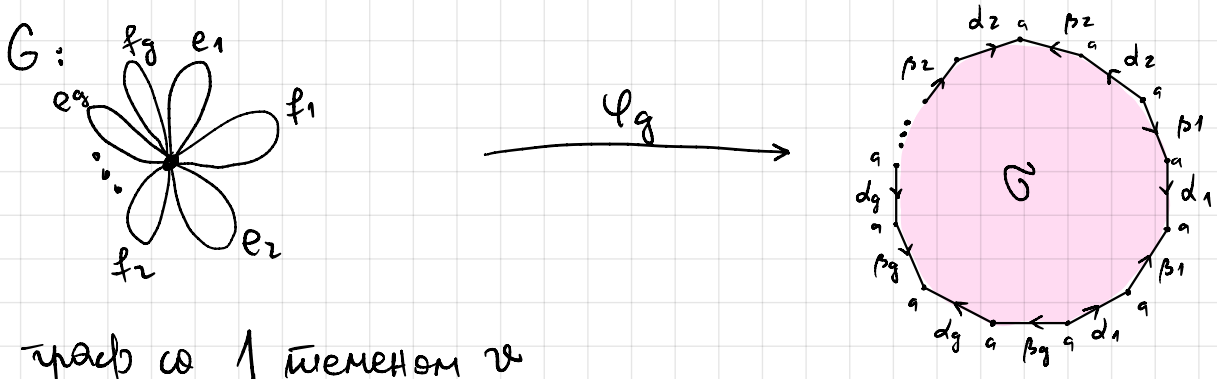
$\Rightarrow \varphi_2$ није регуларна

**Став** На свакој затвореној повезаној површи постоји регуларна мапа.

**доказ**: На основу теореме о класификацији знамо да су све затворене повезане површи облика или $M_g$, $g \in \mathbb{N}_0$ или $N_h$, $h \in \mathbb{N}$, па је довољно да конструишемо по једну регуларну мапу на свакој од њих.

**1° $M_0 = S^2$**: видели смо регуларну мапу у претходном примеру.

**2° $M_g$, $g \geq 1$**:

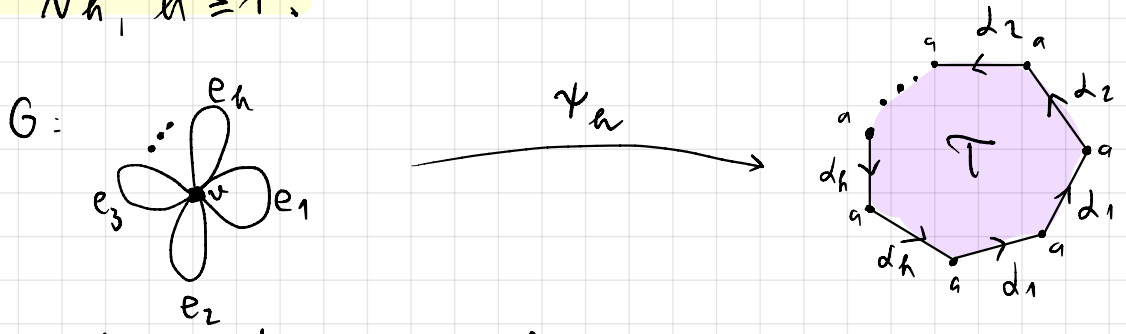



граф са 1 теменом $v$ и $2g$ ивица $e_1, f_1, \ldots, e_g, f_g$

$\varphi_g$ дефинишемо са: $\varphi_g(v) = a$, $\varphi_g(e_i) = \alpha_i$, $\varphi_g(f_i) = \beta_i$

Ова мапа има само 1 регион $G \approx \text{int}\, D^2$, па је регуларна

**3° $N_h$, $h \geq 1$**:




граф са 1 теменом $v$ и $h$ ивица $e_1, e_2, \ldots, e_h$

$\psi_h(v) = a$

$\psi_h(e_i) = \alpha_i$

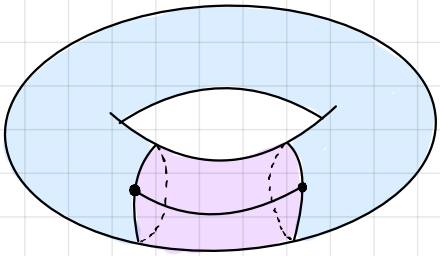
Поново имамо само 1 регион $\tau \simeq \operatorname{int} D^2$, тј. је и ова мапа регуларна. ▨

**деф.** Нека је $\varphi: G \to S$ мапа на површи $S$. Ако су $V$, $E$ и $R$ скупови темена, ивица и региона мапе $\varphi$, онда је **Ојлерова карактеристика мапе** $\varphi$ дата са

$$\chi(\varphi) = |V| - |E| + |R|.$$

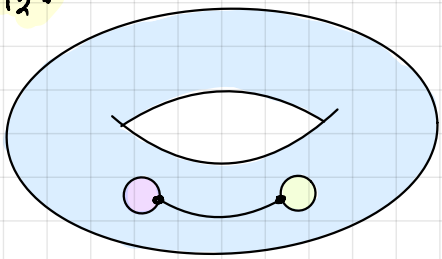
**Пример** Имали смо раније 2 мапе на $T^2$:

$\varphi_1$:



$$\chi(\varphi_1) = 2 - 3 + 2 = 1$$

$\varphi_2$:



$$\chi(\varphi_2) = 2 - 3 + 3 = 2$$

**Теорема** Ако су $\varphi_1: G_1 \to S$ и $\varphi_2: G_2 \to S$ две регуларне мапе на $S$, онда је

$$\chi(\varphi_1) = \chi(\varphi_2).$$

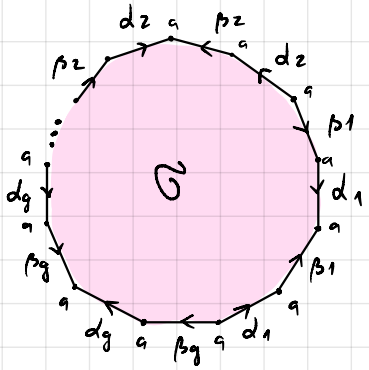
## Ојлерова карактеристика површи

**деф.** Нека је $S$ повезана затворена површ. **Ојлерова карактеристика површи** $S$ је

$$\chi(S) \overset{\text{def}}{=} \chi(\varphi),$$

где је $\varphi$ било која регуларна мапа на $S$.

$M_g$:



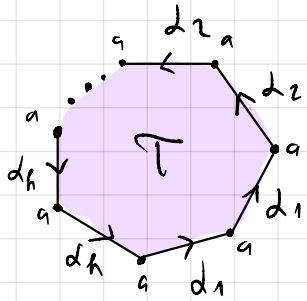

1 теме: a

2g ивици: $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_g, \beta_g$

1 регион: G

$\Rightarrow \quad \chi(M_g) = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g$

$N_h$:




1 теме: a

h ивици: $\alpha_1, \ldots, \alpha_h$

1 регион: T

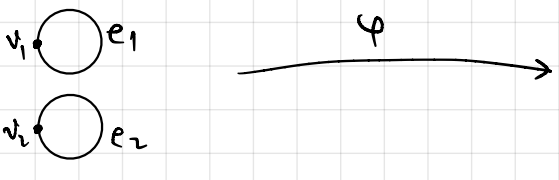
$\Rightarrow \quad \chi(N_h) = 1 - h + 1 = 2 - h$

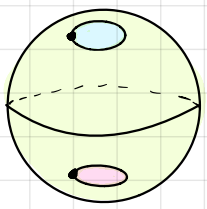
**Став** Ако је $\varphi: G \to S$ мапа на $S$, онда

$$\chi(\varphi) \geq \chi(S).$$

**Пример** $\chi(S^2) = \chi(M_0) = 2 - 2 \cdot 0 = 2$

G:



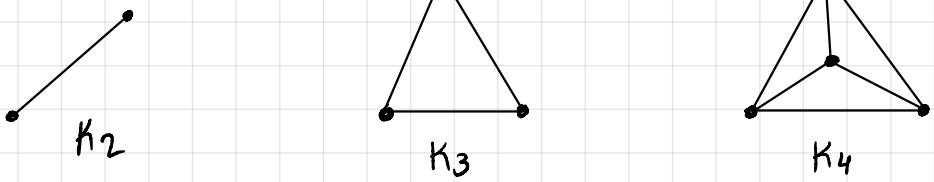
2 темена
2 ивице
3 региона

$\Rightarrow \chi(\varphi) = 2 - 2 + 3 = 3 > \chi(S^2).$

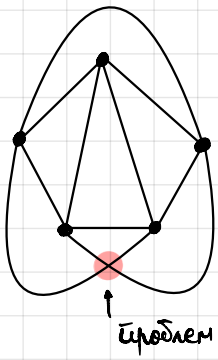
# Планарни графови

**дефр.** Граф $G$ је **планаран** ако се може реализовати у $\mathbb{R}^2$, тј. ако постоји утапање (тј. непрекидна инјекција) $\varphi: G \to \mathbb{R}^2$.

**Пример** $K_2$, $K_3$ и $K_4$ јесу планарни (тј. могу се нацртати у равни без самопресека)




$K_5$ није планаран (ни $K_n$, $n \geq 6$)




**Пример** $K_{1,n}$ и $K_{2,n}$ су планарни



**Став** (1) Планаран граф се може реализовати на свакој површи.

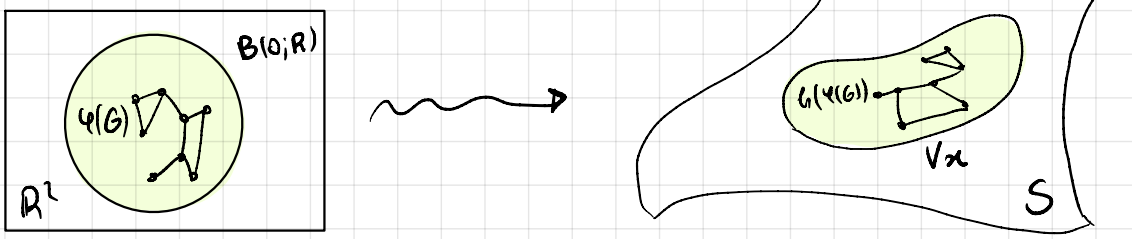
(2) Граф је планаран ако и само ако се може реализовати на $S^2$.

*доказ* (скица) (1) Нека је $S$ површ и $x \in S$. По дефиницији постоји околина $V_x$ тачке $x$ тј. $V_x \approx \text{int } D^2$.

Нека је $G$ планаран и $\varphi: G \to \mathbb{R}^2$ утапање.

$G$ је компактан, па је и $\varphi(G)$ компактан, па и ограничен $\Rightarrow$ постоји $B(0;R)$ тј. $\varphi(G) \subseteq B(0;R) \approx \text{int } D^2$

Нека је $h: B(0;R) \to V_x$ хомеоморфизам, онда је $h \circ \varphi$ утапање $G$ у $S$:




(2) $\Rightarrow$: директно из (1)

$\Leftarrow$: Нека је $\varphi: G \to S^2$ утапање

Може се показати да $\varphi$ није „на", тј.

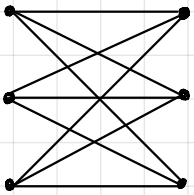
$(\exists y \in S^2)\ y \notin \varphi(G)$

$\Rightarrow$ добијамо $\varphi: G \to S^2 \setminus \{y\} \overset{h}{\approx} \mathbb{R}^2$

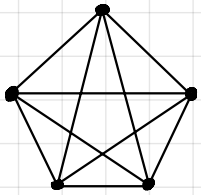
$\Rightarrow$ $h \circ \varphi$ је утапање $G$ у $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ $G$ је планаран. ▨

**Теорема** Графови $K_5$ и $K_{3,3}$ нису планарни.



$K_{3,3}$



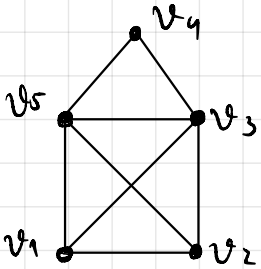
$K_5$

**Последица** Сваки граф који има подграф хомеоморфан са $K_{3,3}$ или $K_5$ није планаран.

Штавише, важи и обрнуто:

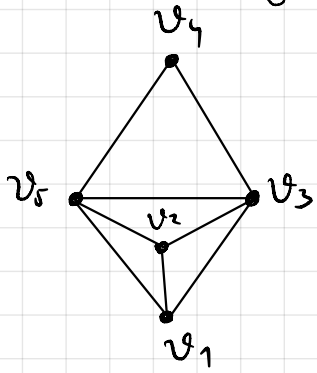
**Теорема** Граф је планаран ако и само ако нема подграф хомеоморфан са $K_{3,3}$ или $K_5$.

**Пример**




јесте планаран јер не садржи ни $K_5$ ни $K_{3,3}$

једна реализација у $\mathbb{R}^2$:

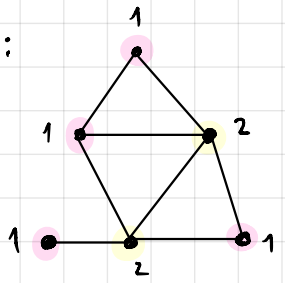


# Хроматски број графа, мапе и површи

**деф.** Бојење графа $G=(V,E,f)$ је било која функција $c: V \to \mathbb{N}$ ($c(v)$ - боја темена $v$). Ако је $|c(V)|=d$, кажемо да је $c$ бојење графа $G$ са $d$ боја.
Бојење $c$ је правилно ако су свака два суседна темена обојена различитим бојама.

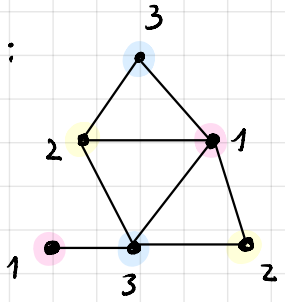
**Пример**

$G$:




неправилно бојење

$G$:




правилно бојење

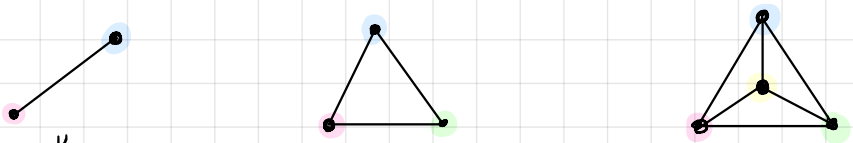
**деф.** Хроматски број графа $G$ је најмање $d \in \mathbb{N}$ тд. се $G$ може правилно обојити са $d$ боја. Прецизније,

$$col(G) \overset{def}{=} \min\{d \in \mathbb{N} \mid G \text{ се може обојити правилно са } d \text{ боја}\}$$

Сваки граф можемо правилно обојити са $|V|$ боја (свако теме обојимо другом бојом), па је $col(G) \leq |V|$.

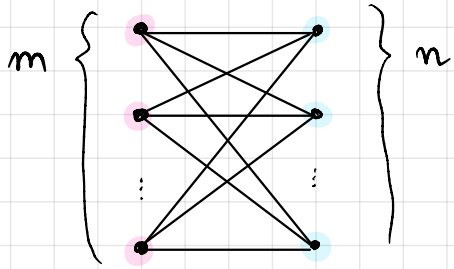
**Пример** $col(K_n) = n$

У $K_n$ су свака два темена спојена, па свако теме мора бити друге боје.

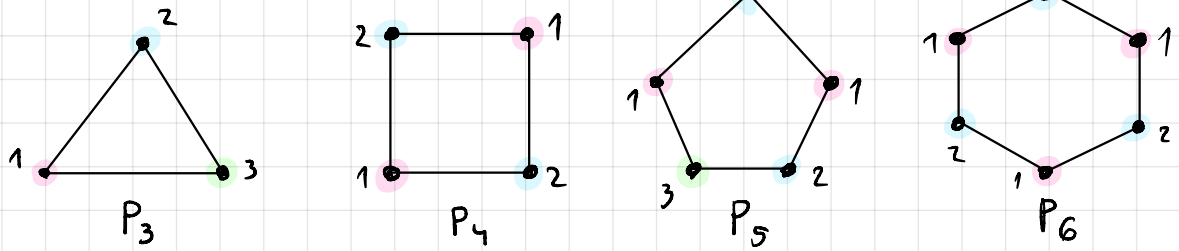


$K_2$ $K_3$ $K_4$

**Пример** $col(K_{m,n}) = 2$




**Пример** $P_n$ = $n$-тоугао




Примећујемо $col(P_n) = \begin{cases} 2, & n \text{ парно} \\ 3, & n \text{ непарно} \end{cases}$

**Став** Ако је $G'$ подграф од $G$, онда

$$col(G') \leq col(G)$$

Овај став користимо на следећи начин:

- налазимо у $G$ подграф $G'$ за који знамо $col(G')$
- закључимо $col(G) \geq col(G')$

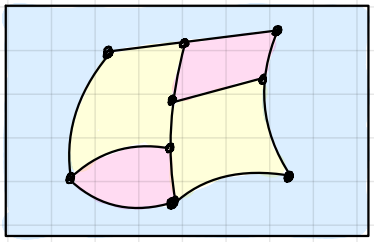
Нпр. ако у $G$ имамо троугао, онда је $col(G) \geq 3$.

**дефр.** **Бојење мапе** $\varphi: G \to S$ је било која функција $C: R \to \mathbb{N}$ (где је $R$ скуп свих региона ове мапе). Ако је $|C(R)| = d$, кажемо да је $C$ **бојење мапе помоћу** $d$ **боја**. **Бојење** $C$ је **правилно** ако су свака два суседна региона обојена различитим бојама (а региони су суседни ако имају

заједничку ивицу.

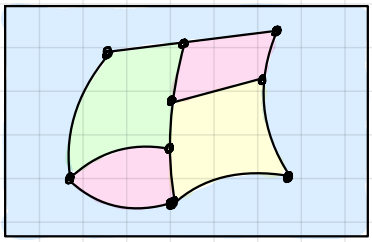
**Пример** $\varphi: G \to \mathbb{R}$ мапа у равни

$\varphi$



неправилно бојење

$\varphi$



правилно бојење

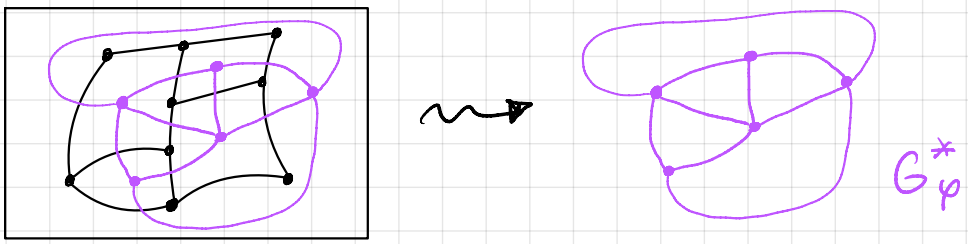
**деф.** Хроматски број мапе је најмањи број $d$ помоћу којег се мапа може правилно обојити, тј.

$$\mathrm{col}(\varphi) \overset{\text{деф}}{=} \min\{ d \in \mathbb{N} \mid \varphi \text{ се може обојити правилно са } d \text{ боја} \}$$

**деф.** Мапи $\varphi: G \to S$ придружујемо дуални граф $G_\varphi^*$:

- темена од $G_\varphi^*$ има колико и региона у $\varphi$
- два темена су суседна ако су одговарајући региони суседни.

**Пример** $\varphi$



$G_\varphi^*$

Приметимо да је бојење мапе $\varphi$ еквивалентно бојењу дуалног графа. Претходно имамо следећи став.

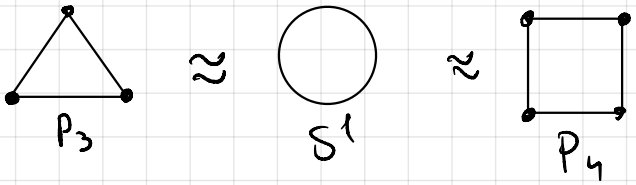
**Став** $\mathrm{col}(\varphi) = \mathrm{col}(G_\varphi^*)$.

**деф.** Нека је $S$ површ. **Хроматски број површи** $S$ је најмањи број $d \in \mathbb{N}$ тд. се <u>свака</u> мапа $\varphi : G \to S$ може правилно обојити са $d$ (или мање) боја.

**Став** Нека је $S$ површ. Тада $\mathrm{col}(S)$ постоји ако и само ако је $\{\mathrm{col}(\varphi) \mid \varphi \text{ мапа на } S\}$ ограничен одозго.
Притом
$$\mathrm{col}(S) = \max\{\mathrm{col}(\varphi) \mid \varphi \text{ мапа на } S\}$$

**Став** Ако су $S_1$ и $S_2$ површи и $S_1 \approx S_2$, онда
$$\mathrm{col}(S_1) = \mathrm{col}(S_2).$$

**Пример** Претходни став не важи за графове:




али $\quad 3 = \mathrm{col}(P_3) \neq \mathrm{col}(P_4) = 2.$

**Теорема** $\mathrm{col}(\mathbb{R}^2) = 4$ (тј. свака мапа у равни се може правилно обојити са 4 или мање боја).

**деф.** **Хивудов број** повезане затворене површи $S$ је
$$H(S) \overset{\text{def}}{=} \left[\frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi(S)}}{2}\right]$$

**Теорема** (1) Ако је $K$ Клајнова боца, онда $\mathrm{col}(K) = 6$.
(2) Ако је $S \neq K$ повезана затворена површ, онда
$$\mathrm{col}(S) = H(S).$$

Пример $H(M_g) = \left[\frac{7 + \sqrt{49 - 24\,\chi(M_g)}}{2}\right] = \left[\frac{7 + \sqrt{49 - 24(2-2g)}}{2}\right] =$

$$= \left[\frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2}\right]$$

$$H(N_h) = \left[\frac{7 + \sqrt{49 - 24\,\chi(N_h)}}{2}\right] = \left[\frac{7 + \sqrt{49 - 24(2-h)}}{2}\right] = \left[\frac{7 + \sqrt{1 + 24h}}{2}\right]$$

$$col(S^2) = col(M_0) = H(M_0) = 4$$

$$col(T^2) = col(M_1) = H(M_1) = 7$$

$$col(RP^2) = col(N_1) = H(N_1) = 6$$

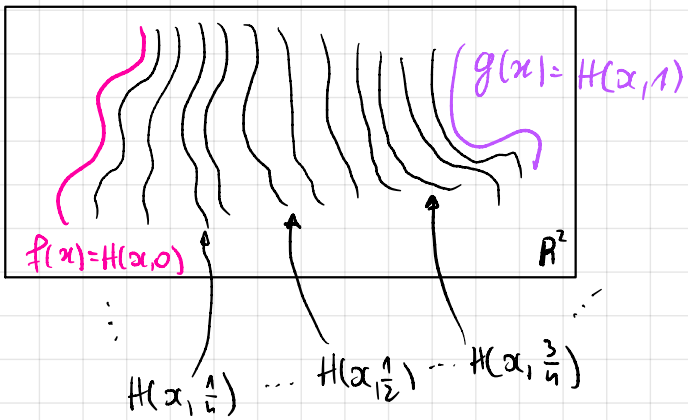
# Хомотопија

**деф.** Нека су $f, g: X \to Y$ непр. пресликавања. Кажемо да је $f$ **хомотопно** са $g$ ако постоји непр. пресликавање $H: X \times I \to Y$ ($\text{где је } I = [0,1]$) тј.

$$H(x,0) = f(x) \text{ и } H(x,1) = g(x),$$

за свако $x \in X$. Пресликавање $H$ називамо **хомотопијом** између $f$ и $g$ и пишемо $f \simeq g$ или $H: f \simeq g$.

**Пример** $H$ је „непрекидна трансформација $f$ у $g$". То се најбоље види кад су $f$ и $g$ путеви.
Нпр. $f, g: I \to \mathbb{R}^2$ ($\text{тј. } X = I,\ Y = \mathbb{R}^2$) и $H: f \simeq g$, тј. $H: I \times I \to \mathbb{R}^2$.




Означимо са $C(X,Y)$ скуп свих непрекидних функција из $X$ у $Y$.
**Став** $\simeq$ је релација еквиваленције на $C(X,Y)$.
**доказ**: (Р) За $f: X \to Y$ нека је $H(x,t) := f(x)$. Тада $H: f \simeq f$
(С) Нека је $H: f \simeq g$. Дефинишемо $F: X \times I \to Y$ са

$$F(x,t) = H(x, 1-t).$$

$$\left.\begin{aligned} F(x,0) &= H(x,1) = g(x) \\ F(x,1) &= H(x,0) = f(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow g \simeq f$$

(T) Нека је $H: f \simeq g$ и $F: g \simeq h$, $f, g, h: X \to Y$. Дефинишемо $G: X \times I \to Y$ са

$$G(x,t) = \begin{cases} H(x, 2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ F(x, 2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Тада $G: f \simeq h$ ▨

**Став** Нека су $f, g: X \to Y$ непр. и $f \simeq g$.

(1) Ако је $\varphi: Y \to Z$ непр., онда $\varphi \circ f \simeq \varphi \circ g$.

(2) Ако је $\psi: W \to X$ непр., онда $f \circ \psi \simeq g \circ \psi$.

доказ: (1) $H: f \simeq g \Rightarrow \varphi \circ H: \varphi \circ f \simeq \varphi \circ g$

(2) $H: f \simeq g \Rightarrow$ дефинишемо $G: W \times I \to Y$ са

$G(w,t) = H(\psi(w), t) \Rightarrow G: f \circ \psi \simeq g \circ \psi$. ▨

**Пример** Ако је $n \in \mathbb{N}$ и $K \subseteq \mathbb{R}^n$ конвексан и $f, g: X \to K$ непр. онда $f \simeq g$. Специјално за $K = \mathbb{R}^n$,

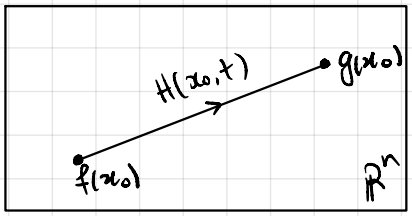
$$f, g: X \to \mathbb{R}^n \text{ непр.} \Rightarrow f \simeq g.$$

У овом случају хомотопију $H: f \simeq g$ можемо дефинисати на следећи начин: $H: X \times I \to \mathbb{R}^n$ дато са

$$H(x,t) := (1-t) f(x) + t g(x)$$

$H$ је непр. и $H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$

Дакле, кад фиксирамо $x_0 \in X$, $H(x_0, t)$, $t \in I$ буде дуж од $f(x_0)$ до $g(x_0)$.



**Пример** Ако је $Y \subseteq \mathbb{R}$ и $f, g : X \to Y$ непр. за хомотопију не можемо увек узети $H : X \times I \to Y$ дато са

$$H(x,t) := (1-t)f(x) + t\,g(x).$$

У чему је проблем? $H$ јесте непр., $H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$, али $(1-t)f(x) + t\,g(x)$ не мора припадати $Y$. Због тога нам је потребно да је $Y$ конвексан у претходном примеру.

**деф.** Нека су $f, g : X \to Y$ непр. и $A \subseteq X$. Кажемо да је $f$ хомотопно са $g$ релативно $A$ (пишемо $f \simeq g \ (\mathrm{rel}\, A)$) ако постоји непр. $H : X \times I \to Y$ тј.

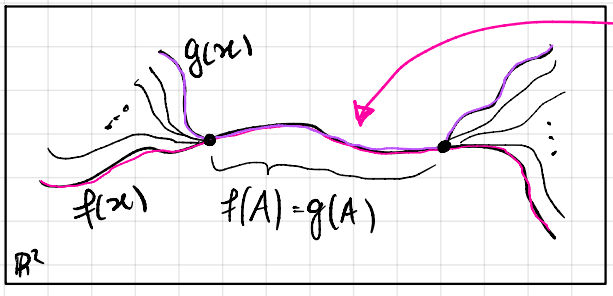
$$H(x,0) = f(x), \quad x \in X$$

$$H(x,1) = g(x), \quad x \in X$$

$$H(a,t) = f(a) = g(a), \quad a \in A,\ t \in I$$

Другим речима, $f \simeq g \ (\mathrm{rel}\, A)$ ако је $f \simeq g$ и при тој хомотопији се слике од $A$ „не помере".

**Пример** $f, g : I \to \mathbb{R}^2$, $A = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$, $H : f \simeq g \ (\mathrm{rel}\, A)$




Слике од $A$ је фиксиране за свако $t$, тј. $H(a,t) = f(a) = g(a)$, $t \in I$, $a \in A$

**Став** $\simeq (\mathrm{rel}\, A)$ је рел. екв.

**Став** (1) $f \simeq g \ (\mathrm{rel}\, A) \Rightarrow \varphi \circ f \simeq \varphi \circ g \ (\mathrm{rel}\, A)$

(2) $\psi : W \to X$ и $B \subseteq W$ тј. $\psi(B) \subseteq A$, онда

$$f \simeq g \ (\mathrm{rel}\, A) \Rightarrow f \circ \psi \simeq g \circ \psi \ (\mathrm{rel}\, B)$$

## Хомотопски тривијална пресликавања

**деф.** Константно пресликавање $X \to Y$ које све слика у $y \in Y$ означавамо са $c_y : X \to Y$, тј. $c_y(x) = y$, за свако $x \in X$

**деф.** Пресликавање $f : X \to Y$ је **хомотопски тривијално** ако постоји $y \in Y$ тј. $f \simeq c_y$. Пишемо $f \simeq const$.

**Пример** Ако је $f : X \to \mathbb{R}^n$, онда $f \simeq const$.
Заиста, нека је $y \in \mathbb{R}^n$ и $c_y : X \to \mathbb{R}^n$ дато са $c_y(x) = y$, $\forall x$.
Дефинишемо $H : X \times I \to \mathbb{R}^n$ са

$$H(x,t) := (1-t)f(x) + ty$$

$H$ је непр. и $H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = y = c_y(x)$, тј је $H : f \simeq c_y$.

**Став** Константна пресликавања $c_{y_1}, c_{y_2} : X \to Y$ су хомотопна ако и само ако постоји пут од $y_1$ до $y_2$.

*доказ:* $\Rightarrow$: Нека је $H : c_{y_1} \simeq c_{y_2}$, тј. $H : X \times I \to Y$ непр. и

$$H(x,0) = c_{y_1}(x) = y_1, \quad H(x,1) = c_{y_2}(x) = y_2.$$

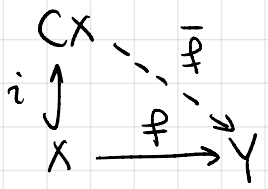
Нека је $x_0 \in X$ произвољно и $u : I \to Y$ дато са $u(t) = H(x_0, t)$.
Тада је $u$ пут од $y_1$ до $y_2$.
$\Leftarrow$: Нека је $u : I \to Y$ пут од $y_1$ до $y_2$, тј. $u$ је непр. и $u(0) = y_1$, $u(1) = y_2$. Дефинишемо $H : X \times I \to Y$ са

$$H(x,t) = u(t).$$

$\Rightarrow H : c_{y_1} \simeq c_{y_2}$. ▨

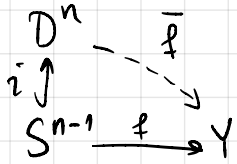
**Теорема** Нека је $f: X \to Y$ нетр. Пресликавање $f$ је хомотопски тривијално ако и само ако се може проширити на конус $CX$, тј. ако постоји $\bar{f}: CX \to Y$ нетр. тј.

$$(\forall x \in X)\ \bar{f}(x) = f(x).$$




Другим речима, ако комутира дијаграм:

Специјално, за $X = S^{n-1}$ је $CX = D^n$, па дијаграм изгледа овако:




## Хомотопска еквиваленција простора

**дефр.** Кажемо да су топ. простори $X$ и $Y$ **хомотопски еквиваленти** ако постоје $\varphi: X \to Y$ и $\psi: Y \to X$ нетр. тј. $\varphi \circ \psi \simeq 1_Y$ и $\psi \circ \varphi \simeq 1_X$. Пишемо $X \simeq Y$

Очигледно $X \approx Y \Rightarrow X \simeq Y$.

**Став** $\simeq$ је рел. екв. на скупу свих тополошких пр.

**доказ**: (Р) узмемо $\varphi = \psi = 1_X$

(С) $X \simeq Y \iff X \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} Y$, $\varphi\circ\psi \simeq 1_Y$, $\psi\circ\varphi \simeq 1_X \iff Y \simeq X$

(Т) $X \simeq Y$ и $Y \simeq Z$

$$\Rightarrow X \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} Y \underset{\tau}{\overset{\sigma}{\rightleftarrows}} Z \text{ и } \varphi\circ\psi \simeq 1_Y,\ \psi\circ\varphi \simeq 1_X,\ \sigma\circ\tau \simeq 1_Z,\ \tau\circ\sigma \simeq 1_Y$$

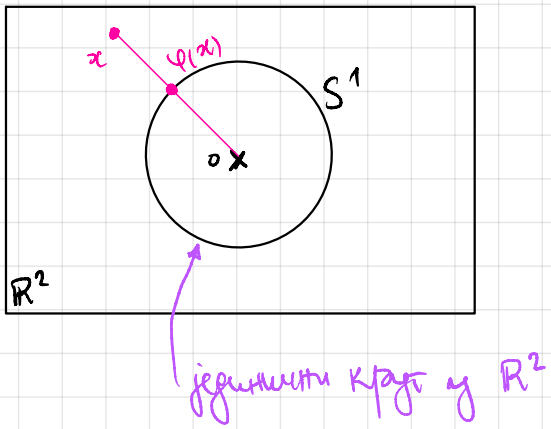
$$\Rightarrow X \underset{\psi\circ\tau}{\overset{\sigma\circ\varphi}{\rightleftarrows}} Z \qquad (\sigma\circ\varphi)\circ(\psi\circ\tau) = \sigma\circ\underbrace{(\varphi\circ\psi)}_{\simeq 1_Y}\circ\tau \simeq \sigma\circ\tau \simeq 1_Z$$

и слично $(\psi\circ\tau)\circ(\sigma\circ\varphi) \simeq 1_X \Rightarrow X \simeq Z$. ∎

**Пример** $\mathbb{R}^n \setminus * \simeq S^{n-1}$ ($*$ = било која тачка у $\mathbb{R}^{n-1}$)

Нека је $n=2$ ($n \geq 3$ се слично показује)

Буд. нпр. је $*=0$, тј. показујемо $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \simeq S^1$




Дефинишемо пресликавања

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} S^1$$

$$\varphi(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{x}{\|x\|}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

$$\psi(y) \overset{\text{def}}{=} y, \quad y \in S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$(\varphi \circ \psi)(y) = \varphi(\psi(y)) = \varphi(y) = \frac{y}{\|y\|} = y = 1_{S^1}(y) \quad (y \in S^1, \text{ тј. је } \|y\| = 1)$$

$$(\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x)) = \psi\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{x}{\|x\|}$$

Нека је $H : (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times I \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ дато са

$$H(x,t) = (1-t) \cdot (\psi \circ \varphi)(x) + t x = (1-t) \frac{x}{\|x\|} + t x$$

$H$ је непр. и добро деф. јер су тачке $(1-t)\frac{x}{\|x\|} + tx$, $t \in I$ елементи дужи од $\frac{x}{\|x\|}$ до $x$, а та дуж не пролази кроз $0$, па заиста $H(x,t) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Такође,

$$H(x,0) = (\psi \circ \varphi)(x)$$

$$H(x,1) = x = 1_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}(x)$$

Коначно, $H : \psi \circ \varphi \simeq 1_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}$ и $\varphi \circ \psi = 1_{S^1}$ (па је и $\varphi \circ \psi \simeq 1_{S^1}$)

$$\Rightarrow \quad \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \simeq S^1.$$

# Контрактибилни простори

**деф.** Кажемо да је $X$ **контрактибилан** ако је $X \simeq *$.
($*$ = топ. пр. који се састоји од само једне тачке)

**Пример** (1) $K \subseteq \mathbb{R}^n$ конвексан $\Rightarrow$ $K \simeq *$

(2) $D^n \simeq *$ (диск димензије $n$), $n \geq 1$

(3) $\mathbb{R}^n \simeq *$, $n \geq 1$

(4) $S^n \not\simeq *$, $n \geq 0$

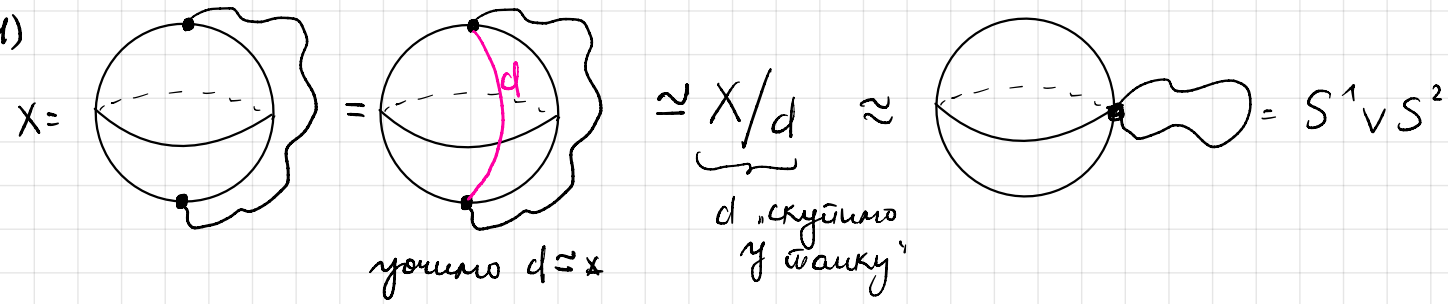
**Став** Ако је $X$ топ. пр. и $A \subseteq X$ тп. пар $(X, A)$ задовољава својство продужења хомотопије и ако је $A \simeq *$, онда $X \simeq X/A$.

**Коментар** Иако дефинишемо својство продужења хомотопије, сви простори са којима радимо ће имати то својство, па само памтимо:

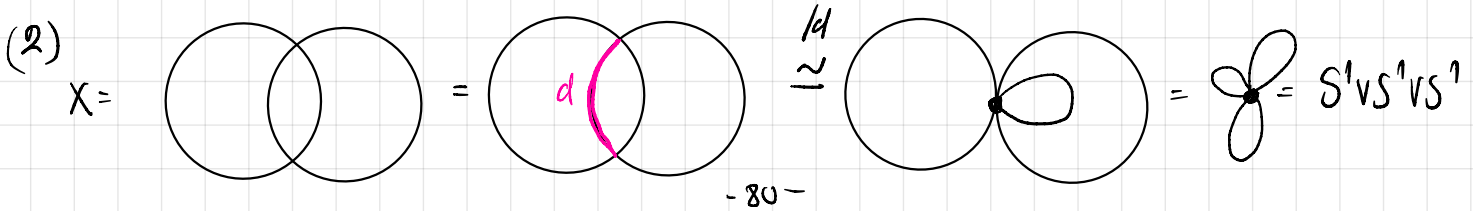
$$A \simeq * \Rightarrow X \simeq X/A$$

**Пример** Претходни став користимо често за $A = D^1 =$ дуж и $A = D^2 =$ диск

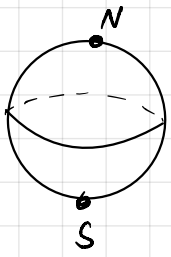
(1)




(2)



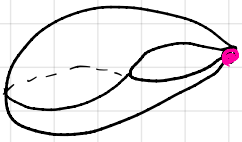
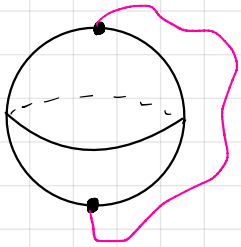
(3) $X = S^2/_{N\sim S}$ – на сфери идентификујемо северни и јужни пол.

$X =$ 

$/_{N\sim S}$ $\approx$ 

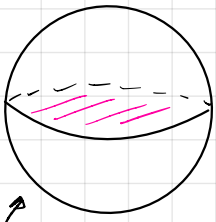
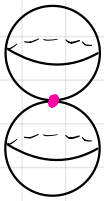
Став користимо на два начина:

- $D^1$ и $D^2$ скупљамо у $*$
- $*$ ширимо до $D^1$ или $D^2$

$X \approx$  $\simeq$  $\simeq S^1 \vee S^2$

пример (1)

Простор $X$ се зове уштинута сфера.

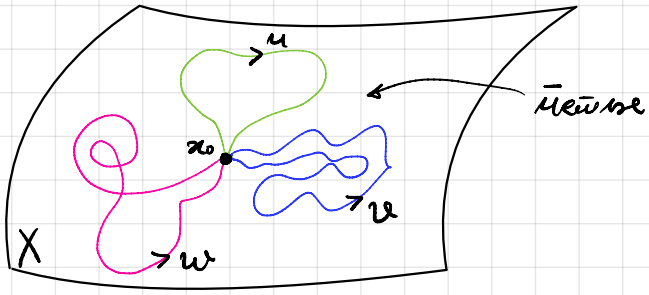
(4) $X =$  $\overset{/D^2}{\simeq}$  $\approx S^2 \vee S^2$

сфера са диском по средини

# Фундаментална група

Нека је $X$ топ. пр. и $x_0 \in X$ фиксирана (базна) тачка. Пар $(X, x_0)$ називамо топ. простором са базном тачком.

**деф.** **Петља** у $(X, x_0)$ је пут $u: I \to X$ ($u$ је непр.) са истим почетком и крајем, тј. $u(0) = u(1) = x_0$.




Означимо са $P(X, x_0)$ скуп свих петљи у $x_0$, тј.

$$P(X, x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{u: I \to X \mid u \text{ непр.}, \ u(0) = u(1) = x_0\}$$

**деф.** **Надовезивање** петље $v \in P(X, x_0)$ на $u \in P(X, x_0)$ добијамо петљу $u \cdot v \in P(X, x_0)$ дату са

$$(u \cdot v)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} u(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ v(1-2t), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

**Став** Нека су $u, u', v, v' \in P(X, x_0)$ тј.

$$u \simeq u' \ (\text{rel } \{0,1\}), \quad v \simeq v' \ (\text{rel } \{0,1\}).$$

Тада $u \cdot v \simeq u' \cdot v' \ (\text{rel } \{0,1\})$.

Релација $\simeq (\text{rel}\ \{0,1\})$ јесте једна рел. екв. на $P(X,x_0)$, па дефинишемо скуп класа ове релације:

$$\Pi_1(X,x_0) \overset{def}{=} P(X,x_0)/_{\simeq (\text{rel}\ \{0,1\})}$$

Елементи скупа $\Pi_1(X,x_0)$ су класе $[u]$, где је $u \in P(X,x_0)$ и притом

$$[u]=[v] \iff u \simeq v\ (\text{rel}\ \{0,1\})$$

На $\Pi_1(X,x_0)$ дефинишемо операцију $*$:

$$[u]*[v] \overset{def}{=} [u \cdot v]$$

Претходни став нам гарантује да је ова операција добро дефинисана.

За $u \in P(X,x_0)$ дефинишимо $u^{-1}: P(X,x_0)$ као петљу која има исту путању као $u$, али обрнут смер, тј.

$$u^{-1}(t) \overset{def}{=} u(1-t),\ t \in I$$

и нека је $[u]^{-1} \overset{def}{=} [u^{-1}]$.

Коначно, означимо са $c_{x_0} \in P(X,x_0)$ константну петљу, тј. $c_{x_0}(t)=x_0,\ t \in I$.

**Теорема** Скуп $\Pi_1(X,x_0)$ јесте група у односу на операцију $*$. Њен неутрал је $[c_{x_0}]$, а инверз елемента $[u]$ је $[u]^{-1}$.

Дакле у $\Pi_1(X,x_0)$ важи:

(1) $([u]*[v])*[w] = [u]*([v]*[w])$ (асоцијативност)

(2) $[c_{x_0}]*[u] = [u]*[c_{x_0}] = [u]$ (неутрал)

(3) $[u]*[u]^{-1} = [u]^{-1}*[u] = [c_{x_0}]$ (инверз)

**деф.** Групу $\pi_1(X, x_0)$ називамо **фундаменталном групом** простора $X$ са базном тачком $x_0$.

**Пример** (1) $X = \{x_0\}$, онда је $\pi_1(X, x_0) = 0$
(овде 0 представља тривијалну групу која има само један елемент - неутрал)

(2) $X = \mathbb{R}^n$, $x_0 = 0$. Видели смо раније да су свака два пресликавања са кодоменом $\mathbb{R}^n$ хомотопна, па

$u, v \in P(\mathbb{R}^n, 0) \Rightarrow u \simeq v \Rightarrow [u] = [v]$

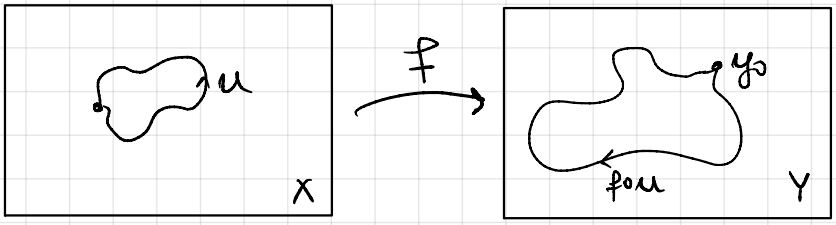
$\Rightarrow$ сви ел. у $\pi_1(\mathbb{R}^n, 0)$ су иста, тј. $\pi_1(\mathbb{R}^n, 0) = 0$

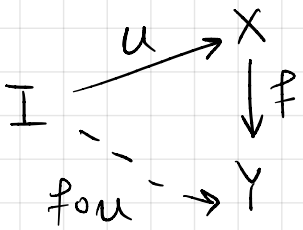
**Коментар** Постоје и више хомотопске групе $\pi_n(X, x_0)$, $n \geq 1$, па отуд ознака $\pi_1$.

## Хомоморфизам индукован пресликавањем

Нека су $(X, x_0)$ и $(Y, y_0)$ топ. пр. и $f: X \to Y$ нпр. тј. $f(x_0) = y_0$. (Пишемо и $f: (X, x_0) \to (Y, y_0)$)

**деф.** Пресликавање $f_*: \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ индуковано са $f$ дато је са $f_*([u]) \overset{def}{=} [f \circ u]$, $[u] \in \pi_1(X, x_0)$.



**Став** $f_*$ је хомоморфизам група.

*доказ:* Желимо да покажемо да $f_*$ чува операцију, тј. да

$$f_*([u]*[v]) = f_*([u]) * f_*([v])$$

$f_*([u]*[v]) = f_*([u\cdot v]) = [f\circ(u\cdot v)]$,

$f_*([u]) * f_*([v]) = [f\circ u] * [f\circ v] = [(f\circ u)\cdot(f\circ v)]$,

али важи да је $f\circ(u\cdot v) = (f\circ u)\cdot(f\circ v)$, одакле једнакост директно следи. ▨

**Пример** Нека је $C:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ константно пресликавање, тј.

$$C(x) = y_0, \quad x\in X$$

Тада је $C_*$ тривијалан хомо. Заиста, за $[u]\in\pi_1(X,x_0)$ имамо

$$C_*([u]) = [C\circ u] = [C_{y_0}] = 0$$ ← 0 је ознака за неутрал у $\pi_1(X,x_0)$

($C_{y_0}: I\to Y$ константна петља у $y_0$)

Користимо и ознаку $C_* = 0$ (овде 0 значи тривијалан хомоморфизам).

**Пример** Ако је $1_X:(X,x_0)\to(X,x_0)$ идентичко пресликавање (тј. $1_X(x)=x$, $x\in X$) онда је $(1_X)_* = 1_{\pi_1(X,x_0)}$.

Заиста, за $[u]\in\pi_1(X,x_0)$ је

$$(1_X)_*([u]) = [1_X\circ u] = [u] = 1_{\pi_1(X,x_0)}([u]).$$

**Став** $(g\circ f)_* = g_*\circ f_*$

**Став** Нека су $f,g:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ и $f\simeq g$ $(\mathrm{rel}\,\{x_0\})$.

Онда је $f_* = g_*$.

**дефр.** Простори $(X, x_0)$ и $(Y, y_0)$ су **хомотопски еквивалентни** као простори са базном тачком ако постоје

$$\varphi : (X, x_0) \to (Y, y_0) \quad \text{и} \quad \psi : (Y, y_0) \to (X, x_0)$$

тј. $\varphi \circ \psi \simeq 1_Y \ (\text{rel } \{y_0\})$ и $\psi \circ \varphi \simeq 1_X \ (\text{rel } \{x_0\})$.

Пишемо $(X, x_0) \simeq (Y, y_0)$.

**Став** Ако је $(X, x_0) \simeq (Y, y_0)$, онда је $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0)$.

доказ:

$$(X, x_0) \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} (Y, y_0)$$

Имамо $\varphi \circ \psi \simeq 1_Y \ (\text{rel } \{y_0\})$ и $\psi \circ \varphi \simeq 1_X \ (\text{rel } \{x_0\})$, па је на основу претходног става

$$(\varphi \circ \psi)_* = 1_{\pi_1(Y, y_0)} \quad \text{и} \quad (\psi \circ \varphi)_* = 1_{\pi_1(X, x_0)}$$

тј. $\varphi_* \circ \psi_* = 1_{\pi_1(Y, y_0)}$ и $\psi_* \circ \varphi_* = 1_{\pi_1(X, x_0)}$,

па су $\varphi_*$ и $\psi_*$ једно другом инверзни, тј.

$\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ је изоморфизам. ▨

**Теорема** Ако је $X$ путно повезан, онда за све $x_0, x_1 \in X$ важи $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$.

Дакле, кад је $X$ путно повезан, $\pi_1$ не зависи од избора базне тачке, па уместо $\pi_1(X, x_0)$ пишемо краће $\pi_1(X)$.

**Теорема** Ако је $f: X \to Y$ хомотопски тривијално, онда је за свако $x \in X$, $f_*: \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, f(x))$ тривијалан хомоморфизам.

**Теорема** Ако је $f: X \to Y$ хомотопска еквиваленција, онда је за свако $x \in X$, $f_*: \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, f(x))$ изоморфизам.

**Последица** Нека су $X$ и $Y$ путно повезани. Тада

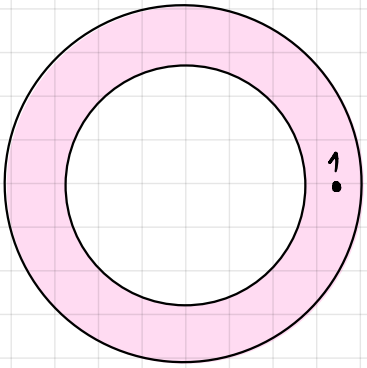
$$X \simeq Y \Rightarrow \pi_1(X) \cong \pi_1(Y).$$

**Пример** Видели смо раније да су $\mathbb{R}^n$, $D^n$, $\operatorname{int} D^n$ контрактибилни, тј. $\mathbb{R}^n \simeq *$, $D^n \simeq *$, $\operatorname{int} D^n \simeq *$ и $\pi_1(*) = 0$ ($*$ је топ. пр. са једном тачком), па на основу претходне последице имамо $\pi_1(\mathbb{R}^n) = 0$, $\pi_1(D^n) = 0$, $\pi_1(\operatorname{int} D^n) = 0$.

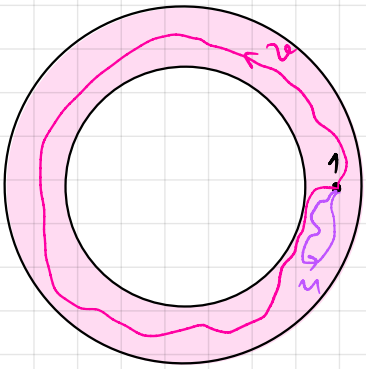
**Теорема** $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$

Доказ претходне теореме је захтевнији, али интуиција лежи у једноставној идеји.
Нека је $1 \in S^1$ basna тачка и замислимо $S^1$ као „задебљану" кружницу, тј. као кружни прстен

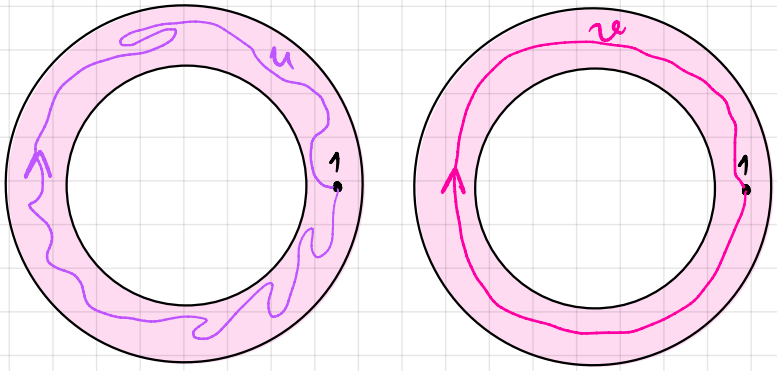
$S^1$:



Елементи $\pi_1(S^1)$ су класе петљи у $S^1$:




Петље у $S^1$ се разликују по томе колико су пута намотане (и у ком смеру) око $S^1$. Ако су две петље намотане исти број пута, онда су оне међусобно хомотопне, нпр. $u \simeq v$ јер су обе намотане једном у истом смеру (као „затегнуто" и добијамо $v$, тј. $u \simeq v$), тј. обе ове петље представљају исти ел. у $\pi_1(S^1)$, тј. $[u] = [v]$. Због тога има смисла дефинисати:




$$\varphi : \pi_1(S^1) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$[u] \longmapsto k_u$$

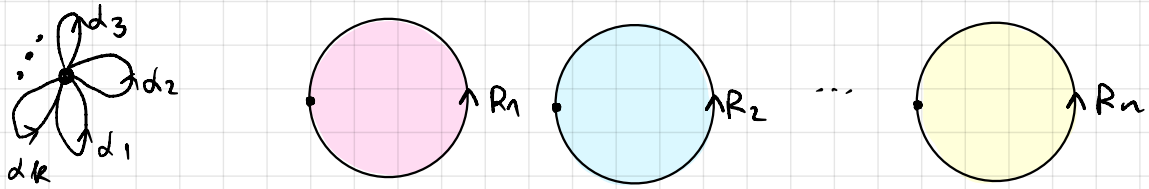
где је $k_u$ број намотаја петље $u$ око $S^1$ ($k_u > 0$ ако је смер намотавања позитиван, а $k_u < 0$, ако је смер негативан). И обрнуто, сваком $k \in \mathbb{Z}$ одговара $[u]$, где је $u$ петља намотана $k$ пута око $S^1$.

Пресликавање $\varphi$ је управо један изоморфизам, тј. је

$$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}.$$

# Рачунање неких фундаменталних група

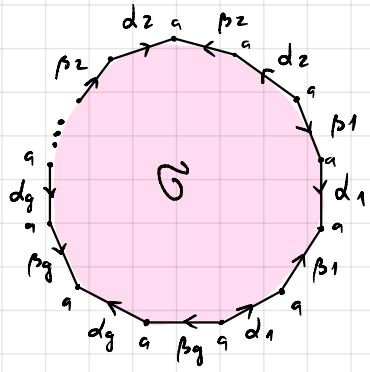
**Теорема** Нека је $X$ тополошки простор добијен лепљењем букета $k$ кружница за границе $n$ дискова по „пресликању" $R_1, R_2, \dots, R_n$, тј. $X$ има модел

$X$: 


онда је

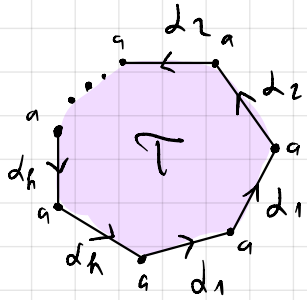
$$\pi_1(X) \cong \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \mid R_1 = 1, R_2 = 1, \dots, R_n = 1 \rangle$$

(Видети у белешкама са вежби представљање група преко генератора и релација стр. 69-74)

**$M_g$:** 

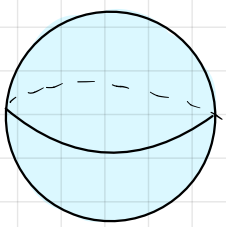

$$\pi_1(M_g) \cong \langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g \mid \alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1} \cdots \alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1} = 1 \rangle$$

спец. $\pi_1(T^2) \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta = \beta\alpha \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

**$N_k$:** 

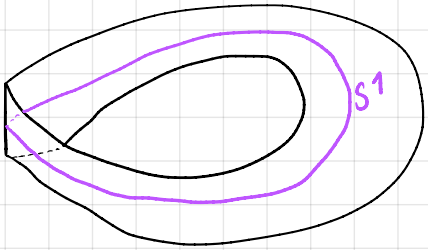

$$\pi_1(N_k) \cong \langle \alpha_1, \dots, \alpha_k \mid \alpha_1^2\alpha_2^2 \cdots \alpha_k^2 = 1 \rangle$$

спец. $\pi_1(\mathbb{RP}^2) \cong \langle \alpha \mid \alpha^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$

**$S^n$:** 

$$\pi_1(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 1 \\ 0, & n \geq 2 \end{cases}$$

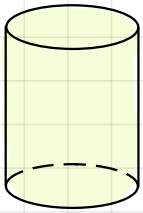
M:




Мебиусова трака је хомотопски еквивалентна централној кружници $M \simeq S^1$

$\Rightarrow \pi_1(M) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

C:



$C \simeq S^1 \Rightarrow \pi_1(C) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$

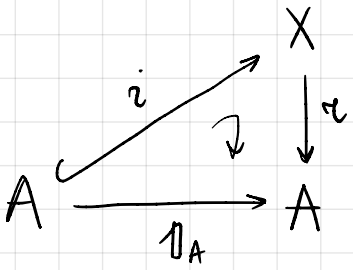
# Ретракти и својство фиксне тачке

**деф** Нека је $X$ топ. пр. и $A \subseteq X$. Кажемо да је $A$ **ретракт** од $X$ ако постоји нетр. $r: X \to A$ тј. $r|_A = 1\!\!1_A$, тј.

$$(\forall a \in A)\ r(a) = a.$$

Пресликавање $r$ називамо **ретракцијом**.

Ако постоји ретракција $r: X \to A$ можемо је видети као део следеће комутативног дијаграма:

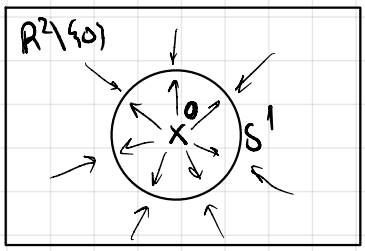



тј. $r \circ i = 1\!\!1_A$, где је $i: A \to A$ инклузија.

**Пример** (1) $X$ т. пр., $x_0 \in X$ произвољно и $A = \{x_0\}$

$\Rightarrow$ $A$ је ретракт од $X$. Ретракција је константно пресликавање $r = C_{x_0}: X \to \{x_0\}$ $\quad (C_{x_0}(x) := x_0)$

(2) $r: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to S^1$ дато са $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$ јесте ретракција




$\Rightarrow$ $S^1$ је ретракт од $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

(3) $(0,1)$ није ретракт од $[0,1]$

Зашто, ако твр. $r: [0,1] \to (0,1)$ ретракција

$\Rightarrow$ $r$ је нетр. и „на"

$[0,1]$ компактан $\Rightarrow$ $\operatorname{im} r = (0,1)$ компактан ↯

(4) $\mathbb{Z}$ није ретракт од $\mathbb{R}$

тис. $r: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ ретракција $\Rightarrow r$ нетр. и „на"

$\mathbb{R}$ путно пов. $\Rightarrow \operatorname{im} r = \mathbb{Z}$ путно пов. ↯

**деф.** Нека је $X$ скуп и $f: X \to X$. Ако за $x_0 \in X$ важи $f(x_0) = x_0$, онда је $x_0$ **фиксна тачка** пресликавања $f$.

**деф.** Нека је $X$ топ. пр. Кажемо да $X$ има **својство фиксне тачке** (СФТ) ако свако нетр. $f: X \to X$ има фиксну тачку.

**Пример** (1) $X = *$ има СФТ јер постоји само једно пресл. $f: * \to *$

(2) $\mathbb{R}$ нема СФТ јер $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дато са $f(x) = x + 5$ нема ФТ

(3) $\mathbb{R}^n$ нема СФТ јер $t_\alpha: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (транслација за вектор $\alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$) дато са $t_\alpha(x) = x + \alpha$, $x \in \mathbb{R}^n$, нема ФТ

(4) $S^1$ нема СФТ јер $\rho_\varphi: S^1 \to S^1$ (ротација око $O$ за угао $\varphi \neq 2k\pi$) нема ФТ

Специјално, $a_{S^1} = \rho_\pi$ - антиподално пресл.

$$a_{S^1}(x) = -x, \quad x \in S^1$$

нема ФТ.

(5) $S^n$ нема СФТ јер $a_{S^n}: S^n \to S^n$ дато са

$$a_{S^n}(x) = -x, \quad x \in S^n$$

нема ФТ.

**Став** СФТ је тополошка инваријанта тј.

$X$ има СФТ и $X \approx Y \Rightarrow Y$ има СФТ.

*доказ:* Нека $X$ има СФТ, нека је $h: X \to Y$ хомеоморфизам и нека је $f: Y \to Y$ непр. Посматрајмо композицију $X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h^{-1}} X$

$h^{-1} \circ f \circ h : X \to X$ непр. и $X$ има СФТ, па $h^{-1} \circ f \circ h$ има ФТ. Нека је $x_0 \in X$ тр.

$$(h^{-1} \circ f \circ h)(x_0) = x_0 \quad / h$$

$$(\underbrace{h \circ h^{-1}}_{\eta_Y} \circ f \circ h)(x_0) = h(x_0)$$

$$(f \circ h)(x_0) = h(x_0)$$

$$f(h(x_0)) = h(x_0)$$

$\Rightarrow h(x_0)$ је ФТ од $f \Rightarrow Y$ има СФТ. ▨

**Став** Ако $X$ има СФТ и $A \subseteq X$ је ретракт од $X$, онда $A$ има СФТ.

*доказ:* Нека је $r: X \to A$ ретракција, $i: A \hookrightarrow X$ инклузија и $f: A \to A$ непр. Посматрајмо композицију:

$$X \xrightarrow{r} A \xrightarrow{f} A \xrightarrow{i} X$$

$i \circ f \circ r : X \to X$ је непр. и $X$ има СФТ, па $i \circ f \circ r$ има ФТ. Нека је $x_0 \in X$ тр. $(i \circ f \circ r)(x_0) = x_0$, тј.

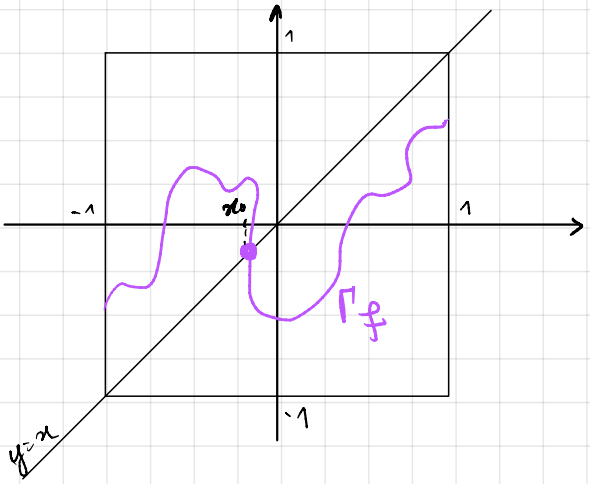
$i(f(r(x_0))) = x_0$. Како је $i: A \hookrightarrow X$ дато са $i(a) = a$, закључујемо да је $\operatorname{im} i = A$, па је $x_0 \in A$ (јер $x_0 = i(f(r(x_0)))$).

$i(f(\underbrace{r(x_0)}_{\parallel x_0 \text{ (јер } x_0 \in A)})) = x_0 \Rightarrow f(x_0) = x_0 \Rightarrow f$ има ФТ $\Rightarrow A$ има СФТ ▨

## Брауерова теорема о фиксној тачки

**Теорема** [Брауер] За свако $n \in \mathbb{N}$ диск $D^n$ има СФТ.

*доказ* (само за $n = 1$):




Нека је $f: [-1,1] \to [-1,1]$ нпр. Уочимо график $\Gamma_f$ функције $f$ и праву $y = x$.

Са слике видимо да се график и права морају негде сећи

$\Rightarrow (\exists x_0 \in [-1,1])\ f(x_0) = x_0$. ▨

Сада наводимо неке еквиваленције Брауерове т.

**Теорема** Нека је $n \in \mathbb{N}$. Следећа тврђења су еквивалентна:

(1) $D^n$ има СФТ

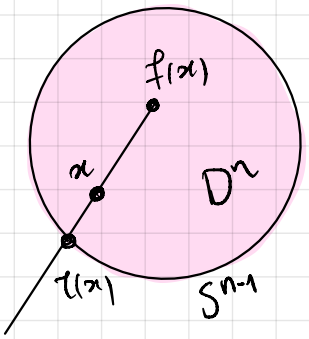
(2) $S^{n-1}$ није ретракт од $D^n$

(3) $S^{n-1}$ није контрактибилна.

*доказ:* (1) $\Rightarrow$ (2) тј. $S^{n-1}$ је ретракт. Из (1) $D^n$ има СФТ $\Rightarrow$ $S^{n-1}$ има СФТ ↯

(2) $\Rightarrow$ (1) тј. да $D^n$ нема СФТ, тј. да постоји

$f: D^n \to D^n$ које нема ФТ, тј. $(\forall x \in D^n)\ f(x) \neq x$.




Дефинишемо $r: D^n \to S^{n-1}$ на следећи начин. Нека је $x \in D^n$. Тада $f(x) \neq x$, па $x$ и $f(x)$ одређују јединствену полуправу из $f(x)$ кроз $x$. Нека је $r(x)$ тачка у пресеку ове полуправе и граничне сфере $S^{n-1}$. Пресликавање $r$ се може и експлицитно задати и може се показати да је $r: D^n \to S^{n-1}$ ретракција што је ↯ са (2).

(2) $\Leftrightarrow$ (3): Показаћемо еквивалентност негација од (2) и (3) (што је у реду јер $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \Leftrightarrow \neg q)$)

$\neg(2) \Leftrightarrow$ $S^{n-1}$ је ретракт од $D^n$

$\Leftrightarrow \exists r: D^n \to S^{n-1}$ нпр. тј. $r|_{S^{n-1}} = 1_{S^{n-1}}$

$\Leftrightarrow 1_{S^{n-1}}$ се може проширити на $D^n$

$\Leftrightarrow 1_{S^{n-1}} \simeq const$

$\Leftrightarrow S^{n-1} \simeq *$

$\Leftrightarrow \neg(3)$. ▨

**деф.** Кажемо да је $X$ **просто повезан** ако је путно повезан и $\pi_1(X) = 0$.

**Пример** (1) $X \simeq *$ $\Rightarrow$ $X$ је просто повезан

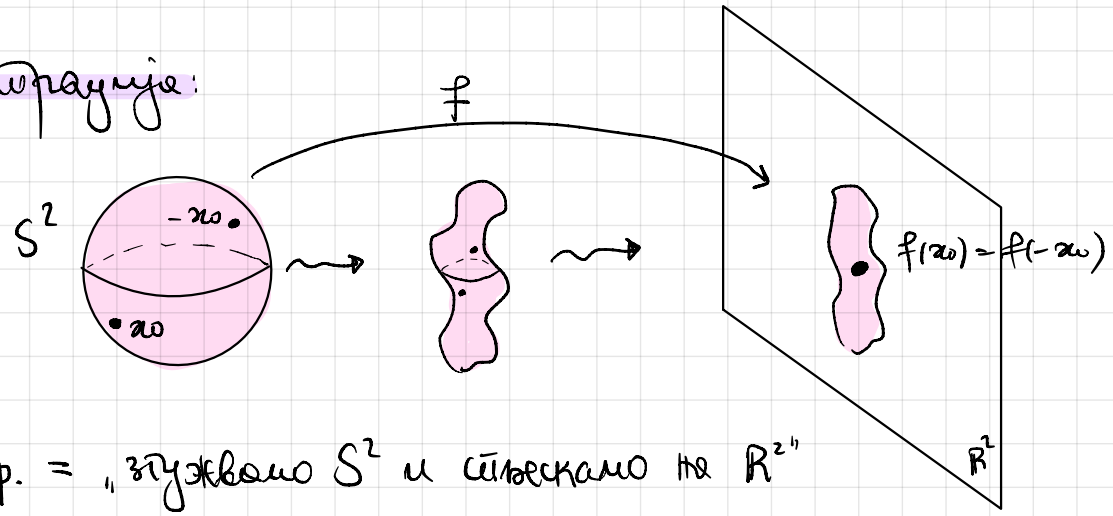
(2) $X$ просто пов. $\not\Rightarrow$ $X \simeq *$

нпр. $S^n$, $n \geq 2$ је просто повезана, али није контрактибилна.

# Борсук-Уламова теорема

**Теорема** [БУТ] Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $f: S^n \to \mathbb{R}^n$. Тада постоји $x_0 \in S^n$ тј. $f(x_0) = f(-x_0)$

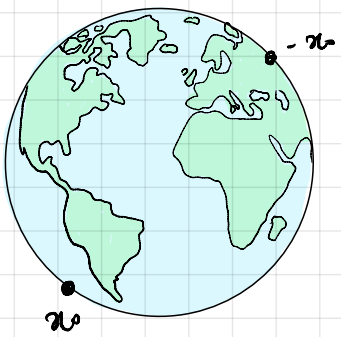
**илустрација:**




$f$ непр. = „згужвамо $S^2$ и спљоштимо на $\mathbb{R}^2$"

$\Rightarrow$ постоје дијаметрално супротне тачке $x_0, -x_0 \in S^2$ које су се „спљоштиле" у исту тачку, тј. $f(x_0) = f(-x_0)$

**Пример** У сваком тренутку на Земљи постоји пар антиподалних тачака са истом температуром и ваздушним притиском.




$\approx S^2$

Нека је $f: S^2 \to \mathbb{R}^2$ дато са

$f(x) = (t(x), p(x))$

$t(x)$ – темп. у $x$; $p(x)$ – притисак у $x$

$f$ је непр. $\overset{\text{БУТ}}{\Longrightarrow} (\exists x_0 \in S^2)\ f(x_0) = f(-x_0)$, тј.

$t(x_0) = t(-x_0)$ и $p(x_0) = p(-x_0)$

**деф.** Нека су $m, n \in \mathbb{N}_0$. Пресликавање $g: S^m \to S^n$ је **непарно** ако за сваку $x \in S^m$ важи $g(-x) = -g(x)$.

У следећој теореми наводимо неколико тврђења еквивалентних БУТ.

**Теорема** Нека је $n \in \mathbb{N}$. Следећа тврђења су еквивалентна:

(1) $f: S^n \to \mathbb{R}^n$ непр. $\Rightarrow (\exists x_0 \in S^n)\ f(x_0) = f(-x_0)$ (ово је БУТ)

(2) Не постоји непрекидно и непарно пресл. $g: S^n \to S^{n-1}$.

**доказ**: (1) $\Rightarrow$ (2): тј. Нека је $g: S^n \to S^{n-1}$ непр. и непарно и $i: S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ инклузија. Тада је $i \circ g: S^n \to \mathbb{R}^n$ непр

$\overset{(1)}{\Rightarrow} (\exists x_0 \in S^n)\ i(g(x_0)) = i(g(-x_0))$, тј. $g(x_0) = g(-x_0)$,

сем g је непарно па $g(x_0) = g(-x_0) = -g(x_0) \Rightarrow 2g(x_0) = 0$

$\Rightarrow g(x_0) = 0$ ↯ (ово је немогуће јер $g(x_0) \in S^{n-1}$ и $0 \notin S^{n-1}$).

(2) $\Rightarrow$ (1): Нека је $f: S^n \to \mathbb{R}^n$ непр. и тј.

$$(\forall x \in S^n)\ f(x) \neq f(-x)$$

Нека је $g: S^n \to S^{n-1}$ дато са:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}$$

g је непр. и $g(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{\|f(-x) - f(x)\|} = -g(x)$, тј. g је непарно ↯ (због (2)) ▨