ОЧИГЛЕДНА ТОПОЛОГИЈА
(задаци за вежбу)

1. Испитати повезаност, компактност, отвореност и затвореност следећих подскупова у $\mathbb{R}^2$ (са стандардном топологијом):

$$A = [-1,3) \times (2,5]$$
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geqslant 1\}$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$$
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$
$$E = B \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < \frac{1}{2}\right\}$$
$$F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [0,1] \right)$$
$$G = \mathbb{N}$$
$$H = \mathbb{N} \cap [0,1000]$$

2. Доказати да је $(0,1) \times \mathbb{R} \approx \mathbb{R}^2$.

3. Да ли су хомеоморфни неки од простора: $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2 \backslash S^1$, $\mathbb{R}^2/S^1$, $S^1 \vee S^1$, $S^2 \vee \mathbb{R}^2$, $S^1 \vee \mathbb{R}P^1$?

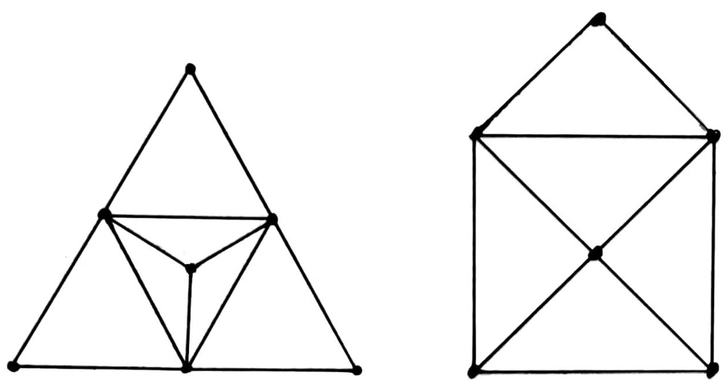
4. Доказати да је $S^2 \backslash \{N\} \approx \mathbb{R}^2$ (N је северни пол на сфери).

5. Доказати да у графу који има $n \geqslant 2$ темена постоје бар два темена истог индекса.

6. Доказати да у сваком графу број темена непарног индекса је паран.

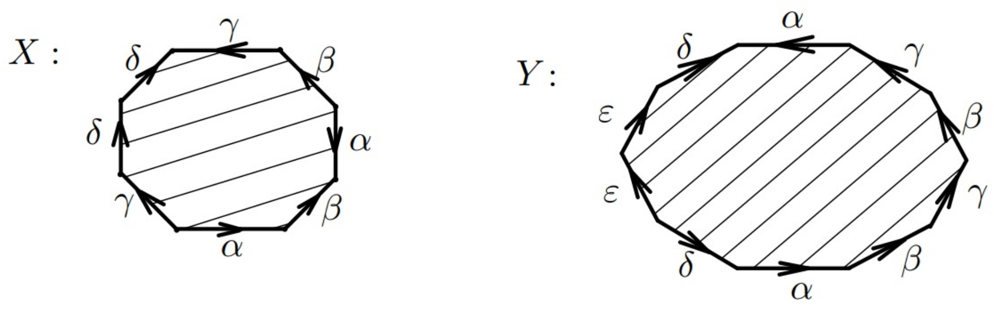
7. Нека је граф G са $n \geqslant 3$ темена такав да свако теме има индекс већи или једнак $\frac{n-1}{2}$. Доказати да је G повезан.

8. Графови G_1 и G_2 су дати сликом.

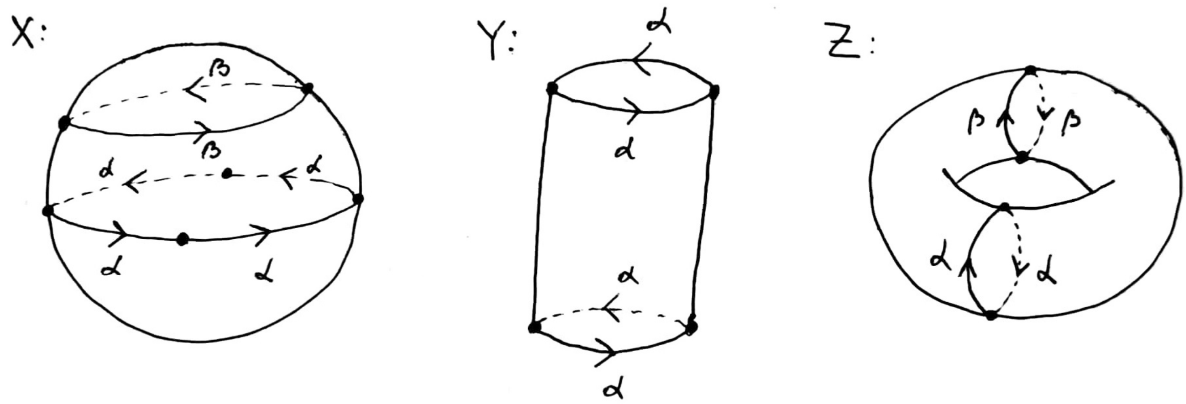


   (а) Одредити Ојлерову карактерисику ових графова.
   (б) Да ли су графови уникурсални?
   (в) У G_1 наћи све елементарне путеве од A до B.
   (г) Одредити хроматске бројеве графова.
   (д) У G_1 додати једну ивицу тако да постане уникурсалан.
   (ђ) Из G_1 избацити једну ивицу тако да му се смањи хроматски број.

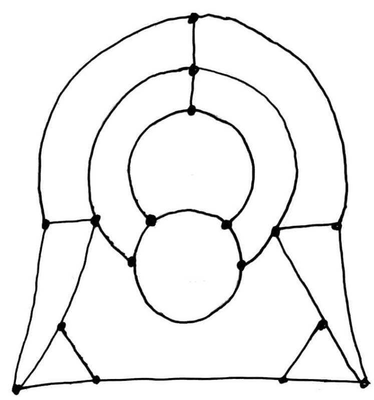
9. Доказати да су X и Y површи и одредити које.



10. За следеће просторе наћи количнички модел у равни и одредити им Ојлерову карактеристику.



11. Дата је мапа на слици



(а) Обојити мапу са 4 боје.

(б) Одредити дуални граф мапе.

12. Нека су пресликавања $f, g : D^2 \to S^2$ дата са

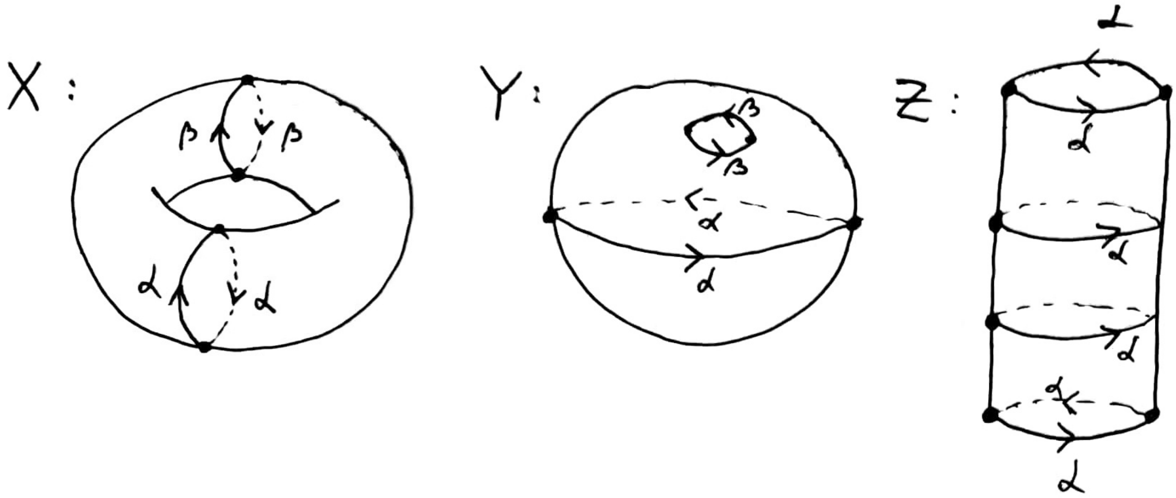
$$f(x_1, x_2) = \left(x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}\right)$$
$$g(x_1, x_2) = \left(-x_1, -x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}\right)$$

Доказати да је $f \simeq g$.

13. Нека је $f : X \to Y$ непрекидно пресликавање које се факторише кроз контрактибилан простор Z, тј. постоје пресликавања $g : X \to Z$ и $h : Z \to Y$ таква да је $f = h \circ g$. Доказати да је пресликавање f хомотопски тривијално, тј. $f \simeq const$.

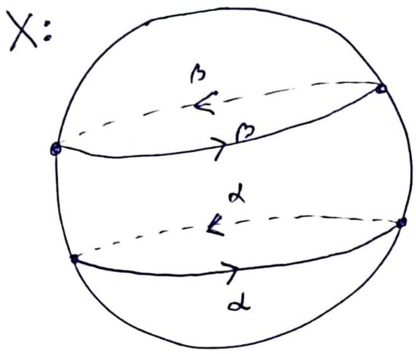
14. Одредити који од следећих простора су међусобно хомотопски еквивалентни: $S^2 \vee \mathbb{R}^2$, $S^1 \times [-1, 1]$, $S^1 \times \mathbb{R}$, S^2, S^1, $S^2 \vee \mathbb{R}$, $(0, 1)^2$, S^2_+.

15. Дати су простори:



Одредити фундаменталне групе од X, $X/(\alpha \cup \beta)$, $(X/\alpha)/\beta$, Y, Y/β, Z, Z/α.

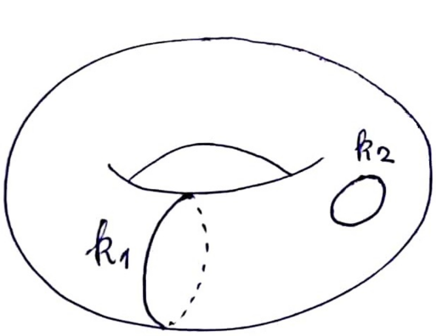
16. Нека је простор X дат сликом.



(а) Одредити фундаменталну групу од X.

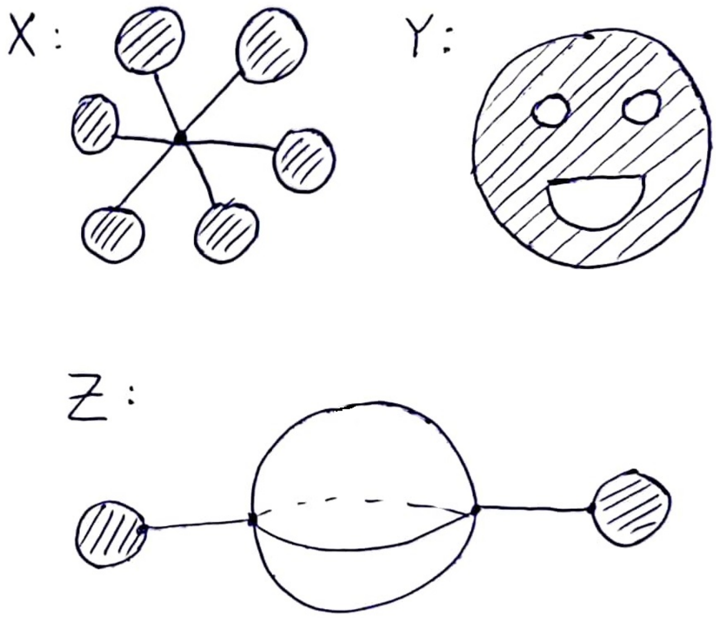
(б) Да ли је α ретракт од X?

17. Уочимо кружнице k_1 и k_2 на торусу. Да ли су оне ретракти торуса?



18. Испитати својство фиксне тачке цилиндра, Мебијусове траке, пуног торуса и равни.

19. Испитати својство фиксне тачке простора на слици.



20. Нека је $\mathbb{R}P^2$ пројективна раван и M Мебијусова трака. Да ли постоје наткривања

    (а) $M \to \mathbb{R}P^2$;
    (б) $\mathbb{R}P^2 \to M$?

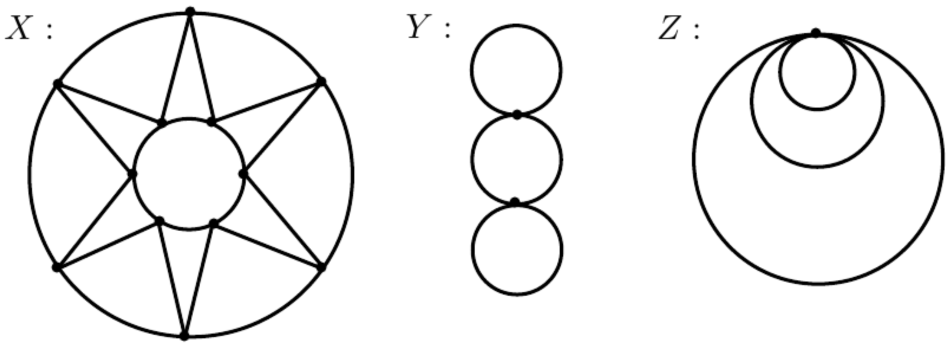
21. Нека је K Клајнова флаша и T^2 торус. Да ли постоје наткривања

    (а) $T^2 \to K$;
    (б) $K \to T^2$?

22. Нека је $m \geqslant 2$ и $n \geqslant 1$. Да ли постоје наткривања

    (а) $\mathbb{R}^n \to S^m$;
    (б) $S^m \to \mathbb{R}^n$?

23. Нека су простори X, Y и Z дати наредном сликом.



Испитати да ли постоје следећа наткривања:
(а) $X \to Y$; (б) $Y \to X$; (в) $X \to Z$; (г) $Z \to X$; (д) $Y \to Z$; (ђ) $Z \to Y$.

24. Да ли постоје наткривања $M_{10} \to M_4$ и $M_4 \to M_{10}$?

25. Ако непрекидно пресликавање $f : S^2 \to S^2$ није "на", показати да није ни "1-1".

26. Доказати да се кружница S^1 не може покрити са два затворена скупа тако да ниједан не садржи пар антиподалних тачака.

27. Нека је T троугао у равни и S било који подскуп равни. Доказати да постоје две различите тачке на троуглу које су на истом растојању од скупа S.

28. Нека је V омотач ваљка и S било који подскуп $\mathbb{R}^3$ и нека су V и S произвољно позиционирани у $\mathbb{R}^3$. Доказати да постоје две тачке са ваљка које су на истом растојању од S.

29. Нека је V омотач ваљка и S било који подскуп $\mathbb{R}^3$ и нека су V и S произвољно позиционирани у $\mathbb{R}^3$. Доказати да постоје две тачке са ваљка које су на међусобно истом растојању од S, а истовремено су и на међусобно истом растојању од координатног почетка.