Очигледна топологија, 16.06.2022.

1. Нека су дати следећи подскупови одговарајућих метричких простора:

$$
\begin{aligned}
A &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y-2)^2 = 3^2\right\},\\
B &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z,\ z \geqslant 0\right\},\\
C &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = e^x\right\},\\
D &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\frac{x}{7}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 + \left(\frac{z}{5}\right)^2 = 1\right\},\\
E &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = |y|\right\} \cup \{-1,1\} \times [-1,1].
\end{aligned}
$$

За сваки од ових простора одредити да ли је хомеоморфан неком од доле понуђених простора и уписати на одговарајуће место (просторе A, B, C, D и E уписати поред *сваког* простора (1) – (8) којима су хомеоморфни).

(1) $S^1 \approx$

(2) $S^1 \vee S^1 \approx$

(3) $S^2 \approx$

(4) $\mathbb{R} \approx$

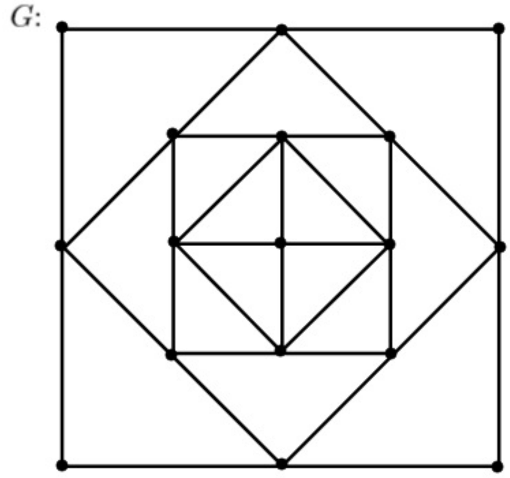
(5) $\mathbb{R} \vee \mathbb{R} \approx$

(6) $\mathbb{R}^2 \approx$

(7) $S^2 \backslash * \approx$

(8) $\partial\left([0,1]^2\right) \approx$

2. Нека је дат граф G наредном сликом.



(а) Одредити Ојлерову карактеристику графа G;

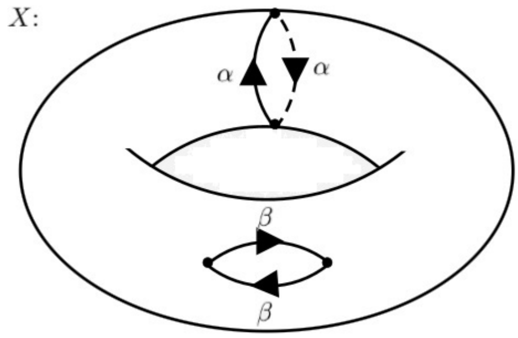
(б) Одредити једно максимално дрво у графу G;

(в) Уклонити једну ивицу тако да граф постане уникурсалан;

(г) Одредити хроматски број графа G.

ОКРЕНИ СТРАНУ

3. Нека је количнички простор X дат наредном сликом.



(а) Наћи један равански количнички модел простора X;

(б) Одредити Ојлерову карактеристику простора X;

(в) Одредити фундаменталну групу простора X као и абелизацију фундаменталне групе;

(г) Одредити фундаменталну групу простора $X/(\alpha \cup \beta)$.

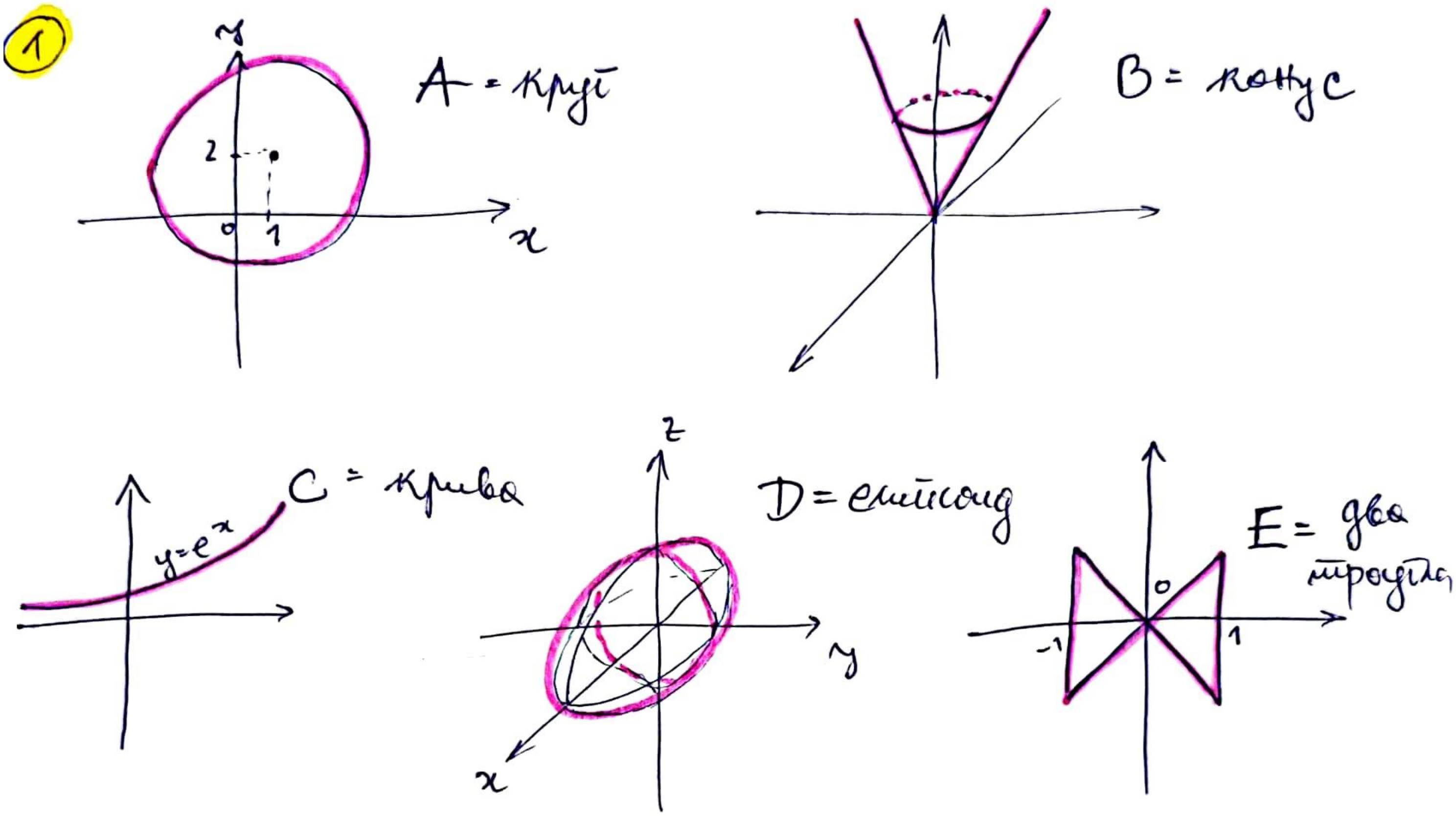
4. Одредити све $n, m \in \mathbb{N}$ за које постоји наткривање $\mathbb{R}^n \to S^m$.

5. Нека је X омотач коцке $[0,1]^3$ и нека је $f : X \to X$ непрекидна инјекција. Доказати да тада f мора бити бијекција.

Очигледна топологија ЈУН 1 2022.

– РЕШЕЊА –

1



одговор:

(1) $S^1 \approx A$

(2) $S^1 \vee S^1 \approx E$

(3) $S^2 \approx D$

(4) $\mathbb{R} \approx C$

(5) $\mathbb{R} \vee \mathbb{R} \approx$ /

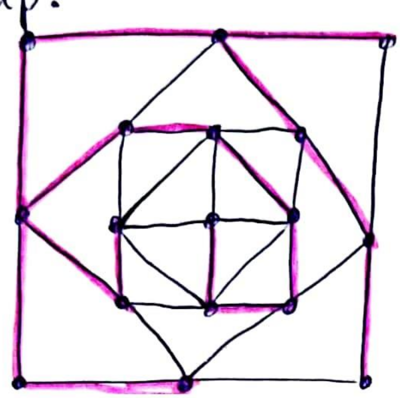
(6) $\mathbb{R}^2 \approx B$

(7) $S^2 \setminus * \approx B$

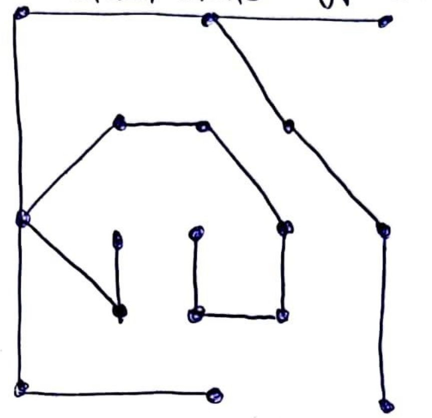
(8) $\partial([0,1]^2) \approx A$ ■

(2) (а) ивица = 32
темена = 17 } $\Rightarrow \chi(G) = 17 - 32 = 15$

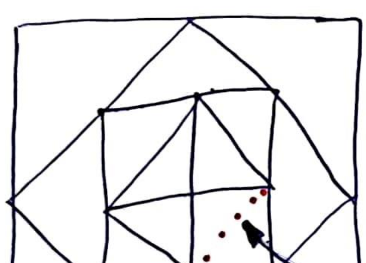
(б) нпр.



максимално дрво:

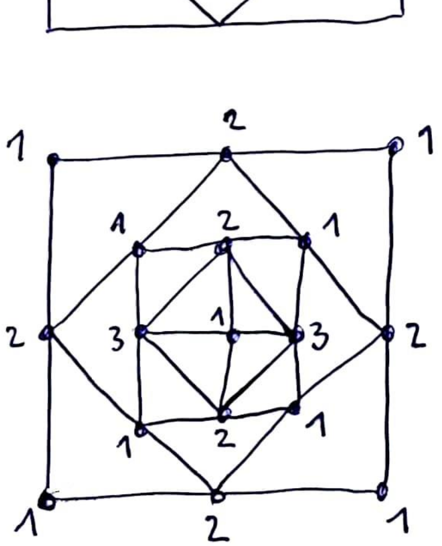


(в) уклањамо ивицу која спаја два темена непарног индекса:



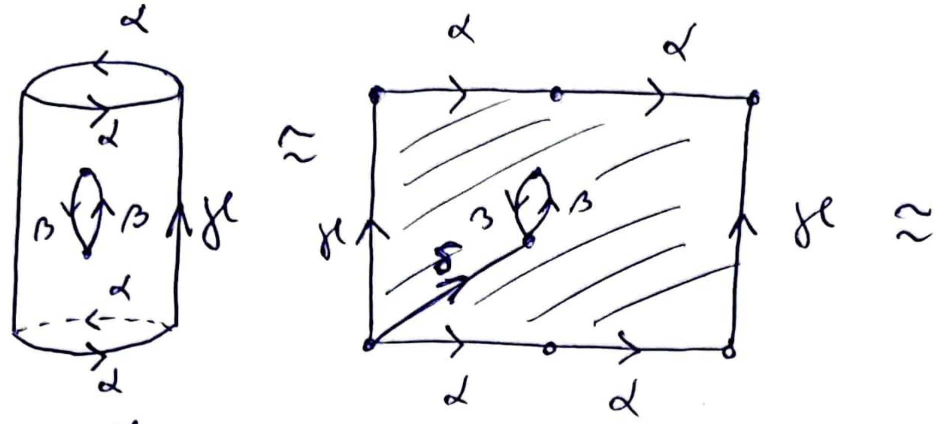
ову смо склонили

(г)

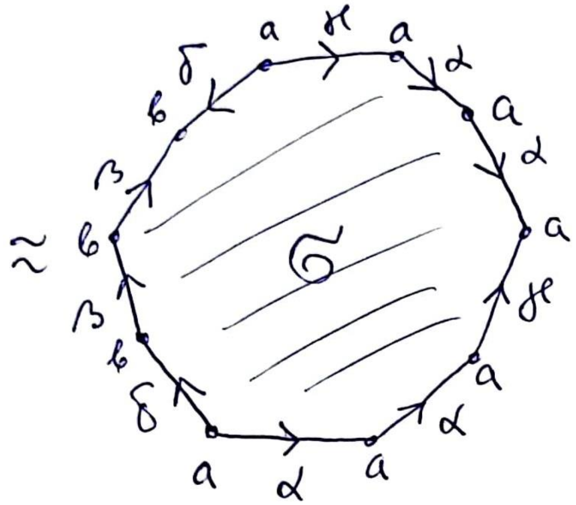


обојили смо са 3 боје па је $col(G) \leq 3$.
Граф има троуглова па је $col(G) \geq 3$.
$\Rightarrow col(G) = 3$ ∎

3 (a) $X \simeq$



$\simeq$



(б)

темена : $a, в = 2$

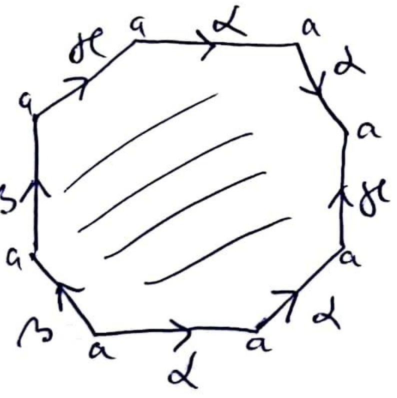
ребра : $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 4$

страна : $\sigma = 1$

$\Rightarrow \chi(X) = 2 - 4 + 1 = -1$

(в)

$X \underset{/\delta}{\simeq}$



Сечемо по δ да се два темена била мита

$$\Rightarrow \pi_1(X) \cong \langle \alpha, \beta, \gamma \mid \alpha^2 \gamma \alpha^{-2} \gamma^{-1} \beta^{-2} = 1 \rangle$$

$$\pi_1^{ab}(X) \cong Ab\langle \alpha,\beta,\varkappa \mid \cancel{\alpha^2 \varkappa \alpha^{-2} \varkappa^{-1}}\beta^{-2}=1\rangle \cong$$

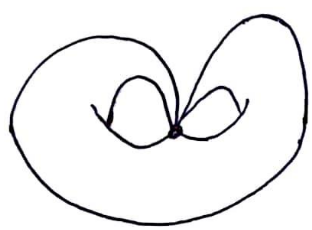
$$\cong Ab\langle \alpha,\beta,\varkappa \mid \beta^{-2}=1\rangle \cong$$

$$\cong Ab\langle \alpha,\beta,\varkappa \mid \beta^{2}=1\rangle \cong$$

$$\cong \langle \alpha \mid -\rangle \oplus \langle \beta \mid \beta^2=1\rangle \oplus \langle \varkappa \mid -\rangle \cong$$

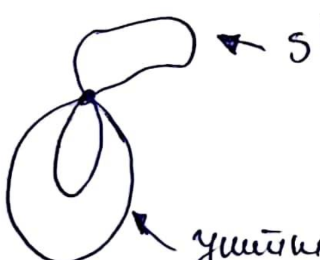
$$\cong \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}_2$$

2) $X/(\alpha\cup\beta) \cong$



$\cong$

$\underset{/e}{\cong}$



$\simeq S^1 \vee \underbrace{S^1 \vee S^2}$

рађено на часу да је ушитнута сфера $\simeq S^1 \vee S^2$

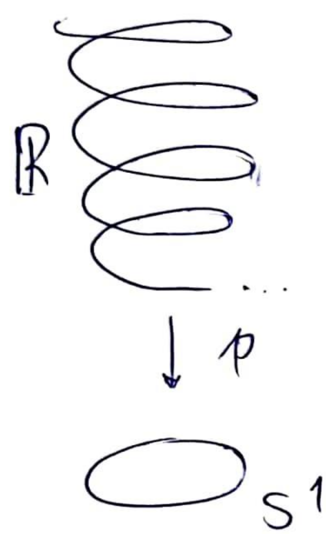
$$\Rightarrow \pi_1(X/(\alpha\cup\beta)) \cong \pi_1(S^1\vee S^1\vee S^2) \cong \pi_1(S^1) * \pi_1(S^1) * \pi_1(S^2) \cong$$

$$\cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * 0 = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}. \quad \square$$

④ Наткривање је локални хомеоморфизам, па ако постоји наткривање $\mathbb{R}^n \to S^m$, онда $n=m$.

Знамо $\mathbb{R} \to S^1$ (са часа):

$p: \mathbb{R} \to S^1$ је дато са $p(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$

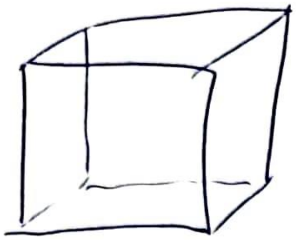


За $n \geq 2$ ако постоји наткривање $\mathbb{R}^n \to S^n$, онда $[\underbrace{\pi_1(S^n)}_{=0} : \underbrace{\pi_1(\mathbb{R}^n)}_{=0}] = 1 =$ бр. листова

$\Rightarrow$ наткривање је хомеоморфизам, али $\mathbb{R}^n \not\cong S^n$.

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}^n \not\to S^n$.

Коначно: $\mathbb{R}^n \to S^m$ АККО $n=m=1$. $\square$

⑤ $X =$  $\approx S^2$

Нека је $h : X \to S^2$ хомеоморфизам

Знамо f је „1-1" покажимо да је f и „на".

птс. f није на $\Rightarrow (\exists x_0 \in X \setminus f(X))$

Имамо:

$$\begin{tikzcd} S^2 \arrow[r, "h^{-1}"] \arrow[rrr, bend right, dashed, "h \circ f \circ h^{-1}"'] & X \arrow[r, "f"] & X \setminus \{x_0\} \arrow[r, "h"] & S^2 \setminus * \end{tikzcd}$$

Како је $S^2 \setminus * \approx \mathbb{R}^2$ то $h \circ f \circ h^{-1}$ слика S^2 у $\mathbb{R}^2$

$\overset{\text{БУТ}}{\Longrightarrow} (\exists a \in S^2)\ (\cancel{h} \circ f \circ h^{-1})(a) = (\cancel{h} \circ f \circ h^{-1})(-a)$

$\Rightarrow f(h^{-1}(a)) = f(h^{-1}(-a))$

Дакле $h^{-1}(a)$ и $h^{-1}(-a)$ су две различите тачке које се са f сликају у исто $\Rightarrow$ f није „1-1" ↯

Дакле f мора бити „на" $\Rightarrow$ f је бијекција □