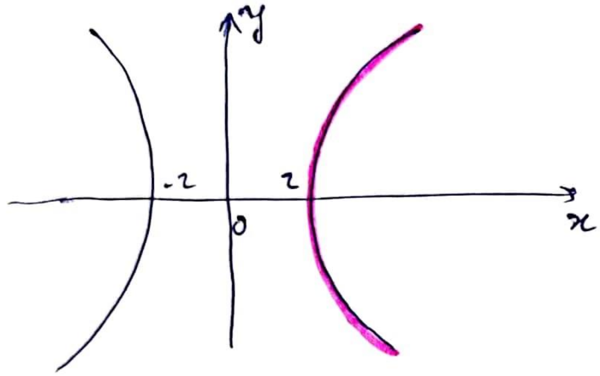
# Очигледна топологија – ЈУЛ 2019.

$\boxed{1.}$ $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0,\ x^2-y^2=4\}$

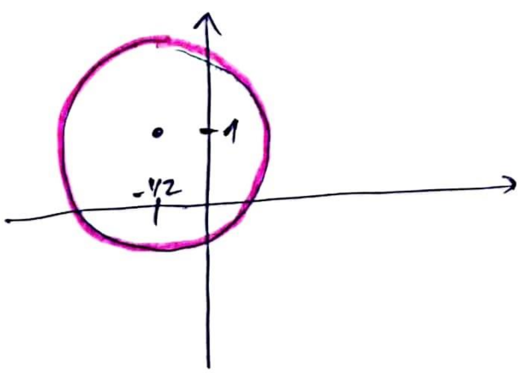



$\approx \mathbb{R}$

---

$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 4x^2+y^2+4x-2y=1\}=$

$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (2x+1)^2+(y-1)^2=3\}$



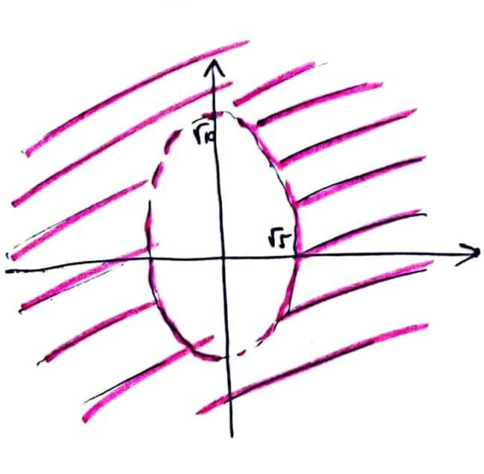

$\approx S^1$

---

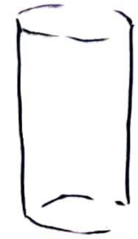
$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2x^2+y^2>10\}$

$2x^2+y^2=10 \quad /:10$

елипса $\frac{x^2}{(\sqrt{5})^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{10})^2}=1$




$\approx$

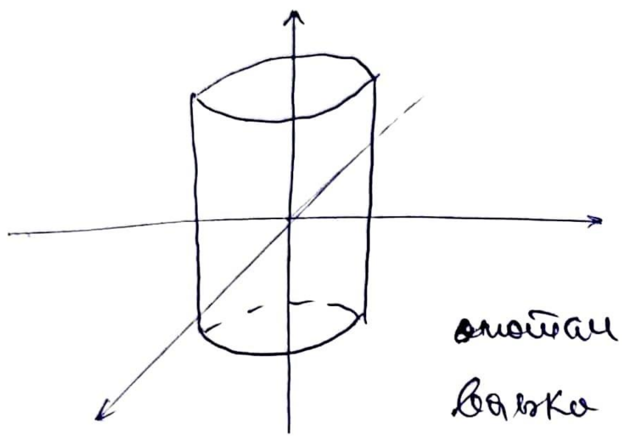


$S^1\times\mathbb{R}\approx S^1\times(-1,1)$

цилиндар

$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, -1 \le z \le 1,\ x^2+y^2=1\} \cup$ $\boxed{\text{цилиндар}}$

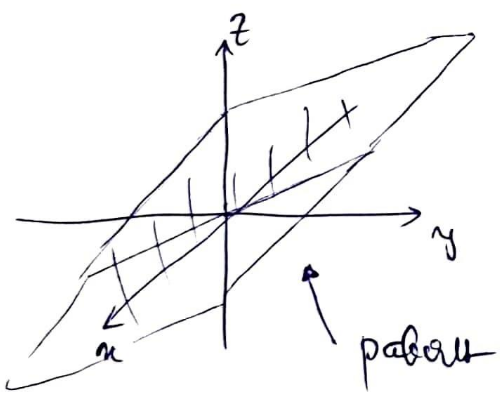
$\cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \{-1,1\},\ x^2+y^2 \le 1\}$ $\boxed{\text{два диска}}$




$\approx S^2$

---

$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z = x+y\}$




$\approx \mathbb{R}^2$

---

(1) $S^1 \vee S^1 \approx /$

(2) $S^1 \times \mathbb{R} \approx C$

(3) $\mathbb{R} \approx A$

(4) $S^1 \times [1,1] \approx /$

(5) $S^2 \approx D$

(6) $S^2 \setminus * \approx E$

(7) $S^1 \approx B$

(8) $[0,5] / \{0,5\} \approx B$

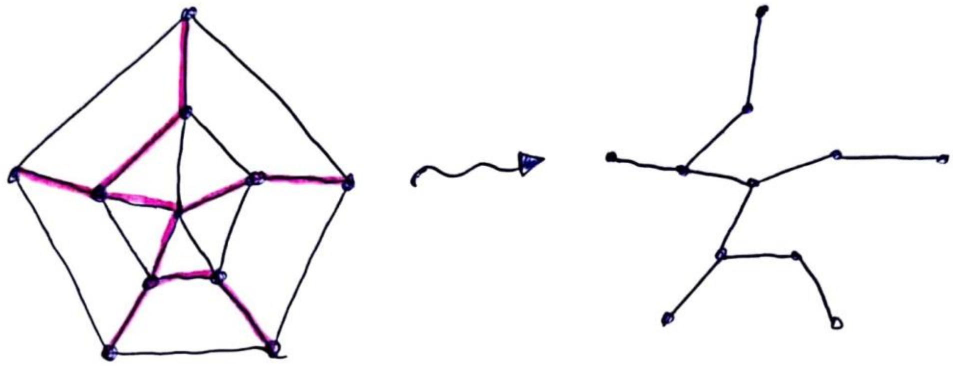
2.

(а) ивица: 20

темена: 11

$\chi(G) = 11 - 20 = -9$

(б)



максимално дрво

(в) У графу је:

1 теме индекса 5

5 темена индекса 4

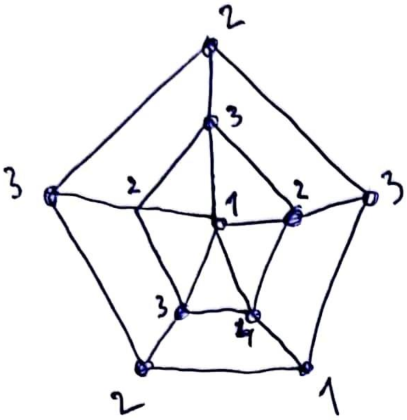
5 темена индекса 3

укупно 6 темена непарног индекса (а сме их бити највише 2)

$\Rightarrow$ морамо избацити бар 2 ивице.

(погледамо граф и видимо да нам треба бар 2)

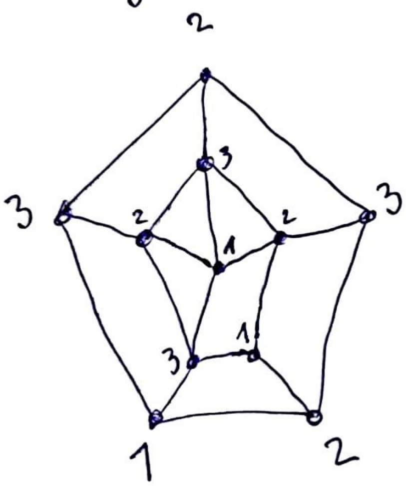
(г)




За мали петоугао нам треба бар 3 боје (зад. са часа) а сва темена су спојена са централним па њему треба четврта боја

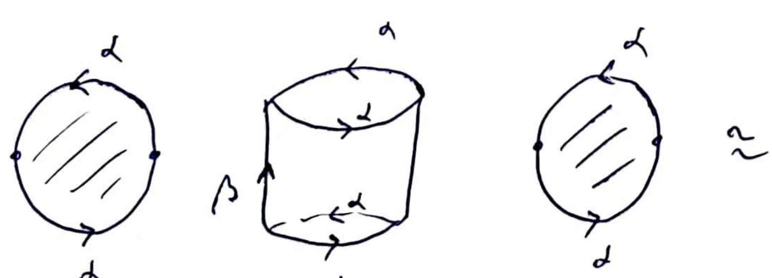
$\Rightarrow$ col(G) = 4

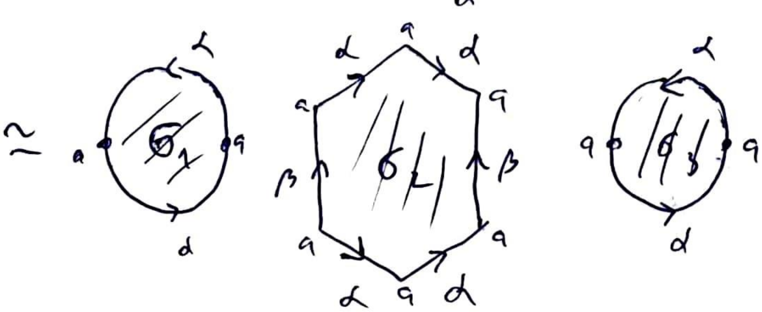
(д) уклонимо ивицу 


обојен са 3 боје

3. (а)

X = 


≃ 

(б) вершини: $a$

ребра: $\alpha, \beta$ $\qquad \chi(X) = 1-2+3 = 2$

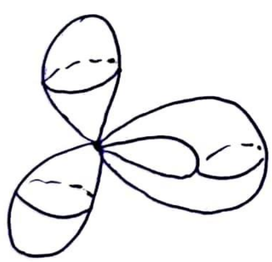
сторони: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

(в) $\pi_1(X) \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha^2 = 1,\ \alpha^2 \beta \alpha^{-2} \beta^{-1} = 1,\ \alpha^2 = 1 \rangle \cong$

$$\cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha^2 = 1 \underbrace{, \beta\beta^{-1} = 1}_{\text{тривіально}}, \alpha^2 = 1 \rangle \cong$$

$$\cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha^2 = 1 \rangle \cong$$

$$\cong \langle \alpha \mid \alpha^2 = 1 \rangle * \langle \beta \mid - \rangle \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}$$

(г) $X/\alpha \cong$  $\cong S^2 \vee S^2 \vee$  $\cong$

ущипнута сфера

$$\cong S^2 \vee S^2 \vee S^1 \vee S^2$$

$$\Rightarrow \pi_1(X/\alpha) \cong \pi_1(S^2) * \pi_1(S^2) * \pi_1(S^1) * \pi_1(S^2) \cong$$

$$\cong 0 * 0 * \mathbb{Z} * 0 \cong \mathbb{Z} \quad \blacksquare$$

$\boxed{4.}$ (а) Нека је $H: D^2 \times I \to S^2$ дато са

$$H((x_1,x_2),t) = \left(\frac{2-t}{2}\cdot x_1, \frac{2-t}{2}\cdot x_2, \sqrt{1-\left(\frac{2-t}{2}\cdot x_1\right)^2-\left(\frac{2-t}{2}\cdot x_2\right)^2}\right)$$

Одакле ово $\frac{2-t}{2}x_1$:

Хтели смо за $t=0$ на првој коорд. да је $x_1$, а за $t=1$ да је $\frac{x_1}{2}$, па узмемо

$$(1-t)x_1 + t\frac{x_1}{2} = x_1 - tx_1 + t\frac{x_1}{2} = \frac{2-t}{2}\cdot x_1$$

$H((x_1,x_2),t) \in S^2$ и $H$ је непр. па то јесте хомотопија.

$$H((x_1,x_2),0) = \left(x_1, x_2, \sqrt{1-x_1^2-x_2^2}\right) = f(x_1,x_2)$$

$$H((x_1,x_2),1) = \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}, \sqrt{1-\frac{x_1^2}{4}-\frac{x_2^2}{4}}\right) = g(x_1,x_2)$$

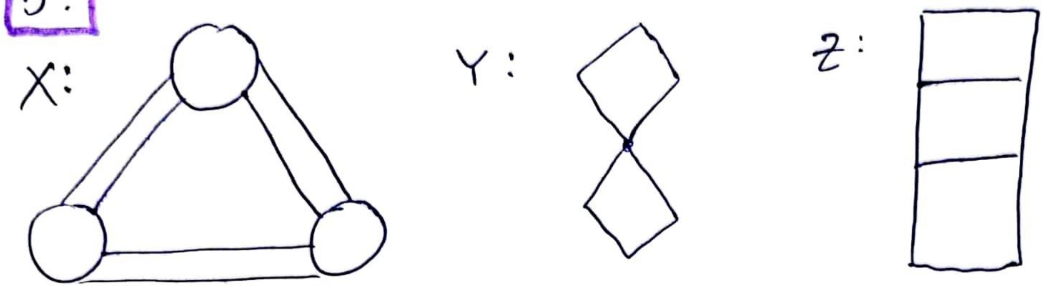
$\Rightarrow f \simeq g$.

(б) Нека је $H((x_1,x_2),t) = \left(t\cdot x_1, t\cdot x_2, \sqrt{1-(tx_1)^2-(tx_2)^2}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} H((x_1,x_2),0) = (0,0,1) = c_{(0,0,1)}(x_1,x_2) \\ H((x_1,x_2),1) = \left(x_1, x_2, \sqrt{1-x_1^2, x_2^2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow f \simeq \text{const}$$

$\square$

$\boxed{5.}$




У X имамо 12 тачака са околином

У Y 1 тачка са околином

У Z 4 тачке са околином

Одмах видимо да Y не наткрива X и Z нити га X и Z наткривају јер имају тачке са различитим околинама.

Дакле: $\boxed{Y \not\to X}$, $\boxed{Y \not\to Z}$, $\boxed{X \not\to Y}$, $\boxed{Z \not\to Y}$

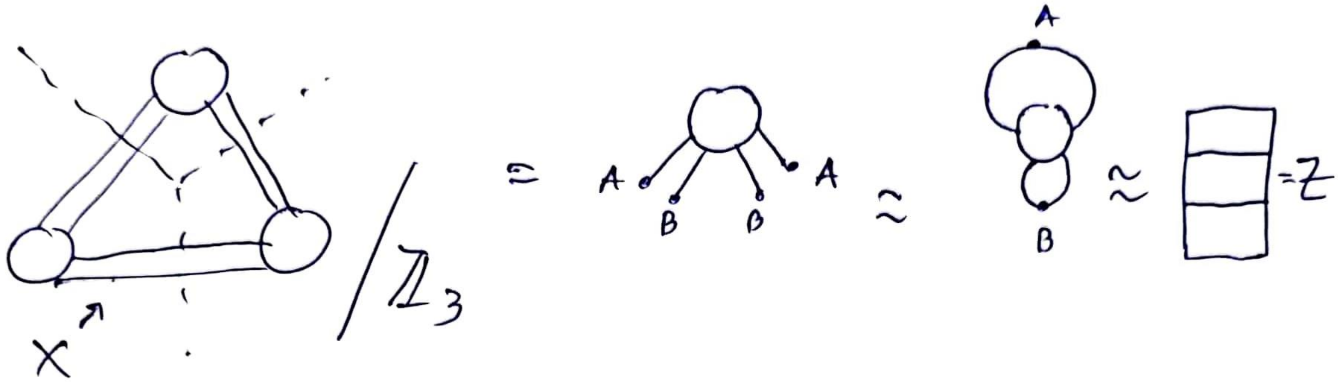
Још X и Z.

• $Z \to X$ ?

Ако $Z \to X$, онда $12 \mid 4$ ↯ $\Rightarrow$ $\boxed{Z \not\to X}$

• $X \to Z$ ?

Ако $X \to Z$, онда $4 \mid 12$ ✓ и $n = \frac{12}{4} = 3$ је број листова. Пробамо да дејствујемо са $\mathbb{Z}_3$.




Дакле, $X \to X/\mathbb{Z}_3$, тј. $\boxed{X \to Z}$. ■