деф **дефиниција** Дејство групе G на X је пресликавање

$$\mu : G \times X \longrightarrow X$$

такво да је

(1) $(\forall g_1, g_2 \in G)(\forall x \in X)\ \mu(g_2, \mu(g_1, x)) = \mu(g_2 g_1, x)$

(2) $(\forall x \in X)\ \mu(e, x) = x$ (e = неутрал у G)

Пишемо: $g \cdot x \overset{def}{=} \mu(g, x)$.

Нека је $\sim$ релација на X дата са

$$x \sim y \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\exists g \in G)\ y = g \cdot x$$

$\sim$ је релација еквиваленције.

$\Omega_x \overset{def}{=} \{ g \cdot x \mid g \in G \}$ је орбита од x

(тј. то је класа еквиваленције $\sim$).

деф **дефиниција** Дејство је слободно ако за све $g \in G \setminus \{e\}$ пресликавање $\mu(g, \cdot)$ нема фиксних тачака, тј.

$$(\forall x \in X)\ \mu(g, x) \neq x$$

(тј. $g \cdot x \neq x$.)

дефиниција: $X/G \overset{def}{=} X/\sim$ је простор орбита.

Напомена: Генерално X може бити било који скуп, али нама је битан случај кад је X тополошки пр. Тада се подразумева да је за свако $g \in G$ преслик.

$$\mu(g, \cdot) : X \to X$$

заправо хомеоморфизам. Кад је X топ. пр. и на $X/\sim$ се може дефинисати топологија, па је и X/G топ. пр.

$\boxed{2.}$ Доказати да је са $\mu(k, z) = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \cdot z$ дато дејство групе $\mathbb{Z}_n$ на

(а) S^1; (б) D^2;

и одредити да ли су та дејства слободна и њихове просторе орбита.

решење (а) $\mu : \mathbb{Z}_n \times S^1 \longrightarrow S^1$

Треба проверити (1) и (2) из деф.

$$(1)\ \mu(k, \mu(l, z)) = \mu(k, e^{i\frac{2l\pi}{n}} \cdot z) =$$

$$= e^{i\frac{2k\pi}{n}} e^{i\frac{2l\pi}{n}} \cdot z = e^{i\frac{2(k+l)\pi}{n}} \cdot z =$$

$$= e^{i\frac{2(k+_n l)\pi}{n}} \cdot z = \mu(k+_n l, z).$$

$+_n$ је сабирање у $\mathbb{Z}_n$ тј. то је сабирање mod n.

Како је $e^{i2\pi}=1$, зато $e^{i\frac{2(k+l)\pi}{n}} = e^{i\frac{2(k+_n l)\pi}{n}}$.

(2) неутрал у $\mathbb{Z}_n$ је 0:

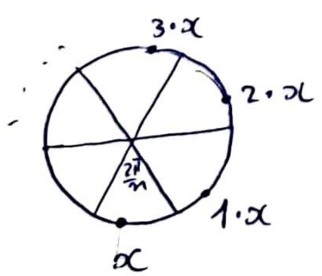
$$\mu(0,z) = e^{i\frac{2\cdot 0\cdot \pi}{n}} \cdot z = z$$

(1) + (2) $\Rightarrow$ μ јесте дејство.

Да ли је слободно?

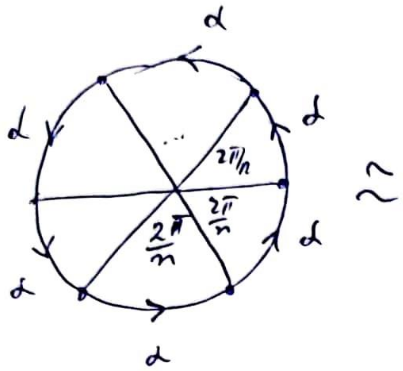
За $k \in \mathbb{Z}_n\setminus\{0\}$, $\mu(k,\cdot)$ је ротација круга S^1 за угао $\frac{2k\pi}{n}$. Ротација нема фиксних тачака па дејство јесте слободно.

Шта је $S^1/\mathbb{Z}_n$?



Дакле,

Дакле,

$S^1/\mathbb{Z}_n \approx$ 

$\approx$ 

$\approx S^1$

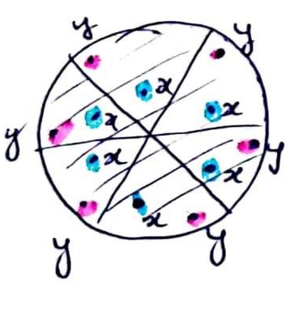
Закључак: $S^1/\mathbb{Z}_n \approx S^1$.

(б) μ јесте дејство (исто као у (а))

Да ли је слободно?

За $k \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$, $\mu(k,\cdot)$ је ротација диска D^2 за угао $\frac{2k\pi}{n}$, а свака ротација фиксира центар диска, па дејство није слободно.

Шта је $D^2/\mathbb{Z}_n$?



Дакле, $D^2/\mathbb{Z}_n \approx$ 

$\approx$ 

$= D^2$

Закључак: $D^2/\mathbb{Z}_n \approx D^2$. □

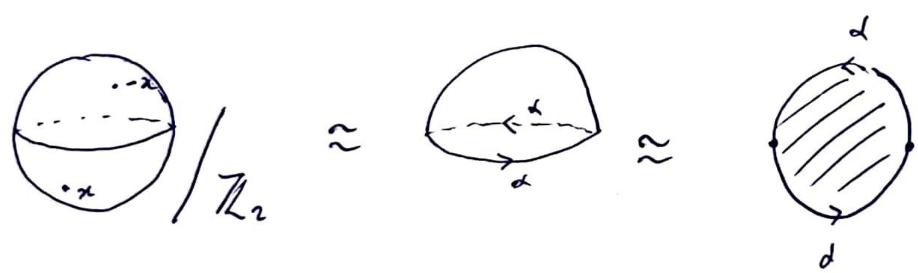
теорема Ако је X Хауздорфов тополошки простор, G коначна група, $G \neq 0$ и G слободно дејствује на X, онда је $\pi : X \longrightarrow X/G$ наткривање.

пример $\mathbb{Z}_2$ слободно дејствује на S^2

$$\mu : \mathbb{Z}_2 \times S^2 \longrightarrow S^2 \text{ је дато са:}$$

$$\mu(0, x) := x$$
$$\mu(1, x) := -x$$

Шта је простор орбита $S^2/\mathbb{Z}_2$?



$= \mathbb{R}P^2$

Имамо наткривање $\pi : S^2 \to S^2/\mathbb{Z}_2$, тј.

$\pi : S^2 \to \mathbb{R}P^2$. ■

Ако је B повезан, $p : E \to B$ наткривање, онда

$$(\forall b_1, b_2 \in B) \quad \underbrace{|p^{-1}(\{b_1\})|}_{\text{број тачака које се сликају у } b_1} = \underbrace{|p^{-1}(\{b_2\})|}_{\text{број тачака које се сликају у } b_2}$$

Претходно запажање мотивише следећу дефиницију.

ДЕФ дефиниција Ако је B повезан, $p: E \to B$ наткривање, онда је број листова овог наткривања дефинисан као $n = |p^{-1}(\{b\})|$, за било које $b \in B$. Кажемо да је ово наткривање n-лисно.

ПР пример (1) $S^2 \longrightarrow \mathbb{R}P^2$ је дволисно наткривање;

(2) свако једнолисно наткривање је хомеоморфизам.

СТАВ став Ако је $p: E \to B$ наткривање, E и B путно повезани, онда је $\pi_1(E) \leq \pi_1(B)$. ($\leq$ значи подгрупа)

Индекс $[\pi_1(B) : \pi_1(E)]$ је број листова наткривања.

(Ако су групе G и H коначне, онда $[G:H] = \frac{|G|}{|H|}$)

$\boxed{3.}$ Да ли постоје наткривања

(а) $T^2 \to \mathbb{R}P^2$; (б) $\mathbb{R}^2 \to S^2$; (в) $\mathbb{R}P^2 \to T^2$;

(г) $C \to M$; (д) $S^2 \to \mathbb{R}^2$?

решење

(а) Ако би постојало наткривање $T^2 \to \mathbb{R}P^2$, онда

$$\underset{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}{\underset{\shortparallel}{\pi_1(T^2)}} \leq \underset{\mathbb{Z}_2}{\underset{\shortparallel}{\pi_1(\mathbb{R}P^2)}}$$ што је немогуће

јер је $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ бесконачна, а $\mathbb{Z}_2$ коначна гр.

$\Rightarrow$ $\boxed{T^2 \not\to \mathbb{R}P^2.}$

(б) $\pi_1(\mathbb{R}^2) = \pi_1(S^2) = 0$, па је $[\pi_1(S^2) : \pi_1(\mathbb{R}^2)] = 1$, тј. ако постоји наткривање $\mathbb{R}^2 \to S^2$, оно мора бити једнолисно, тј. хомеоморфизам, а знамо $\mathbb{R}^2 \not\cong S^2$.

$\Rightarrow$ $\boxed{\mathbb{R}^2 \not\to S^2}$

(в) Ако би постојало $\mathbb{R}P^2 \to T^2$, онда

$$\underset{\mathbb{Z}_2}{\underset{\shortparallel}{\pi_1(\mathbb{R}P^2)}} \leq \underset{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}{\underset{\shortparallel}{\pi_1(T^2)}}$$ што је немогуће

јер $\mathbb{Z}_2$ има елементе коначног реда, а $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ нема

$\Rightarrow$ $\boxed{\mathbb{R}P^2 \not\to T^2}$

(г) Имамо дејство $\mathbb{Z}_2$ на C, $\mu : \mathbb{Z}_2 \times C \to C$

$$\mu(0,x) := x \,, \quad \mu(1,x) := -x \,,$$

па $C \to C/\mathbb{Z}_2$.

Шта је $C/\mathbb{Z}_2$?

$\Rightarrow \boxed{C \to M}$

(д) 1. начин: исто као (б)

2. начин: ако је $p : S^2 \to \mathbb{R}^2$ наткривање, оно је непрекидно и „на", тј. $p(S^2) = \mathbb{R}^2$. Сфера S^2 је компактна па би морала и слика $p(S^2)$ да буде компактна, али $\mathbb{R}^2$ није.

$\Rightarrow \boxed{S^2 \not\to \mathbb{R}^2}.$ ■

Напомена: у делу (г) потребно би било урадити следеће

$\pi_1(C) = \mathbb{Z}$, $\pi_1(M) = \mathbb{Z}$

$\Rightarrow [\pi_1(M) : \pi_1(C)] = \frac{|\mathbb{Z}|}{|\mathbb{Z}|} = 1$

$\Rightarrow$ свако наткривање је једнолисно па и хомеоморфизам, али $M \not\cong C$, па $C \not\to M$.

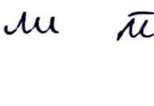
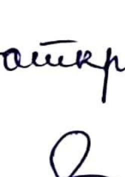
Ово је погрешно јер индекс $[\pi_1(M) : \pi_1(C)]$ не мора бити 1!

Нпр. $\pi_1(C) = 2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$, $\pi_1(M) = \mathbb{Z}$

$$[\underset{\text{сви цели}}{\mathbb{Z}} : \underset{\text{само парни}}{2\mathbb{Z}}] = 2 \quad \blacksquare$$

Теорема Свако наткривање је локални хомеоморфизам.

$\boxed{4.}$ Да ли постоје наткривања $X \to Y$ и $Y \to X$

(а) X:  Y: 

(б) X:  Y: 

решење (а) У X имамо тачку са околином X, а тога нема у Y, па $\boxed{X \not\to Y}$. Слично у

У имамо тачку са околином , а тога нема у X, па $\boxed{Y \not\to X}$

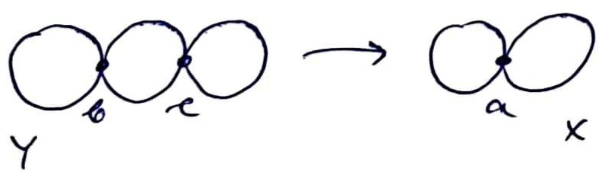
(б) и у X и у Y све тачке имају или околину облика или па је то у реду.

Ако би постојало наткривање $X \to Y$, онда

a мора да се слика у b или c, али онда нема шта из X да се слика у другу тачку (проблем је што у X само једна тачка има околину , а у Y две.)

$\Rightarrow$ $\boxed{X \not\to Y.}$

Ако тражимо наткривање $Y \to X$, онда морају

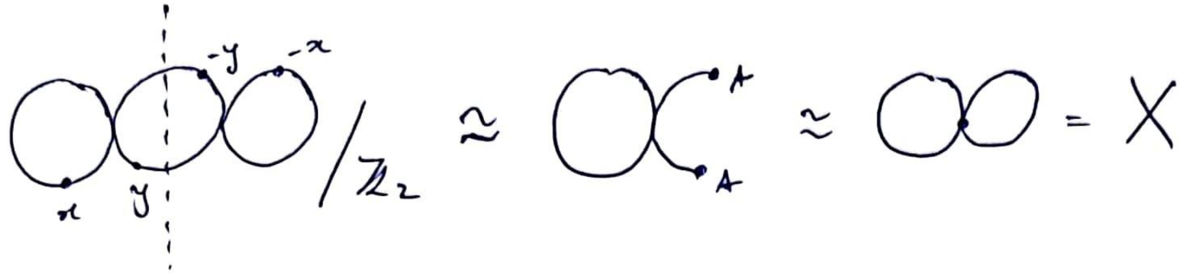


и b и c да се сликају у a. То нам даје идеју.

Имамо дејство $\mathbb{Z}_2 \to Y$, $\mu : \mathbb{Z}_2 \times Y \to Y$

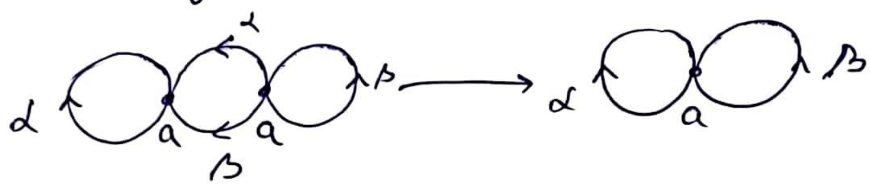
$\mu(0,x) := x$, $\mu(1,x) := -x$, па $Y \to Y/\mathbb{Z}_2$

Шта је $Y/\mathbb{Z}_2$?

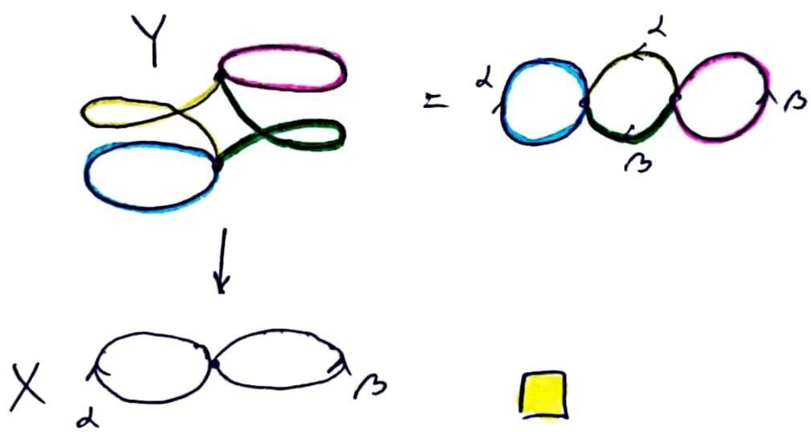


Дакле, $\boxed{Y \to X.}$

2. начин (без дејства): да експлицитно опишемо шта се у шта слика



Илустрација



$\square$