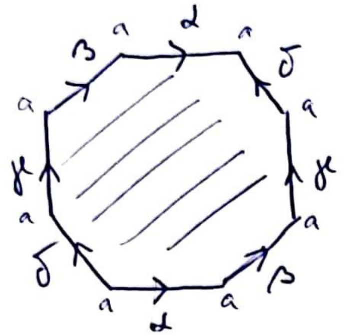
9. Испитати да ли су површи X и Y хомеоморфне:

X: 

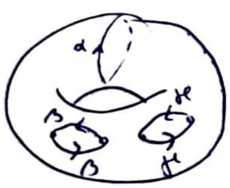
Y: 

решење

$$\pi_1(X) \cong \langle \alpha,\beta,\gamma,\delta \mid \alpha\beta\gamma\delta\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma^{-1}\delta^{-1}=1\rangle$$

$$\pi_1^{ab}(X) \cong Ab\langle \alpha,\beta,\gamma,\delta \mid \alpha\beta\gamma\delta\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma^{-1}\delta^{-1}=1\rangle \cong$$

$$\cong Ab\langle \alpha,\beta,\gamma,\delta \mid - \rangle \cong \mathbb{Z}^4 \Rightarrow X \approx M_2$$

$Y \approx$  $\approx H_{1,2} = N_4$

$\Rightarrow X \not\approx Y$. □

10. Наћи простор X т.д.

(а) $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5$; (б) $\pi_1(X) \cong (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4) * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_3$

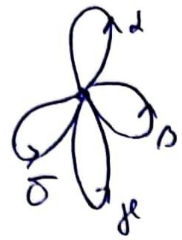
решење

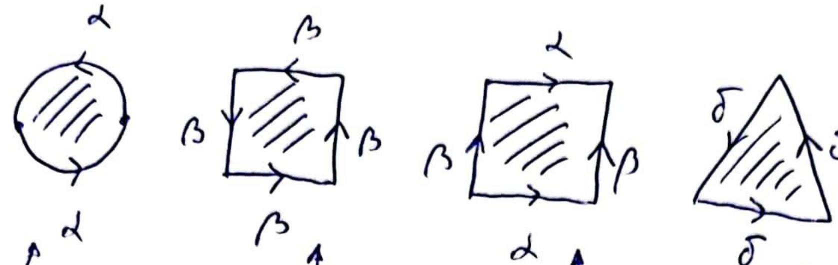
(а) X: 

да би сва темена била иста

због $\mathbb{Z}_3$

због $\mathbb{Z}_5$

због $\oplus$ јер α и β комутирају (б) X: 

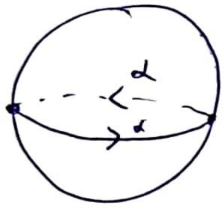
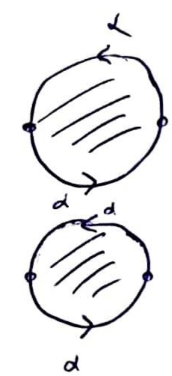


због $\mathbb{Z}_2$ | због $\mathbb{Z}_4$ | због $\oplus$ код $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$ | због $\mathbb{Z}_3$

11. $X = S^2 / _{(x,y,0) \sim (-x,-y,0)}$

(а) $\pi_1(X) = ?$ (б) Да ли је $X \approx \mathbb{R}P^2$?

решење

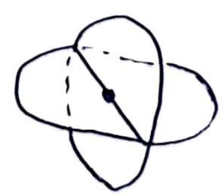
(а) $X =$  $\approx$ 

$\Rightarrow \pi_1(X) \cong \langle \alpha \mid \alpha^2 = 1, \alpha^2 = 1 \rangle \cong$

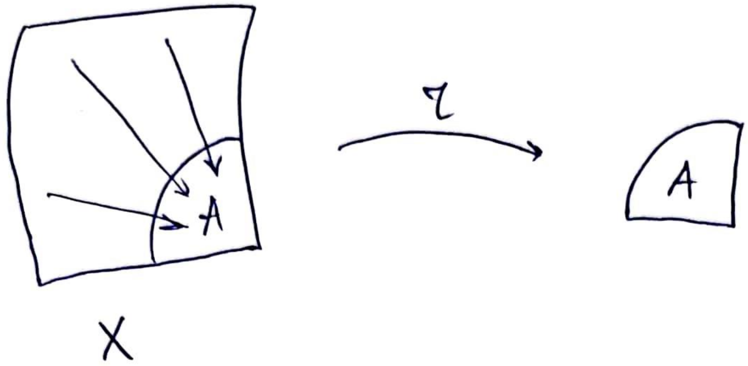
$\cong \langle \alpha \mid \alpha^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$

(б) $\pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}_2 \cong \pi_1(X)$ – ово нам не даје одговор.

$X \not\approx \mathbb{R}P^2$ јер X није површ, а $\mathbb{R}P^2$ јесте.

тачке са α имају околину:  $\not\approx \operatorname{int} D^2$ ■

деф дефиниција Кажемо да је $A \subseteq X$ ретракт простора X ако постоји непрекидно пресликавање $r : X \to A$ т.д. $r|_A = \mathbb{1}_A$.



Дакле, имамо да комутира дијаграм:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\mathbb{1}_A"'] & X \arrow[d, "r"] \\ & A \end{tikzcd}$$

тј. $r \circ i = \mathbb{1}_A$.

Деф дефиниција Кажемо да X има својство фиксне тачке (СФТ) ако свако непрекидно $f : X \to X$ има фиксну тачку, тј. $(\exists x \in X)\ f(x) = x$.

Т теорема Ако X има СФТ и A је ретракт од X, онда и A има СФТ.

Т теорема [Брауер 1] D^n има СФТ за свако $n \in \mathbb{N}_0$.

Т теорема [Брауер 2] S^{n-1} није ретракт од D^n, за свако $n \in \mathbb{N}$.

Т теорема S^n нема СФТ, за свако $n \in \mathbb{N}$.

Ако су X и Y тополошки простори, онда нетр. пресликавање $f: X \to Y$ индукује пресликавање

$$\boxed{f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)}$$

дато са $f_*([u]) = [f \circ u]$.

Особине:

(1) $(\mathbb{1}_X)_* = \mathbb{1}_{\pi_1(X)}$

(2) $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$

Слично, ако су G и H групе и $f: G \to H$ хомоморфизам, онда f индукује

$$\boxed{f^{ab} : G^{ab} \longrightarrow H^{ab}}$$

дато са $f^{ab}([x]) = [f(x)]$

Особине:

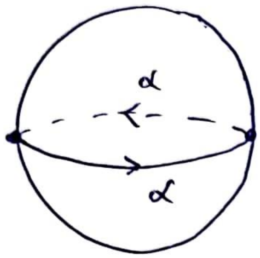
(1) $(\mathbb{1}_G)^{ab} = \mathbb{1}_{G^{ab}}$

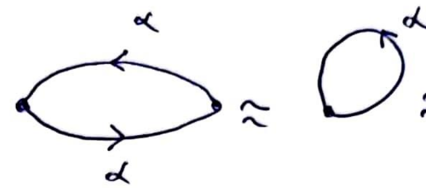
(2) $(g \circ f)^{ab} = g^{ab} \circ f^{ab}$

12. Нека је $X = S^2/_{(x,y,0)\sim(-x,-y,0)}$.

Ако је A екватор, да ли је $A/\sim$ ретракт од X?

решење

$X =$ 

$A/\sim =$  $\approx S^1$

X је исти простор из зад. 11 па већ знамо

да је $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}_2$.

Покажимо да $A/\sim$ није ретракт од X.

Пп. да постоји ретракција $r : X \to A/\sim$, тј.

$$\begin{tikzcd} A/\sim \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\mathbb{1}_{A/\sim}"'] & X \arrow[d, "r"] \\ & A/\sim \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} \pi_1(A/\sim) \arrow[r, "i_*"] \arrow[dr, "\mathbb{1}_{\pi_1(A/\sim)}"'] & \pi_1(X) \arrow[d, "r_*"] \\ & \pi_1(A/\sim) \end{tikzcd}$$

Дијаграм са фундаменталним групама је заправо:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "i_*"] \arrow[dr, "\mathbb{1}"'] & \mathbb{Z}_2 \arrow[d, "r_*"] \\ & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

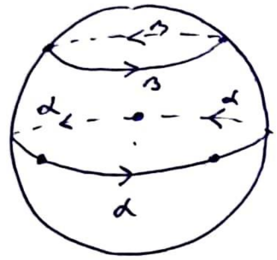
Ово је контрадикција, јер смо добили да је

$$1_{\mathbb{Z}} = r_* \circ i_* ,$$

али r_* не може бити „на" јер слика $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}$, па ни $1_{\mathbb{Z}}$ није „на" ↯.

Дакле, не постоји r. ■

13. X:

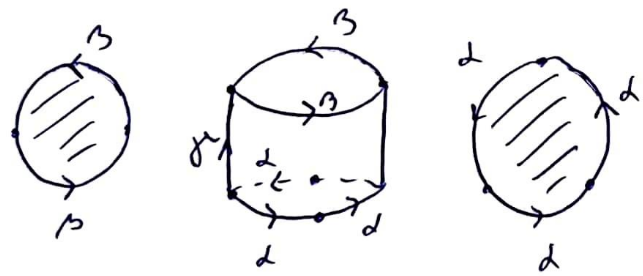


(а) $\pi_1(X) = ?$

(б) Да ли је $A/\sim$ ретракт од X? (A = екватор)

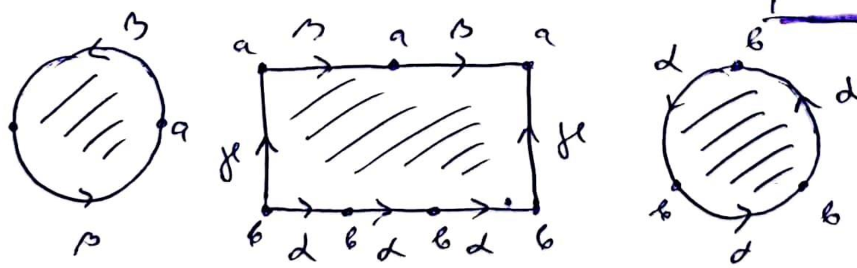
решење

(а) $X \simeq$



a скупимо у тачку да би решили проблем $a \neq b$

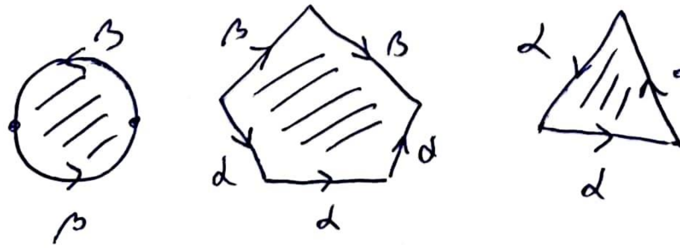
$\simeq$



$/a$

$\simeq$

$\simeq$



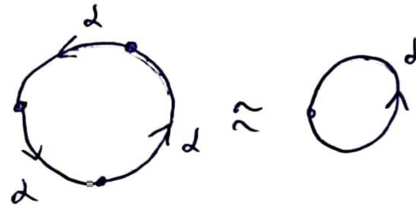
$$\pi_1(X) \cong \langle \alpha, \beta \mid \beta^2 = 1, \underbrace{\alpha^3 = \beta^2}, \alpha^3 = 1 \rangle \cong$$

сувишно јер следи из осталих релација

$$\cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha^3 = 1, \beta^2 = 1 \rangle \cong$$

$$\cong \langle \alpha \mid \alpha^3 = 1 \rangle * \langle \beta \mid \beta^2 = 1 \rangle \cong$$

$$\cong \mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_2$$

Са друге стране, $A/\sim \;=$  $\approx S^1$,

па је $\pi_1(A/\sim) \cong \mathbb{Z}$.

Пп. $A/\sim$ јесте ретракт од X.

$$\begin{tikzcd} A/\sim \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\mathbb{1}_{A/\sim}"'] & X \arrow[d, "q"] \\ & A/\sim \end{tikzcd} \quad \overset{\pi_1}{\rightsquigarrow} \quad \begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "i_*"] \arrow[dr, "\mathbb{1}"'] & \mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_2 \arrow[d, "q_*"] \\ & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

Немамо контрадикцију јер је $\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_2$ бесконачна група па радимо ab

$$\overset{ab}{\rightsquigarrow} \quad \begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "i_*^{ab}"] \arrow[dr, "\mathbb{1}"'] & \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2 \arrow[d, "q_*^{ab}"] \\ & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

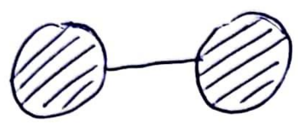
Ово је немогуће јер је $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2$ коначна гр., па q_*^{ab} није „на", па $\mathbb{1}$ није „на" ↯

$\Rightarrow$ $A/\sim$ није ретракт. □

14. Испитати СФТ следећих простора

(а)

X :

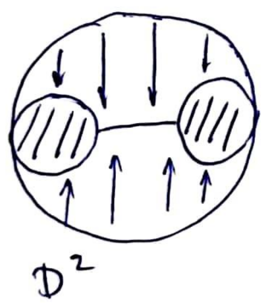


(б) Y :

(в) Z :

решење

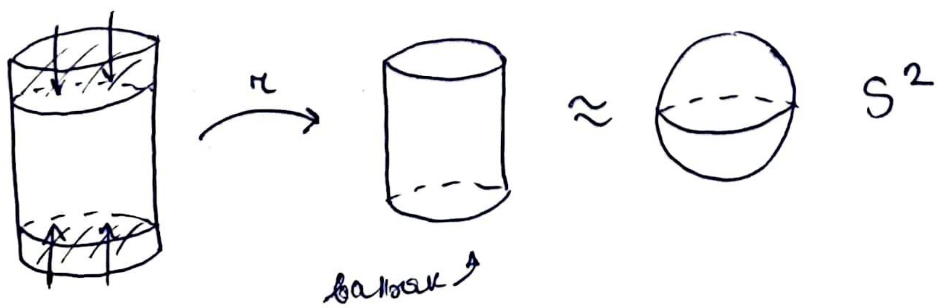
(а) Знамо D^n има СФТ, $\forall n$ (Брауер).



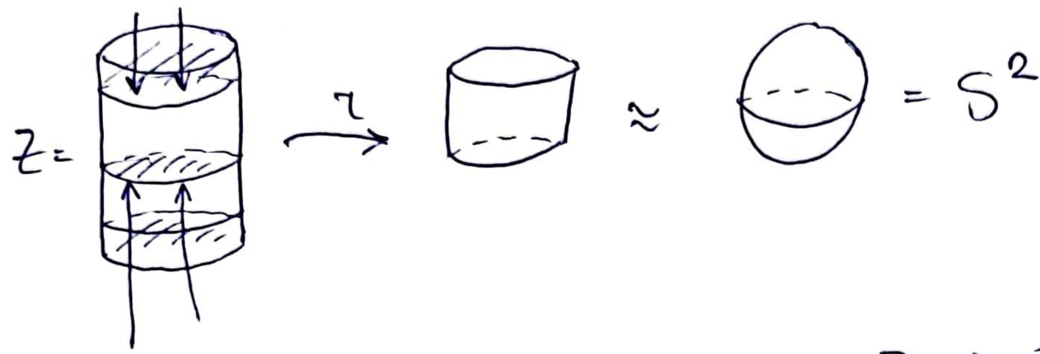
X је ретракт од D^2 и D^2 има СФТ, па и X има СФТ.

(б) Знамо S^n нема СФТ, $\forall n$.

Y :

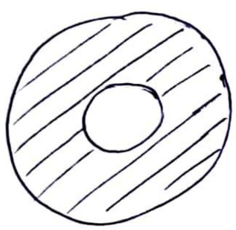


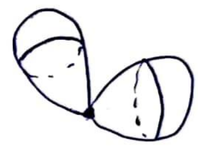
S^2 је ретракт од Y и S^2 нема СФТ $\Rightarrow$ Y нема СФТ (в) Слично као (б)

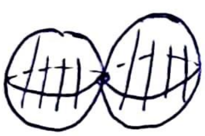
$Z =$ 

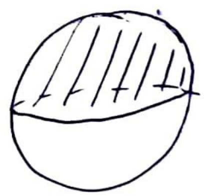
S^2 нема СФТ и ретракт је од $Z \Rightarrow Z$ нема СФТ. ∎

15. Испитати СФТ следећих простора:

(а) X: 

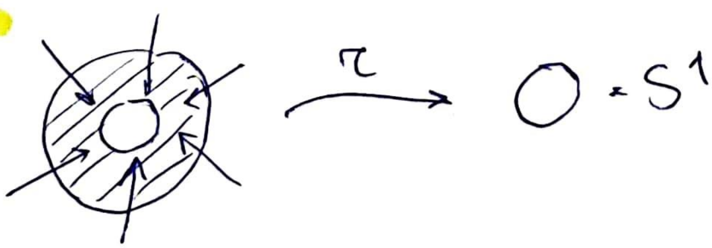
(б) $Y = S^2 \vee S^2 =$ 

(в) Z:  $= D^3 \vee D^3$

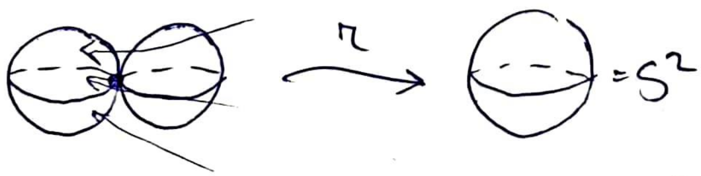
(г) $T =$ 

до пола пуна сфера

решење

(а) $X =$ 

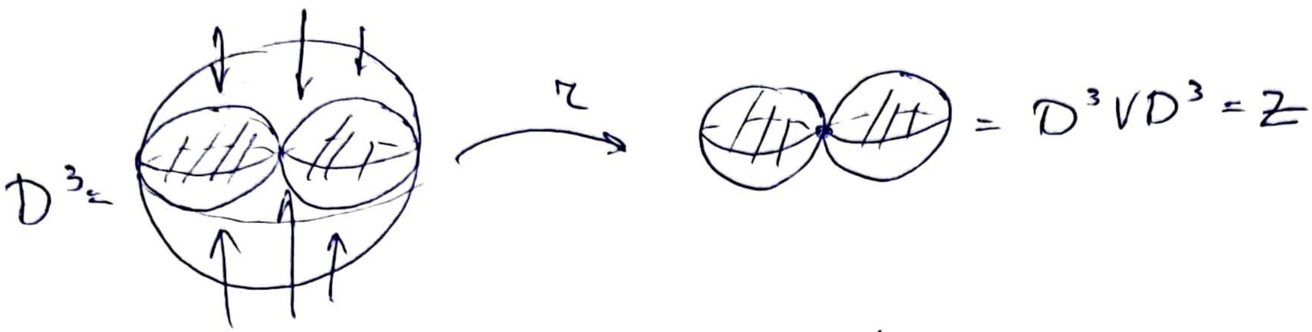
S^1 нема СФТ и ретракт је од $X \Rightarrow X$ нема СФТ

(б) $Y =$ 

$= S^2$ нема СФТ

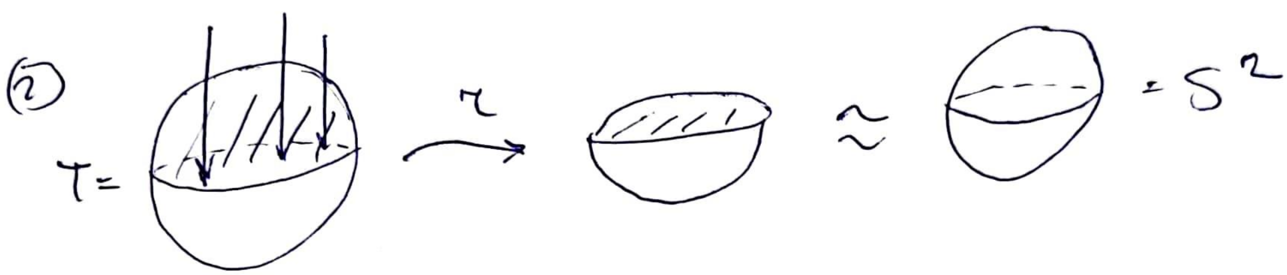
$\Rightarrow Y$ нема СФТ

(б) имамо ретракцију $D^3 \to Z$



D^3 има СФТ $\Rightarrow$ Z има СФТ

(г)



S^2 нема СФТ $\Rightarrow$ T нема СФТ. $\square$

Наткривања

дефиниција Пресликавање $p: E \to B$ је наткривање ако је непрекидно, „на" и

$$(\forall b \in B)(\exists V_b \in \mathcal{T}_B \cap \mathcal{O}(b))\ p^{-1}(V_b) = \bigsqcup_{\alpha \in A_b} U_b^\alpha ,$$

где је $U_b^\alpha \in \mathcal{T}_E$ и $U_b^\alpha \approx V_b$, за свако $\alpha \in A_b$.

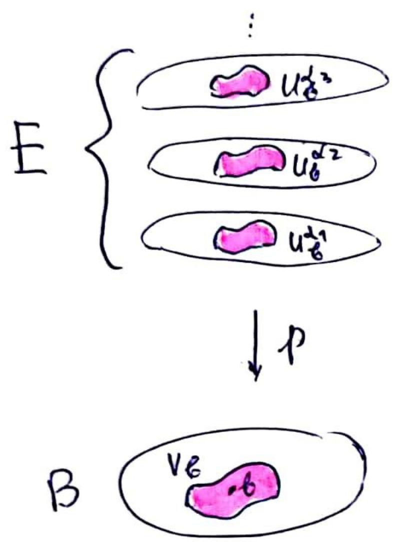
B зовемо базни простор, а E тотални простор.

Пишемо :

$E \to B$ (E наткрива B)

$E \not\to B$ (E не наткрива B)

илустрација :

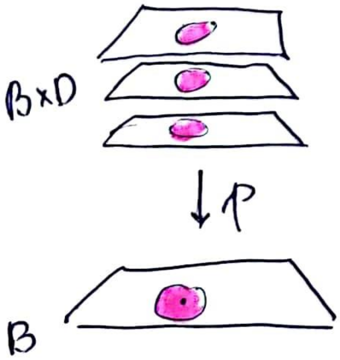


ПР пример (1) дискретно наткривање

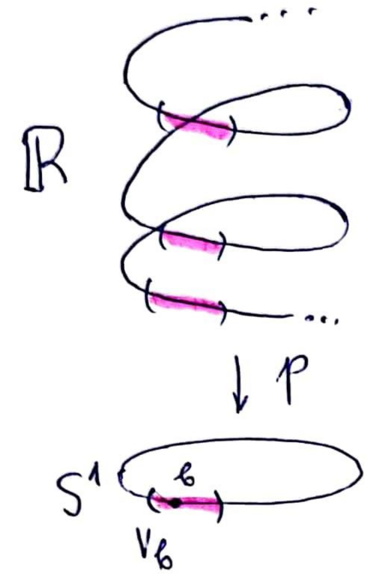
$E = B \times D$, D - дискретан простор

(нпр. D коначан или пребројив)

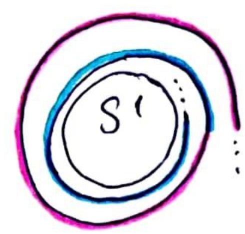
$p : B \times D \to B$ - пројекција на 1. коорд.



(2) $p: \mathbb{R} \to S^1$, $p(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$



$\mathbb{R}$ се „намота“ на S^1

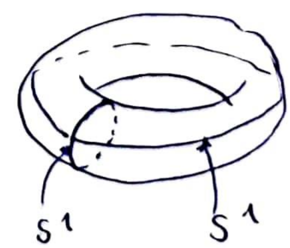


Теорема Ако су $p_1: E_1 \to B_1$ и $p_2: E_2 \to B_2$ наткривања, онда је и $p_1 \times p_2 : E_1 \times E_2 \to B_1 \times B_2$ наткривање $\left((p_1 \times p_2)(e_1, e_2) = \left(p_1(e_1), p_2(e_2)\right)\right)$.

$\boxed{1.}$ Показати да $\mathbb{R}^2$ наткрива T^2.

решење

Приметимо да је $T^2 = S^1 \times S^1$



Из примера (2) знамо $\mathbb{R} \to S^1$,

па из теореме следи да $\mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1 = T^2$.

Дакле, $\mathbb{R}^2$ наткрива T^2. ■