Тицеове трансформације

Ако из неке релације можемо да изразимо неки елемент преко осталих, онда:

(1) бришемо тај елемент;

(2) бришемо ту релацију;

(3) у осталим релацијама га заменимо.

ПР пример

(1) $\langle \alpha, \boxed{\beta}, \gamma, \delta \mid \alpha\beta = \delta\gamma^2, \ \beta\gamma^2 = \alpha^3\beta \rangle \cong$

$\beta = \alpha^{-1}\delta\gamma^2$

$\cong \langle \alpha, \gamma, \delta \mid \alpha^{-1}\delta\gamma^2 \gamma^2 = \alpha^3 \alpha^{-1}\delta\gamma^2 \rangle$

(2)
можемо по потреби и додати генератор и релацију

$\langle \alpha, \beta, \gamma \mid \alpha^2 = \beta^3, \ \alpha\gamma = \gamma\alpha \rangle \cong$

$\cong \langle \alpha, \beta, \gamma, \boxed{\delta} \mid \alpha^2 = \beta^3, \ \alpha\gamma = \gamma\alpha, \ \delta = \alpha\beta\gamma^2 \rangle$

Абелизација групе

$$G = \langle S \mid R \rangle$$

$$G^{ab} \overset{def}{=} \langle S \mid R \cup \{\text{сви из } S \text{ комутирају}\} \rangle$$

Нпр. $\langle \alpha, \beta, \gamma \mid \alpha^3 = \beta^2 \rangle^{ab} \cong$

$$\cong \langle \alpha, \beta, \gamma \mid \alpha^3 = \beta^2,\ \alpha\beta = \beta\alpha,\ \alpha\gamma = \gamma\alpha,\ \beta\gamma = \gamma\beta \rangle$$

Слободни производ група

$$G_1 = \langle S_1 \mid R_1 \rangle, \quad G_2 = \langle S_2 \mid R_2 \rangle$$

$$G_1 * G_2 \overset{def}{=} \langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \rangle$$

Нпр. $\langle \alpha \mid \alpha^2 = 1 \rangle * \langle \beta \mid \beta^3 = 1 \rangle = \langle \alpha, \beta \mid \alpha^2 = 1, \beta^3 = 1 \rangle$

Директни производ група

$$G_1 \oplus G_2 \cong G_1 \times G_2 \cong \langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \cup \{\text{сви из } S_1 \text{ комутирају са свима из } S_2\} \rangle$$

Нпр.

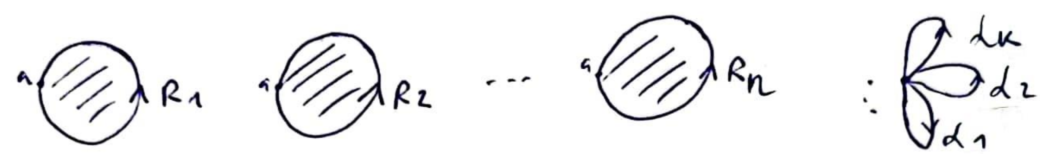
$$\langle \alpha \mid \alpha^2 = 1 \rangle \oplus \langle \beta \mid \beta^3 = 1 \rangle \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha^2 = 1, \beta^3 = 1, \alpha\beta = \beta\alpha \rangle$$

Теорема $\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \oplus \pi_1(Y)$.

Кад је простор $X \vee Y$ „довољно леп" (а код нас ће увек бити) онда је

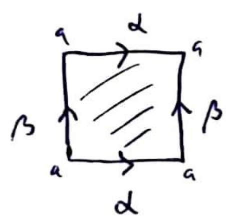
$$\pi_1(X \vee Y) \cong \pi_1(X) * \pi_1(Y).$$

Лема Ако је X дат комплексним моделом

$X \simeq$ 

т.д. се у свим R_i појављује само једно теме

онда је $\pi_1(X) \cong \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \mid R_1 = 1, R_2 = 1, \dots, R_n = 1 \rangle$

Пример $T^2 =$ 

$$\pi_1(T^2) \cong \langle \alpha, \beta \mid \underbrace{\alpha \beta \alpha^{-1} \beta^{-1}}_{R_1} = 1 \rangle \cong$$

$$\cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta = \beta\alpha \rangle \cong$$

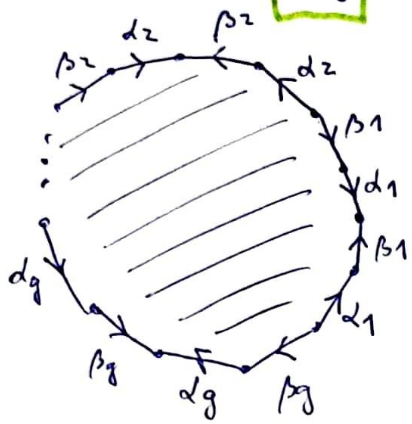
$$\cong \langle \alpha \mid - \rangle \oplus \langle \beta \mid - \rangle \cong$$

$$\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

1. Одредити фундаменталне групе и њихове абелизације за површи M_g и N_h, $g \in \mathbb{N}_0$, $h \in \mathbb{N}$.

решење

M_g



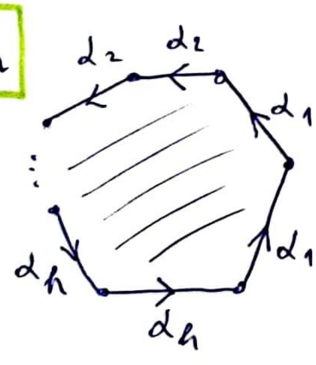
$$\pi_1(M_g) \cong \langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_g, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_g \mid \alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1} \cdot \alpha_2\beta_2\alpha_2^{-1}\beta_2^{-1} \cdots \alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1} = 1 \rangle$$

$$\pi_1^{ab}(M_g) = Ab\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_g, \beta_1, \ldots, \beta_g \mid \alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1} \cdots \alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1} = 1 \rangle \cong$$

сви се скрате јер сада комутирају

$$\cong Ab\langle \underbrace{\alpha_1, \ldots, \alpha_g, \beta_1, \ldots, \beta_g}_{2g \text{ генератора}} \mid - \rangle \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{2g} \cong \mathbb{Z}^{2g}$$

N_h



$$\pi_1(N_h) \cong \langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h \mid \alpha_1^2\alpha_2^2 \cdots \alpha_h^2 = 1 \rangle$$

$$\pi_1^{ab}(N_h) \cong Ab\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_h \mid \alpha_1^2\alpha_2^2 \cdots \alpha_h^2 = 1 \rangle \cong$$

$$\cong Ab\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_h \mid (\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_h)^2 = 1 \rangle \cong$$

додано β

$$\cong Ab\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_h, \beta \mid (\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_h)^2 = 1,\ \beta = \alpha_1 \cdots \alpha_h \rangle \cong$$

избацимо α_h

$$\cong Ab\langle \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \beta \mid \beta^2 = 1 \rangle \cong$$

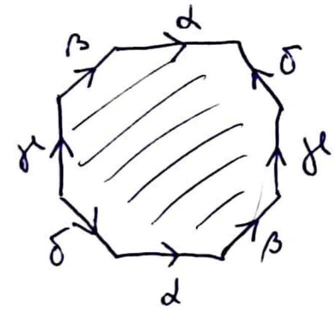
$$\cong \langle \alpha_1 \mid - \rangle \oplus \dots \oplus \langle \alpha_{n-1} \mid - \rangle \oplus \langle \beta \mid \beta^2 = 1 \rangle \cong$$

$$\cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{n-1} \oplus \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}^{n-1} \oplus \mathbb{Z}_2 \quad \square$$

Специјално, из претходног задатка имамо

$$\pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong \pi_1(N_1) \cong \langle \alpha \mid \alpha^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2.$$

Приметимо да никоје две од површи M_g и N_k нису хомотопски еквивалентне (а ни хомеоморфне) јер су им абелизације фунд. гр. различите.

2. X: 

Доказати да је X површ и одредити која.

Решење: Лако се провери да X јесте површ (свака тачка има околину хомеоморфну отвореном диску).

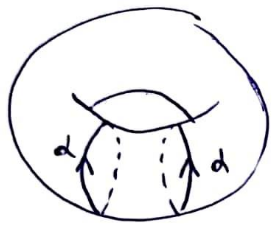
$$\pi_1(X) \cong \langle \alpha, \beta, \gamma, \delta \mid \alpha\beta\gamma\delta\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma^{-1}\delta = 1 \rangle \leftarrow$$

одавде не знамо шта је X

$$\pi_1^{ab}(X) \cong Ab\langle \alpha,\beta,\gamma,\delta \mid \alpha\beta\gamma\delta\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma^{-1}\delta = 1\rangle \cong$$

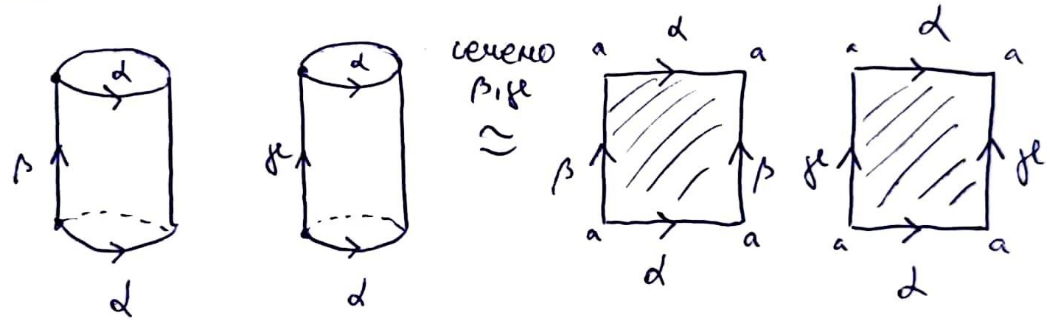
$$\cong Ab\langle \alpha,\beta,\gamma,\delta \mid \delta^2 = 1\rangle \cong \mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}_2$$

$$\Rightarrow \quad X \cong N_4 \quad \square$$

$\boxed{3.}$ X: 

Одредити $\pi_1(X)$.

решење

$X \cong$ 

$$\pi_1(X) \cong \langle \alpha,\beta,\gamma \mid \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = 1,\ \alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma^{-1} = 1\rangle \cong$$

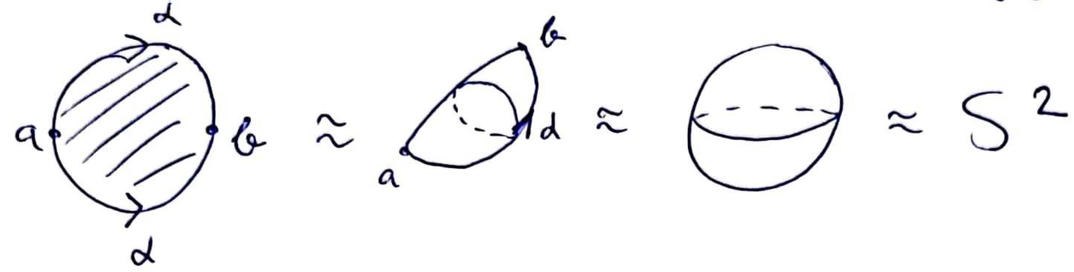
$$\cong \langle \alpha,\beta,\gamma \mid \alpha\beta = \beta\alpha,\ \alpha\gamma = \gamma\alpha\rangle \cong$$

$$\cong \langle \alpha \mid -\rangle \oplus \langle \beta,\gamma \mid -\rangle \cong$$

$$\cong \langle \alpha \mid -\rangle \oplus \left(\langle \beta \mid -\rangle * \langle \gamma \mid -\rangle\right) \cong$$

$$\cong \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z} * \mathbb{Z}) \quad \square$$

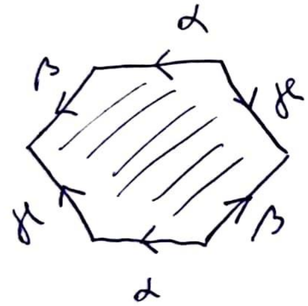
пример Кад рачунамо π_1 помоћу каноничних модела битно је да сва темена буду иста.



$$\pi_1(S^2) = 0 \neq \langle \alpha \mid \alpha\alpha^{-1} = 1 \rangle \cong \langle \alpha \mid - \rangle \cong \mathbb{Z}$$

Проблем различитих темена лако решавамо што ћемо видети у следећем задатку.

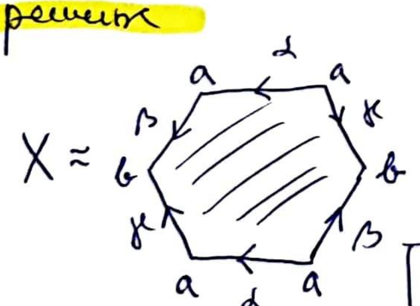
$\boxed{4.}$ $X:$



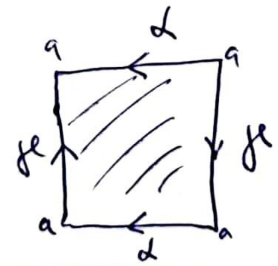
$\pi_1(X) = ?$

решење

$X \cong$



$\overset{/\beta}{\cong}$



$\cong K = N_2$

β је дуж јер иде од а до в па можемо да је скупимо у тачку јер $\beta \simeq *$

могли смо и то је да сечемо јер је и γ дуж, али то α нисмо јер је α кружница

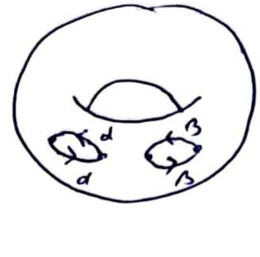
$$\pi_1(X) \cong \pi_1(K) \cong \langle \alpha, \gamma \mid \alpha^{-1}\gamma^{-1}\alpha\gamma^{-1} = 1 \rangle \quad \square$$

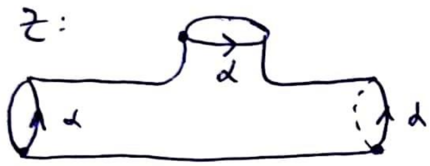
У претходном задатку смо користили:

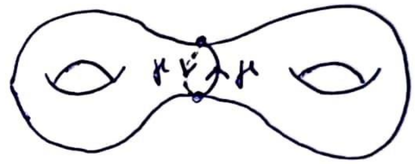
теорема $X \simeq Y \Rightarrow \pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$.

5. Одредити фундаменталне групе простора:

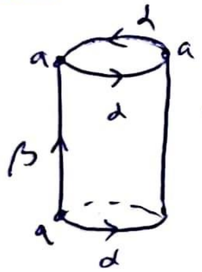
(а) X: 

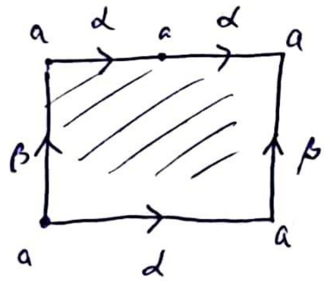
(б) Y: 

(в) Z: 

(г) T: 

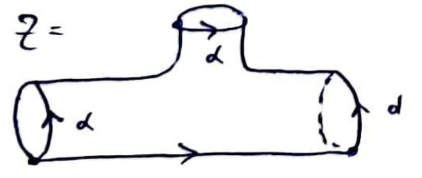
решење

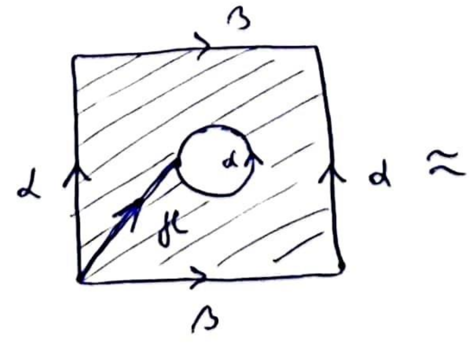
(а) $X \approx$ 

$\approx$ 

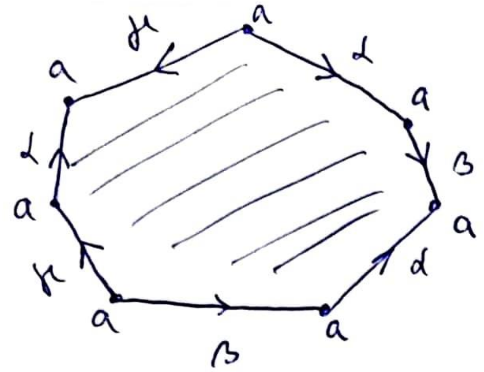
$\pi_1(X) \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta\alpha^{-2}\beta^{-1} = 1 \rangle$

(б) $Y \approx H_{1,2} \approx N_{2\cdot 1+2} \approx N_4 \Rightarrow \pi_1(Y) \cong \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \mid \alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_4^2 = 1 \rangle$

(в) $Z =$ 

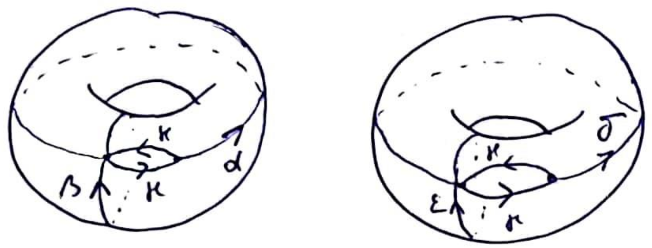
$\approx$ 

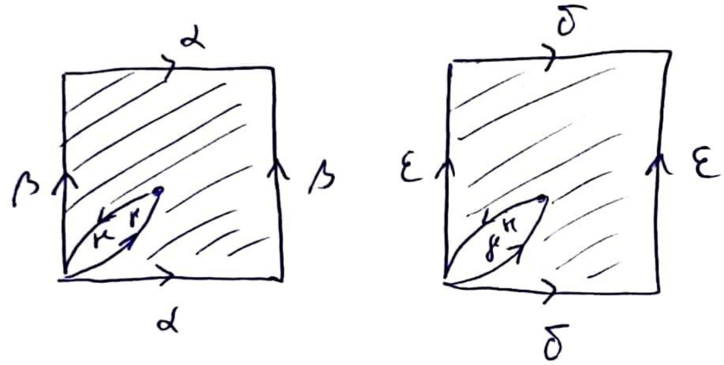
$\approx$

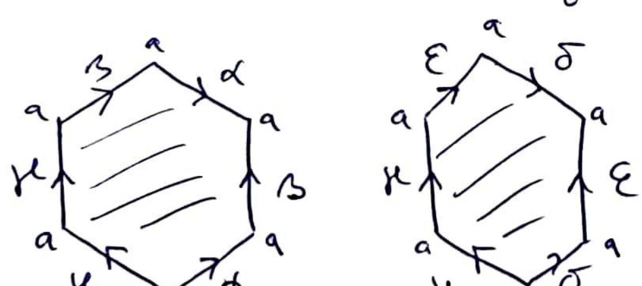
$\approx$ 

$$\Rightarrow \pi_1(Z) \cong \langle \alpha, \beta, \gamma \mid \alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma\alpha^{-1}\gamma^{-1}\beta = 1 \rangle$$

(n)

$T \approx$  $\approx$

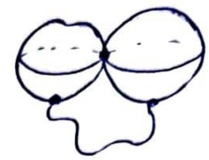
$\approx$  $\approx$

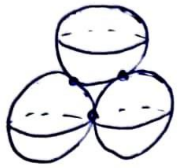
$\approx$ 

$$\Rightarrow \pi_1(T) \cong \langle \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \mid \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma^{-2} = 1,\ \delta\varepsilon\delta^{-1}\varepsilon^{-1}\gamma^{-2} = 1 \rangle$$

$\blacksquare$

6. Одредити фундаменталне групе простора

(а) $S^1 \vee S^1$; (б) $X = S^2/_{N\sim S}$; (в) $Y =$ 

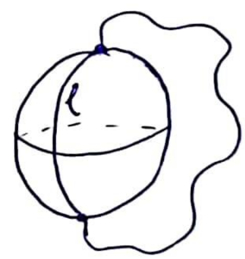
(г) Z: 

решење

Корисно:
$$\boxed{\begin{aligned} &\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \\ &\pi_1(S^n) = 0, \ n \geq 2 \end{aligned}}$$

(а) $\pi_1(S^1 \vee S^1) \cong \pi_1(S^1) * \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

(б) $X =$ 

$/_{N\sim S} \simeq$  $\cong$ 

$\simeq$

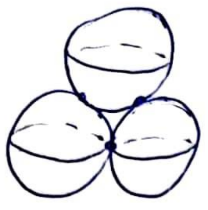
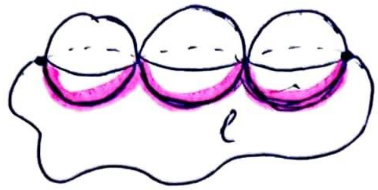
уштипнута сфера

$\cong$  $\simeq S^1 \vee S^2 \Rightarrow \pi_1(X) \cong \underbrace{\pi_1(S^1)}_{\mathbb{Z}} * \underbrace{\pi_1(S^2)}_{0} \cong \mathbb{Z}$

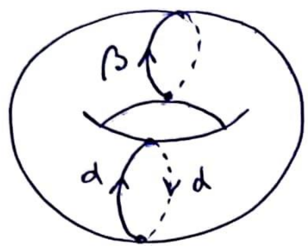
(в) $Y \simeq$ 

$\cong$  $\simeq S^1 \vee S^2 \vee S^2$

$\Rightarrow \pi_1(Y) \cong \underbrace{\pi_1(S^1)}_{\mathbb{Z}} * \underbrace{\pi_1(S^2)}_{0} * \underbrace{\pi_1(S^2)}_{0} \cong \mathbb{Z}$

(г) $Z \simeq$  $\simeq$  $\overset{hl}{\simeq}$  $\simeq$

$$\simeq S^1 \vee S^2 \vee S^2 \vee S^2 \Rightarrow \pi_1(Z) \cong \mathbb{Z} \quad \blacksquare$$

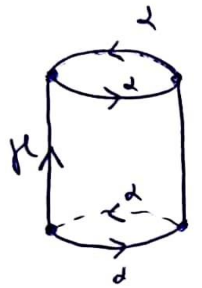
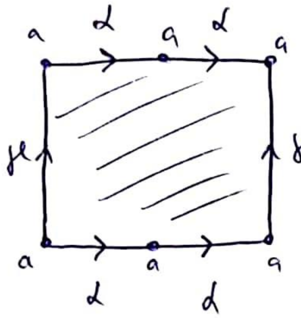
$\boxed{8.}$ X: 

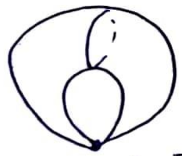
(а) $\pi_1(X) = ?$

(б) $\pi_1(X/\alpha) = ?$

(в) $\pi_1(X/(\alpha\cup\beta)) = ?$

решење

(а) $X \simeq$  $\simeq$  $\Rightarrow \pi_1(X) \cong \langle \alpha, \mu \mid \alpha^2\mu\alpha^{-2}\mu^{-1} = 1\rangle$

(б) $X/\alpha \simeq$  $\simeq S^1 \vee S^2 \Rightarrow \pi_1(X/\alpha) \cong \mathbb{Z}$

уштинута сфера

(в) $X/(\alpha\cup\beta) \simeq$  $\simeq$  $\simeq$

$$\simeq S^1 \vee S^2 \vee S^1 \vee S^2 \Rightarrow \pi_1(X/(\alpha\cup\beta)) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \quad \blacksquare$$