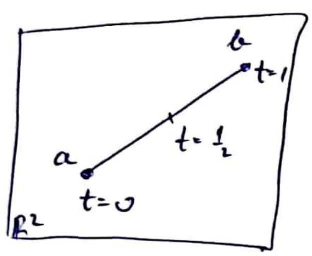
2. Ако су $f,g: X \to S^2$ непр. и за свако $x \in X$ је $f(x) \neq -g(x)$, онда је $f \simeq g$.

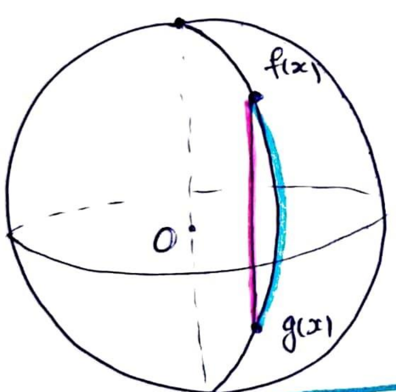
решење

Генерално, ако су $a, b \in \mathbb{R}^n$ онда израз

$(1-t)\cdot a + t\cdot b$, $t \in [0,1]$ представља све тачке са дужи $[a, b]$



Специјално код нас, $f(x)$ и $g(x)$ су неке тачке на сфери S^2, а $(1-t)f(x)+tg(x)$ су тачке на дужи која их спаја. Хоћемо хомотопију $H: X \times I \to S^2$, али не можемо узети само



$$\boxed{(1-t)f(x)+tg(x)}$$

јер то не припада S^2 већ

узимамо:
$$\boxed{H(x,t) := \frac{(1-t)f(x)+tg(x)}{\|(1-t)f(x)+tg(x)\|}} \in S^2$$

H је добро деф. и непр. јер $\|\cdot\|$ у имениоцу никад није 0 (због услова $f(x) \neq -g(x)$ дуж никад не пролази кроз 0).

$$H(x,0) = \frac{f(x)}{\underbrace{\|f(x)\|}_{=1}} = f(x)$$

$$H(x,1) = \frac{g(x)}{\underbrace{\|g(x)\|}_{=1}} = g(x)$$

$\Rightarrow H : f \simeq g$. $\blacksquare$

Претходни зад. важи за свако S^n, не само за S^2.

Користићемо ознаке:

$\mathbb{1}_X : X \to X$ идентичко пресликавање на X

$\mathbb{1}_X(x) = x$, за све $x \in X$

$a_X : X \to X$ антиподално пресликавање

$a_X(x) = -x$, за све $x \in X$

(у просторима X где постоји $+, -$)

$\boxed{3.}$ Нека је $f : S^n \to S^n$ непр.

(а) Ако f нема фиксних тачака, онда $f \simeq a_{S^n}$;

б) Ако је $(\forall x \in S^n)\ f(x) \neq -x$, онда $f \simeq \mathbb{1}_{S^n}$.

решење

(а) $(\forall x \in S^n)\ f(x) \neq x = -(-x) = -a_{S^n}(x) \xRightarrow{\text{зад. 2}} f \simeq a_{S^n}$

(б) $(\forall x \in S^n)\ f(x) \neq -x = -\mathbb{1}_{S^n}(x) \xRightarrow{\text{зад.2}} f \simeq \mathbb{1}_{S^n}$. $\blacksquare$

деф дефиниција Нека су X и Y тополошки простори. Кажемо да су X и Y хомотопски еквивалентни ако постоје пресликавања $\varphi : X \to Y$ и $\psi : Y \to X$ тд. $\varphi \circ \psi \simeq \mathbb{1}_Y$ и $\psi \circ \varphi \simeq \mathbb{1}_X$

деф дефиниција Простор X је контрактибилан ако је $X \simeq *$.

$\boxed{\text{* је простор који се састоји од једне тачке}}$

Мало детаљније $X \simeq *$ значи:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "\varphi"] & * \arrow[l, bend left, "\psi"] \end{tikzcd}$$

$\varphi \circ \psi \simeq \mathbb{1}_*$ и $\psi \circ \varphi \simeq \mathbb{1}_X$

$\varphi \circ \psi$ је баш једнако $\mathbb{1}_*$, па заправо имамо

$X \simeq * \iff \psi \circ \varphi \simeq \mathbb{1}_X$

$\psi \circ \varphi$ је константно пресликавање које свако $x \in X$ слика у $\psi(*) \in X$. Дакле, $\psi \circ \varphi = c_{\psi(*)}$.

Коначно,

$$X \simeq * \iff c_{\psi(*)} \simeq \mathbb{1}_X$$

Ако је простор X путно повезан, онда

$$(\forall x_1, x_2 \in X) \quad c_{x_1} \simeq c_{x_2},$$

па ћемо писати и

$$X \simeq * \iff \underbrace{1_X \simeq const}$$

неко константно пресликавање

$\boxed{4.}$ Доказати да је $\mathbb{R}^n$ контрактибилан.

решење Не користимо деф. већ показујемо $1_{\mathbb{R}^n} \simeq const$.

Нека је $H : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$ дато са $H(x,t) = x \cdot t$

$$\left.\begin{array}{l} H(x,0) = 0 = c_0(x) \\ H(x,1) = x = 1_{\mathbb{R}^n}(x) \end{array}\right\} \Rightarrow H : c_0 \simeq 1_{\mathbb{R}^n}$$

$$\Downarrow$$

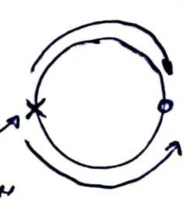
$$\mathbb{R}^n \simeq * \quad \blacksquare$$

ПР

пример Интуитивно $X \simeq *$ значи да се може непрекидно скупити у тачку.

(1) $\mathbb{R}^2 \simeq *$

(2) $S^1 \not\simeq *$



(3) $S^n \not\simeq *$

(4) $[a, b] \simeq *$

Теорема Ако је $A \subseteq X$, $A \simeq *$ и пар (X,A) има својство проширења хомотопије, онда је $X \simeq X/A$.

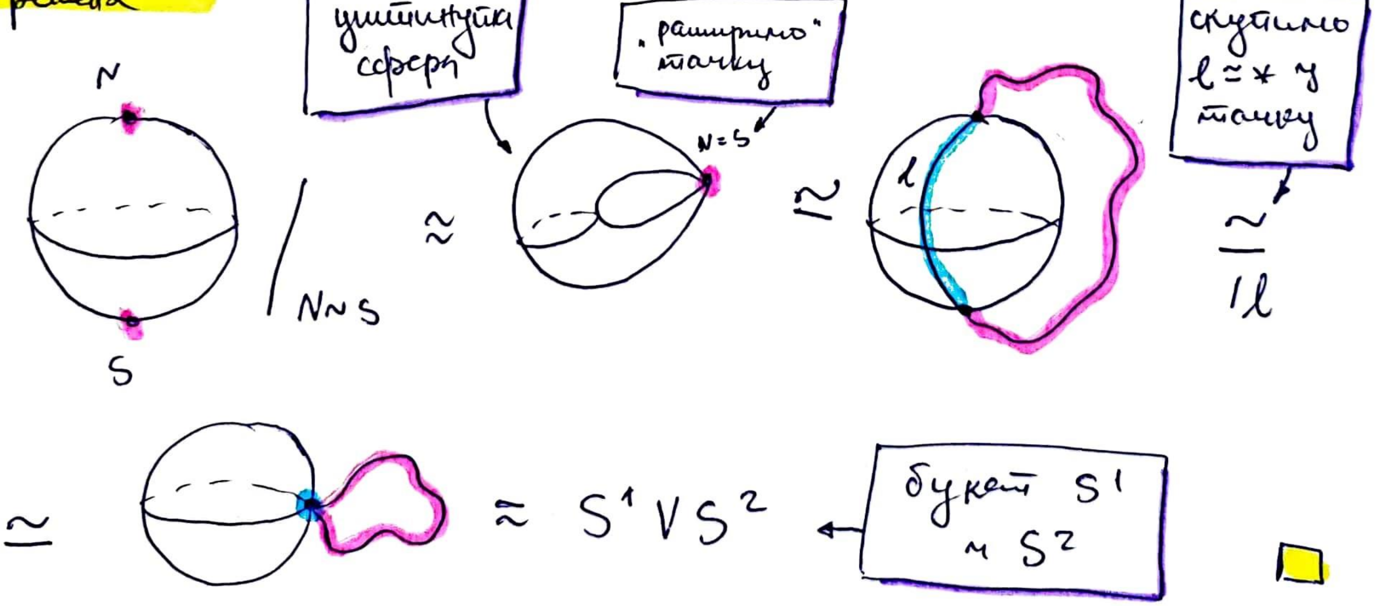
(Нисмо дефинисали шта је тачно СПХ, али сви парови (X,A) са којима се сусрећемо су довољно „лепи", тј. имају ово својство па можемо користити

$$A \simeq * \Rightarrow X \simeq X/A.)$$

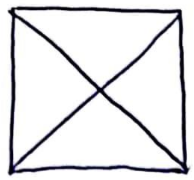
Претходна теорема нам каже да контрактибилне скупове (нпр. дужи, дискове) можемо скупити у тачку, а по потреби можемо урадити и обрнуто да тачку „раширимо" у дуж, диск, итд.

$\boxed{5.}$ Одредити чему је $S^2/_{N\sim S}$ хомотопски еквивалентно (N = северни пол, S = јужни пол)

решење

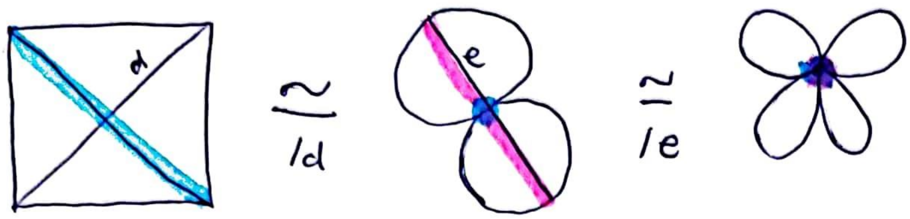


6.



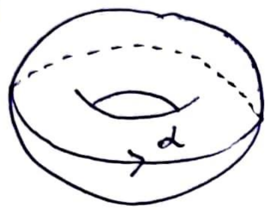
$\simeq$?

решење



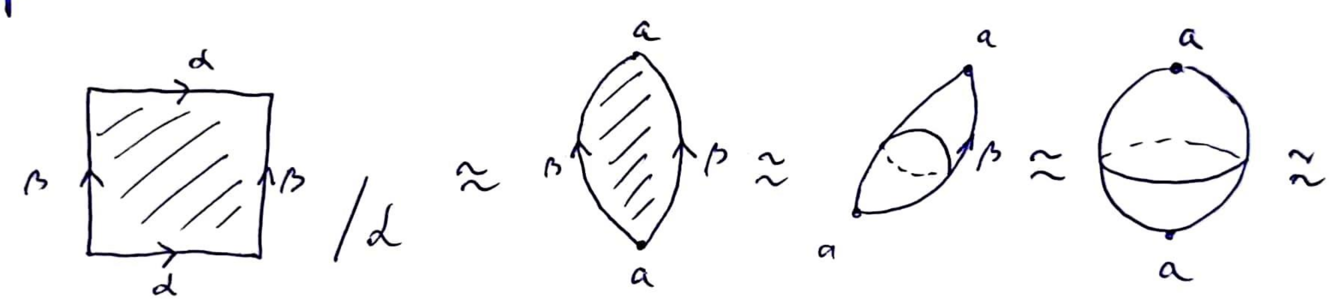
$\approx S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1$ ∎

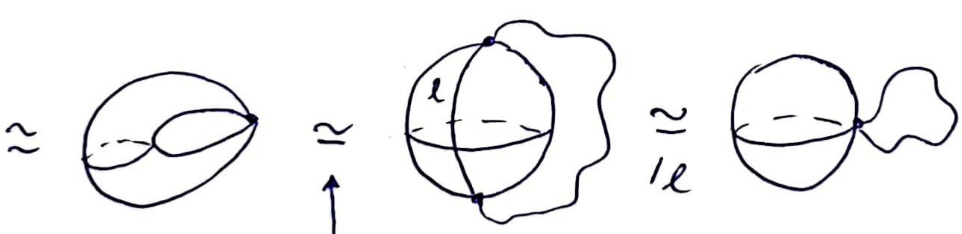
7.



$/\alpha \simeq$?

решење

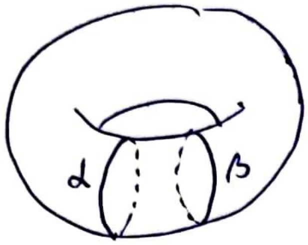




$\approx S^1 \vee S^2$ ∎

Надаље исто као зад. 5

8. На торусу T^2 уочимо кружнице α и β:

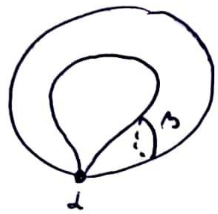


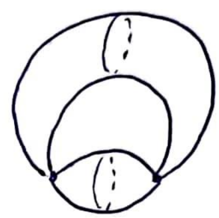
(а) $\left(T^2/\alpha\right)/\beta \simeq\ ?$

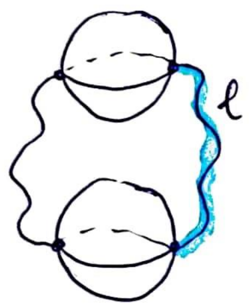
(б) $T^2/(\alpha\cup\beta) \simeq\ ?$

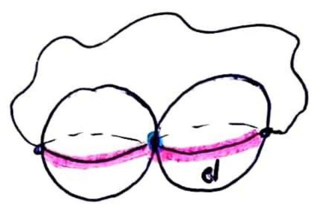
решење

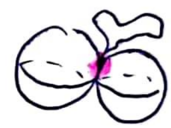
(а)

$(T^2/\alpha)/\beta \approx$ 

$/\beta \approx$  $\simeq$

$\simeq$ 

$\underset{/\ell}{\simeq}$ 

$\underset{/d}{\simeq}$  $\simeq S^1 \vee S^2 \vee S^2$

(б) $T^2/(\alpha\cup\beta) \approx$  $\simeq \underbrace{S^1\vee S^2}\ \vee\ \underbrace{S^1 \vee S^2}$

Букет две уштинуте сфере (из зад 5)

Фундаментална група

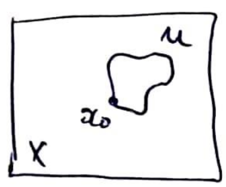
Нека је X тополошки простор и $x_0 \in X$ базна тачка.

Def Дефиниција фундаментална група простора X са базном тачком $x_0 \in X$ је

$$\pi_1(X, x_0) \overset{\text{def}}{=} \{ u : I \to X \mid u(0) = u(1) = x_0 \} / \simeq$$

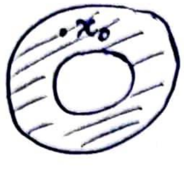
Мало детаљније:

$u : I \to X$ т.д. $u(0) = u(1)$ је у ствари петља у x_0:

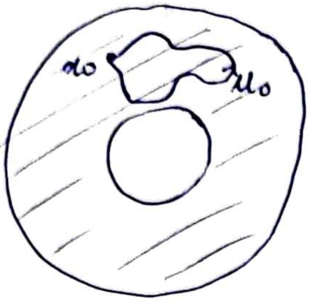


По што сечемо по релацији $\simeq$ значи да идентификујемо хомотопне петље. Елементи од $\pi_1(X, x_0)$ су класе петљи: $[u] \in \pi_1(X, x_0)$.

$[u] = \{$скуп свих петљи хомотопних са $u\}$

ПР пример $X =$ 

← кружни прстен



$u_0 \simeq c_{x_0}$ (можемо ову петљу скупити у x_0)

u_1 не можемо скупити до x_0 јер иде „око рупе"

u_{-1} је исто што и u само у супротном смеру

u_2 – 2 пута петља обиђе око рупе

u_k – k пута обиђе

u_{-k} – k пута обиђе у супротном смеру

Закључак: ако је $k \neq l$ онда $u_k \not\simeq u_l$, тј.

$[u_k]$ и $[u_l]$ су различити елементи у $\pi_1(X, x_0)$.

Како $k, l \in \mathbb{Z}$, то је

$$\pi_1(X, x_0) \cong \mathbb{Z}. \quad \blacksquare$$

Кад год је X путно повезан онда

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$$

за свако $x_0, x_1 \in X$, тј. фундаментална група онда не зависи од базне тачке, па ћемо писати само $\pi_1(X)$.

ПР

пример (1) $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ (слично као претходни пример)

(2) $\pi_1(S^2) = 0$

Овде је 0 ознака за тривијалну групу, тј. групу која садржи само неутрал $0 = \{e\}$

(3) $X \simeq * \Rightarrow \pi_1(X) = 0$ (обрнуто не важи! $\pi_1(X) = 0 \not\Rightarrow X \simeq *$)

На $\pi_1(X)$ се дефинише операција надовезивања петљи и са том операцијом, π_1 заиста буде група (мада не мора бити Абелова).

Представљање групе преко генератора и релација

Кренућемо од специјалног случаја који ћемо проширити до општег.

1) $\langle \alpha \mid - \rangle \overset{def}{=}$ скуп свих речи од симбола α и α^{-1}.

нпр. $\alpha\alpha\alpha^{-1}\alpha$, $\alpha^{-1}\alpha^{-1}\alpha\alpha\alpha^{-1}$, $\alpha\alpha$, ...

уводимо ознаке: $\underbrace{\alpha\alpha\ldots\alpha}_{k} =: \alpha^{k}$

$$\underbrace{\alpha^{-1}\alpha^{-1}\ldots\alpha^{-1}}_{k} =: \alpha^{-k}$$

и релацију еквиваленције: $\alpha\alpha^{-1} \sim 1$ = празна реч

Дакле, елементи од $\langle \alpha \mid - \rangle$ су нпр.

$$\alpha\alpha\underbrace{\alpha^{-1}\alpha}_{1} = \alpha^{2}$$

$$\alpha^{-1}\underbrace{\alpha^{-1}\alpha}_{1}\underbrace{\alpha\alpha^{-1}}_{1} = \alpha^{-1}$$

Видимо $\langle \alpha \mid - \rangle = \{ \alpha^k \mid k \in \mathbb{Z} \} \cong \mathbb{Z}$

$$\alpha^k \in \langle \alpha \mid - \rangle \xleftrightarrow{\text{бијекција}} k \in \mathbb{Z}$$

(2) $\langle \alpha, \beta \mid - \rangle$ = скуп свих речи од симбола $\alpha, \beta, \alpha^{-1}, \beta^{-1}$

нпр. $\alpha\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}\beta\alpha\beta^{-1}$, $\alpha\beta\beta$, $\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}, \dots$

Поново исте ознаке $\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{k} = \alpha^k$ итд.

Релације : $\alpha\alpha^{-1} = 1$, $\beta\beta^{-1} = 1$

Дакле, елементи из $\langle \alpha, \beta \mid - \rangle$ су нпр.

$$\alpha^2 \beta^{-5} \alpha^{-2}, \quad \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-5}\beta^{-2}, \dots$$

Не важи комутативност! $\alpha\beta \neq \beta\alpha$

(3) Можемо додати и релације

$\langle \alpha \mid \alpha^2 = 1 \rangle$ = све речи од α, α^{-1}, али $\alpha^2 = 1$

нпр. $\alpha^2\alpha^{-7}\alpha^3\alpha^{11} = \alpha^9 = \underset{1}{\alpha^2}\underset{1}{\alpha^2}\underset{1}{\alpha^2}\underset{1}{\alpha^2}\alpha = \alpha$

$$\alpha^4\alpha^{-4}\alpha^2 = \alpha^2 = 1$$

Закључак: $\langle \alpha \mid \alpha^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$

Слично, $\langle \alpha \mid \alpha^k = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_k$.

Најопштији случај: $G = \langle S \mid R \rangle$

генератори   релације

Формално: $\langle S \mid - \rangle \overset{\text{def}}{=}$ слободна група са генераторима из S

$$\langle S \mid R \rangle \overset{\text{def}}{=} \langle S \mid - \rangle / N(R)$$

нормална подгрупа генерисана релацијама

Т теорема За сваку групу G постоје S и R т.д.

$$G \cong \langle S \mid R \rangle.$$

Напомена: ова репрезентација није јединствена

$$\left.\begin{array}{l} S_1 \neq S_2 \\ R_1 \neq R_2 \end{array}\right\} \not\Longrightarrow \langle S_1 \mid R_1 \rangle \ncong \langle S_2 \mid R_2 \rangle.$$