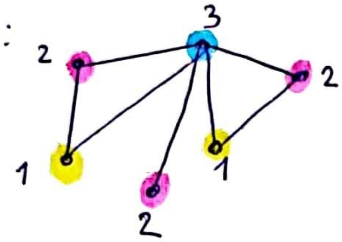
Бојење графова

дефиниција Бојење графа $G=(V,E)$ је пресликавање $c : V \to \mathbb{N}$. Број $c(v)$ је боја темена $v \in V$. Кажемо да је бојење правилно ако су свака два суседна темена обојена различитим бојама.

пример G:



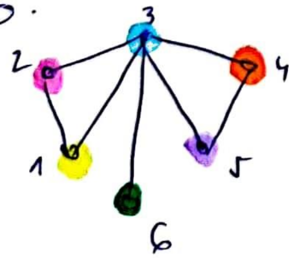
ово је једно правилно бојење графа

дефиниција Хроматски број графа је најмањи број боја потребних за правилно бојење. Означава се са $col(G)$.

Дакле, $col(G) \overset{def}{=} \min \{ d \in \mathbb{N} \mid$ постоји правилно бојење графа G са d боје $\}$

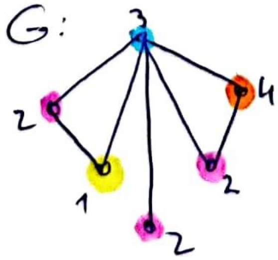
пример Један граф можемо правилно обојити на више начина:

G:



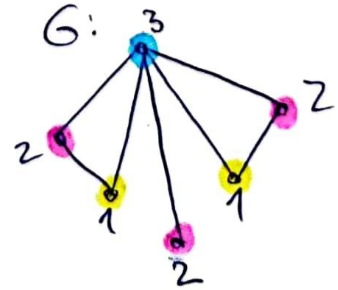
6 боја

G:



4 боје

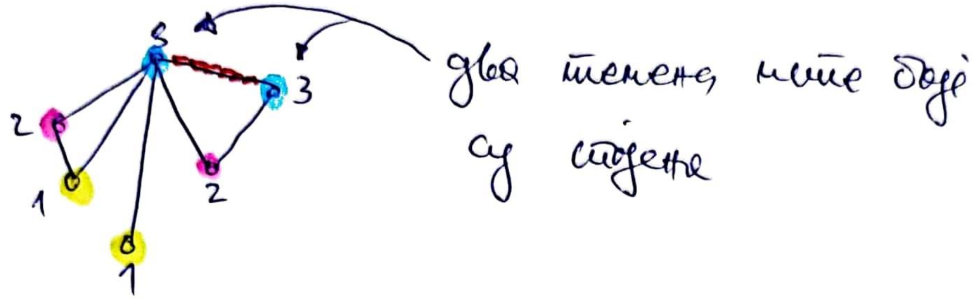
G:



3 боје

Овај граф се не може обојити правилно са мање од 3 боје, па је $col(G) = 3$

Једно неправилно бојење:



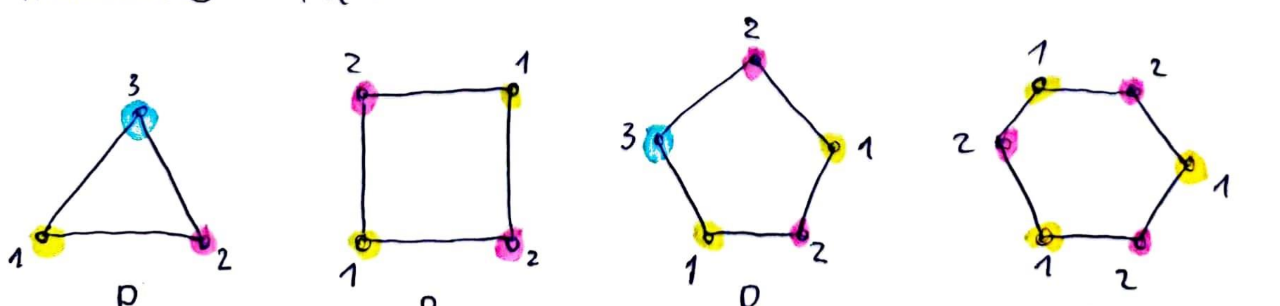
Знамо да увек имамо бар једно правилно бојење (свако теме обојимо различитом бојом), па је $col(G) \leq |V|$.

Ако је $G' \subseteq G$ подграф, онда $col(G') \leq col(G)$.

$\boxed{1.}$ Одредити хроматски број графа чија су темена и ивице темена и ивице n-тоугла.

решење

Означимо са P_n n-тоугао. Обојимо првих неколико P_n:



P_3 P_4 P_5 P_6

Закључак:

$$col(P_{2k}) = 2$$

$$col(P_{2k+1}) = 3 \quad \square$$

2. Одредити $col(K_n)$, K_n - комплетан граф.

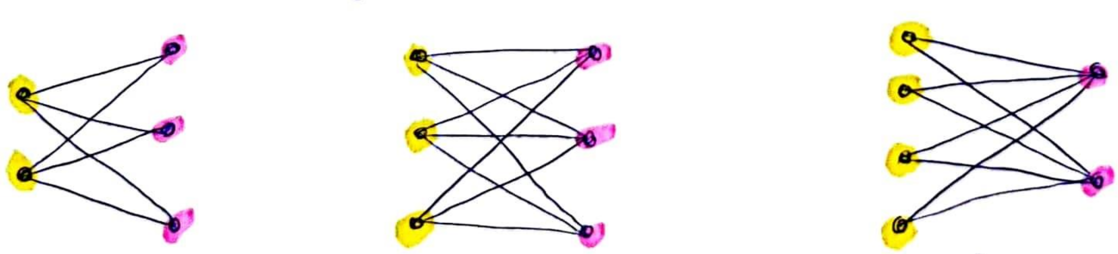
решење

У K_n су свака два темена суседна, па свако теме мора имати другу боју, тј.

$$col(K_n) = n. \quad \square$$

3. Одредити хроматски број бипартитног графа $K_{m,n}$ (бипартитни граф се састоји од $m+n$ темена подељених у два дела по m и n темена т.д. свако од m темена је спојено са сваким од n и ни са ким више).

решење Да видимо пар примера

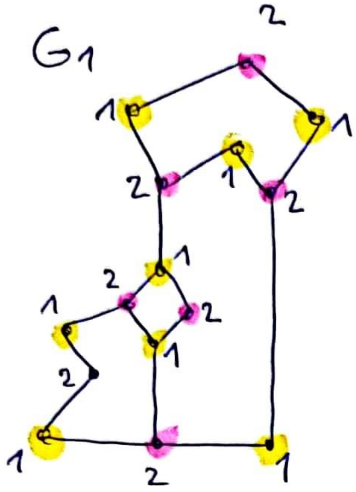


$K_{2,3}$ $\qquad$ $K_{3,3}$ $\qquad$ $K_{4,2}$

Закључак: $col(K_{m,n}) = 2. \quad \square$

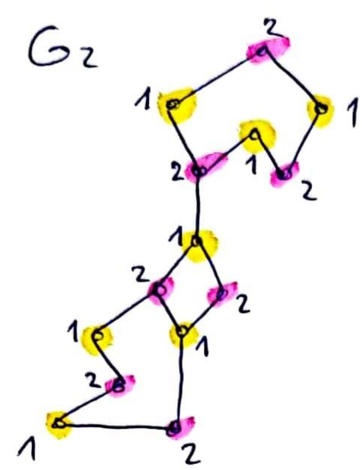
4. Одредити хроматске бројеве следећих графова.

G_1



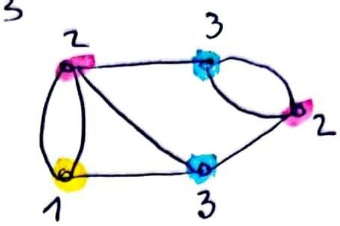
$col(G_1) = 2$

G_2



$col(G_2) = 2$

G_3

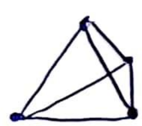


$col(G_3) = 3$

$\square$

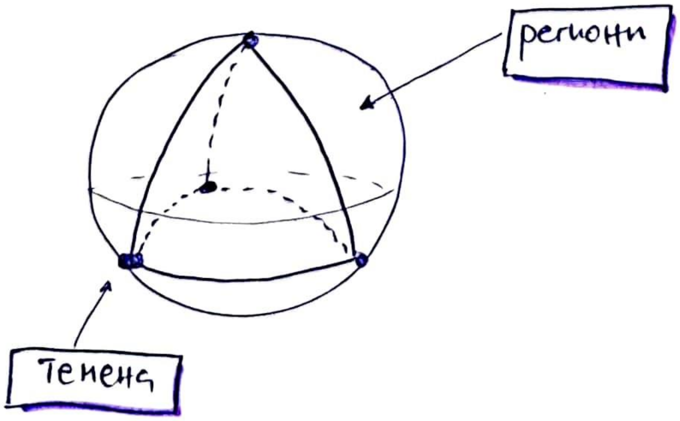
дефиниција Нека је S површ и G граф. Утапање $\varphi : G \to S$ називамо мапом на површи S.

пример G – темена и ивице тетраедра
S – сфера S^2

φ :  $\xrightarrow{\text{„1-1“}}$ 

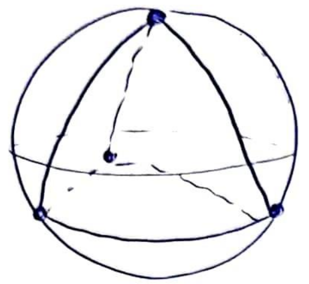
G $\qquad$ S^2

резултат:



Мапа је регуларна ако је сваки регион хомеоморфан отвореном диску $\mathrm{int}\,D^2$.

Пример (1)



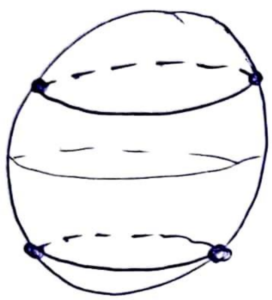
регион:

 $\approx$ 

$\mathrm{int}\,D^2$

јесте регуларна мапа

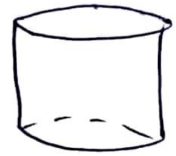
(2)

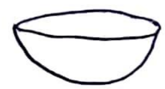


није регуларна мапа

региони:

 $\approx \mathrm{int}\,D^2$ ✓

 $\not\approx \mathrm{int}\,D^2$

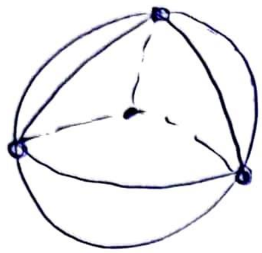
 $\approx \mathrm{int}\,D^2$ ✓

Став На свакој затвореној повезаној површи (тј. M_g и N_h) постоји регуларна мапа.

Дефиниција Нека је $\varphi : G \to S$ мапа на површи S. Ако је V скуп темена, E скуп ивица, а R скуп региона, онда је Ојлерова карактеристика мапе φ дата са:

$$\chi(\varphi) \overset{\text{def}}{=} |V| - |E| + |R|.$$

ПР пример



$|V| = 4$

$|E| = 6$

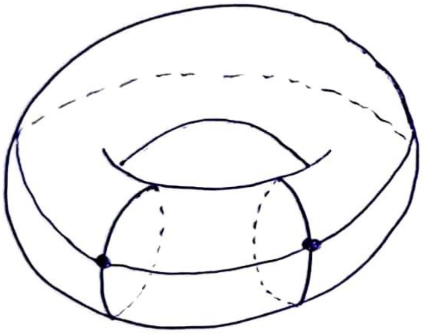
$|R| = 4$

$$\chi(\varphi) = 4 - 6 + 4 = 2$$

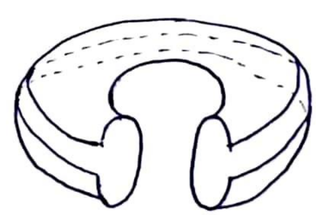
деф дефиниција Нека је S затворена повезана површ и φ регуларна мапа на S. Ојлерова карактеристика од S је

$$\chi(S) \overset{def}{=} \chi(\varphi).$$

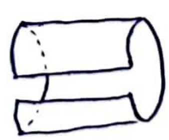
ПР пример Торус T^2



региони:



$\approx \operatorname{int} D^2$



$\approx \operatorname{int} D^2$

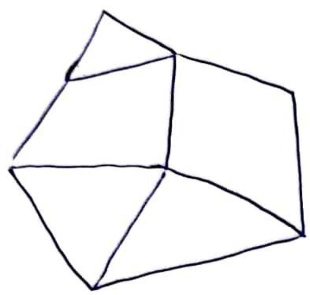
$$\left.\begin{array}{l} |V| = 2 \\ |E| = 4 \\ |R| = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \chi(T^2) = \chi(\varphi) = 2 - 4 + 2 = 0.$$

Знамо од раније: $\chi(T^2) = \chi(M_1) = 2 - 2 \cdot 1 = 0.$

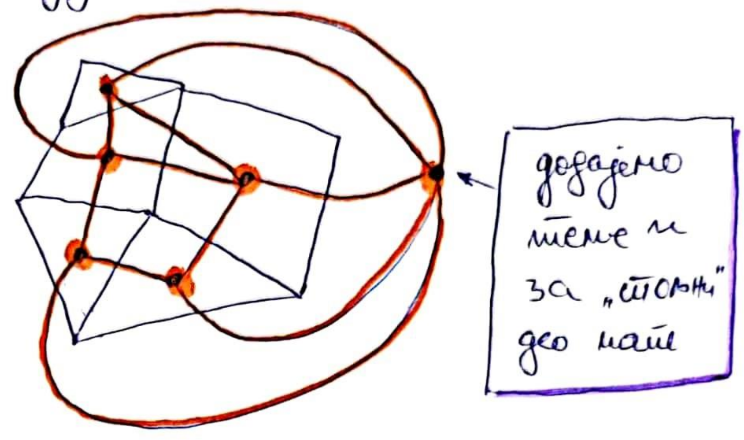
дефиниција Дуални граф мапе се добија тако што сваком региону придружимо теме графа, а темена спојимо ивицом уколико припадају суседним регионима.

пример

мапа у равни:



дуални граф:



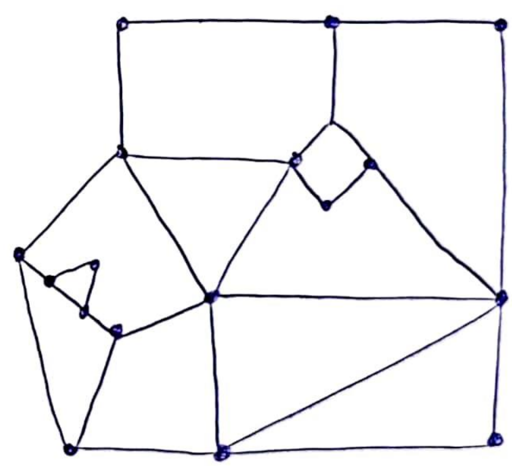
5. Нека је дата мапа на слици.

(а) Обојити мапу са 4 боје (т.д. су свака два суседна региона различите боје);

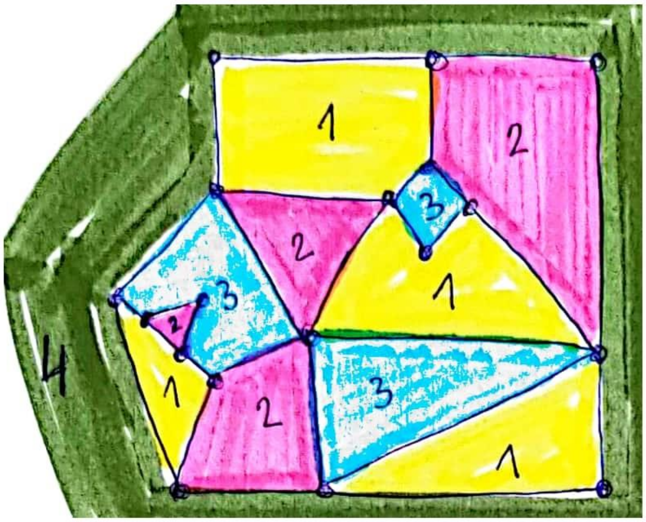
(б) Нађи њен дуални граф;

(в) Доказати да се не може обојити са мање од 4 боје;

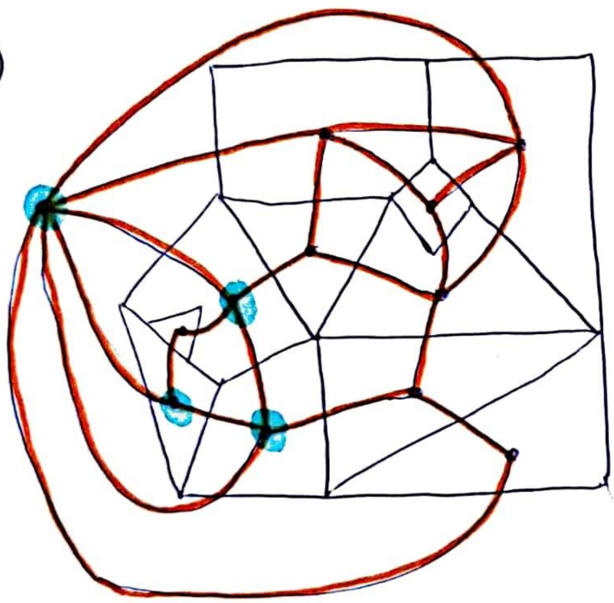
(г) Избацити 1 ивицу т.д. се може обојити са 3 боје.



(а) Бојимо и спољашњост!

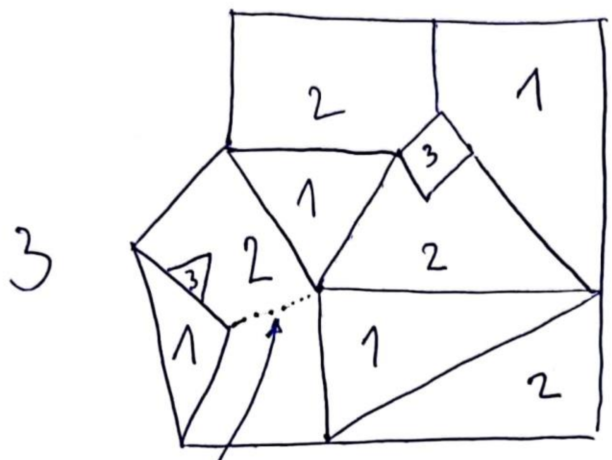


(б)



(в) Најмањи број боја за бојење мапе је у ствари хроматски број дуалног графа. Дуални граф има комплетан K_4 подграф (темена плаве боје на слици у (б)) па како је $col(K_4)=4$, то је $col(G) \geq 4$, па је потребно бар 4 боје да се обоји мапа.

(2) Потребно је да склонимо неку ивицу која прави комплетан граф K_4. Нпр:



ову ивицу смо избацили. □

Деф дефиниција Хроматски број површи X је најмање $d \in \mathbb{N}$ т.д се сваки граф G утопљен у X може обојити са d боја.

$$\mathrm{col}(X) = \min\{d \in \mathbb{N} \mid (\forall G \text{ утопљен у } X)\ \mathrm{col}\, G \le d\}$$

Специјално, ако се G може утопити у X, онда је

$$\mathrm{col}(G) \le \mathrm{col}(X).$$

Пр пример $\mathrm{col}(\mathbb{R}^2) = 4$

6. Нека је S произвољна површ. Доказати да постоји граф који се не може утопити у S.

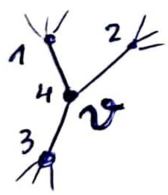
решење

Нека је $col(S) = n$. Тада ако се граф G може утопити у S, мора да важи $col(G) \le col(S) = n$. Знамо да је $col(K_{n+1}) = n+1 > n$, па се K_{n+1} не може утопити у S. □

7. На некој површи је нацртана мапа тд. је од свака два суседна региона бар један троугао. Доказати да се ова мапа може обојити са 4 боје.

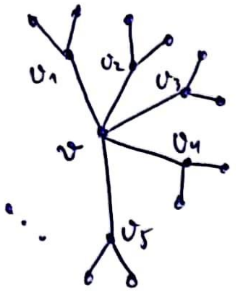
решење Разматраћемо дуални граф (сваки регион нам даје по теме, а ако су региони суседни, одговарајућа темена су спојена). Нека је v теме у дуалном графу. Имамо два случаја.

1° v потиче од региона који је троугао, тј. v има тачно 3 суседа:



Тада v можемо обојити какве год да су боје преостала три темена

2° v није из троугла $\Rightarrow$ сваки сусед му је из троугла



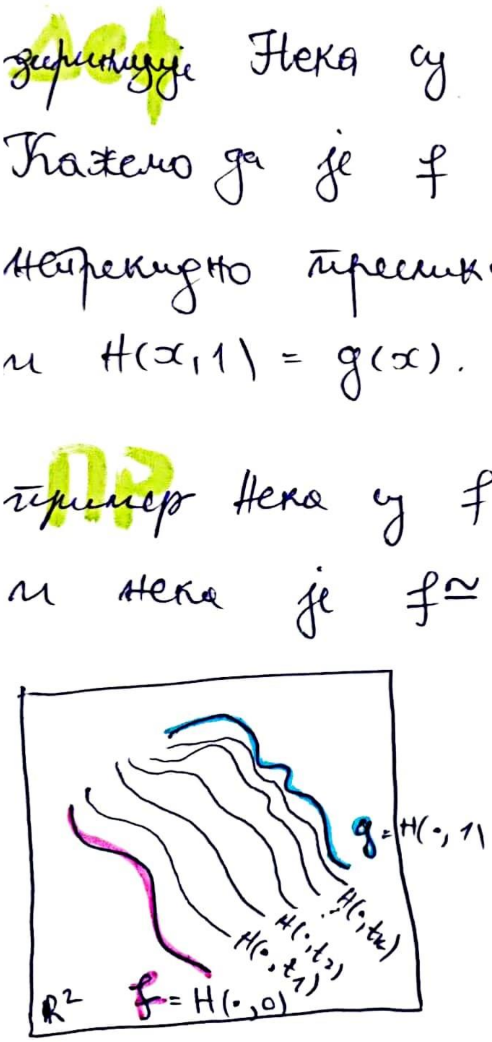
У овом случају теме v можемо произвољно обојити и по потреби променити боје суседних темена $v_1, v_2, \dots, v_k$ (јер та темена потичу из троуглова, па имају тачно три суседа и као у 1° нема проблема за њихово бојење).

Дакле, цео дуални граф можемо обојити са 4 боје, па исто важи и за дату мапу. □

Хомотопија

деф дефиниција Нека су $f, g : X \to Y$ непрекидна пресликавања. Кажемо да је f хомотопно са g ако постоји непрекидно пресликавање $H : X \times I \to Y$ т.д. $H(x,0) = f(x)$ и $H(x,1) = g(x)$. Пишемо $f \simeq g$. (Ознака: $I = [0,1]$)

пр пример Нека су $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ путеви у равни и нека је $f \simeq g$. То значи да се пут f „непрекидно трансформише" до g.



За свако $t \in [0,1]$, $u(x) := H(x,t)$ је неки пут између f и g

Пишемо и $H : f \simeq g$.

непр. фје из X у Y

$\simeq$ је релација еквиваленције на $C(X,Y)$:

(1) рефлексивност: $f \simeq f$

(2) симетричност: $f \simeq g \Rightarrow g \simeq f$

(3) транзитивност: $f \simeq g$ и $g \simeq h \Rightarrow f \simeq h$

Додатне особине:

(1) $f, g : X \to Y$, $h : Y \to Z$, $k : T \to X$ и $f \simeq g$, онда

$$h \circ f \simeq h \circ g \quad \text{и} \quad f \circ k \simeq g \circ k$$

(2) $f_1, f_2 : X \to Y$, $g_1, g_2 : Y \to Z$, $f_1 \simeq f_2$, $g_1 \simeq g_2$

$$\Rightarrow \quad g_1 \circ f_1 \simeq g_2 \circ f_2$$

$\boxed{1.}$ Ако су $f, g : X \to \mathbb{R}^n$, онда је $f \simeq g$.

решење Нека је $H : X \times I \to \mathbb{R}^n$ дато са

$$H(x,t) := (1-t) f(x) + t g(x).$$

ова хомотопија пролази кад год је кодомен конвексан

$$\left.\begin{array}{l} H \text{ је непр.} \\ H(x,0) = f(x) \\ H(x,1) = g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow H : f \simeq g \quad \square$$