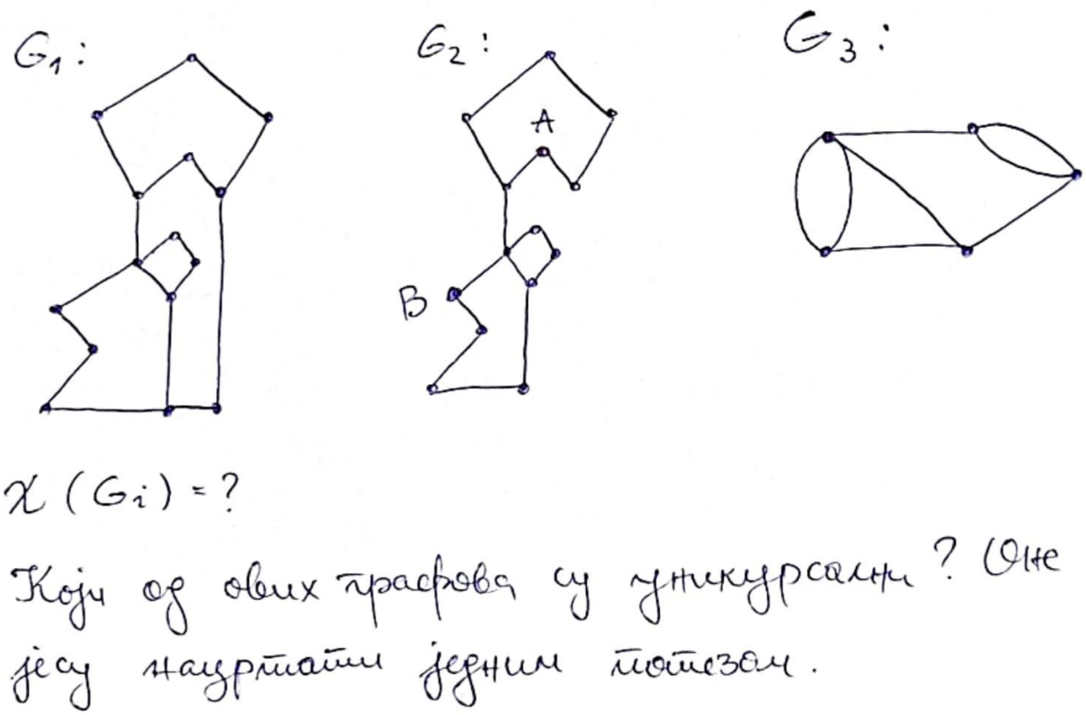
5. Дати су графови:



(а) $\chi(G_i) = ?$

(б) Који од ових графова су уникурсални? Оне које јесу нацртати једним потезом.

(в) Да ли међу овим графовима има хомеоморфних?

(г) Колико подграфова хомеоморфних S^1 има G_1?

(д) Наћи 6 различитих елементарних ланаца у G_2 који спајају A и B.

(ђ) У сваком графу наћи по једно максимално дрво.

(е) У G_1 додати 1 ивицу т.д. постане уникурсалан.

решење

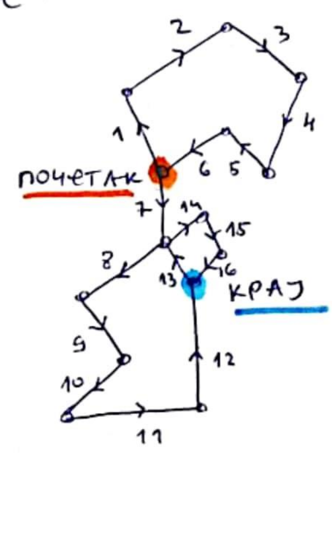
(а) $\chi(G_1) = 15 - 18 = -3$

$\chi(G_2) = 14 - 16 = -2$

$\chi(G_3) = 5 - 8 = -3$

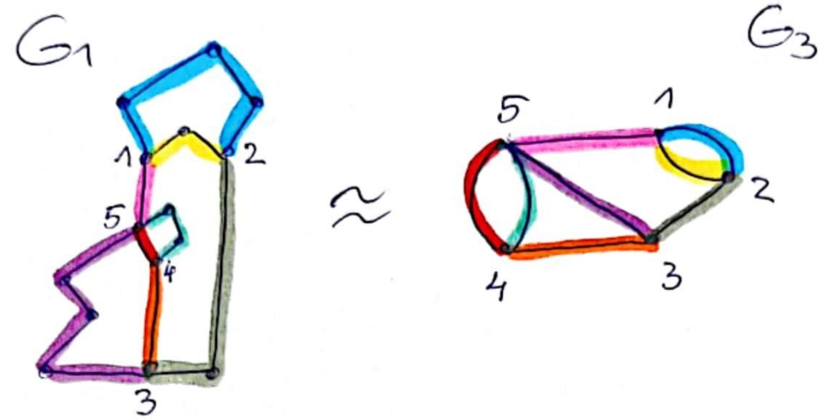
(б) G_1 има 4 темена непарног индекса
G_2 има 2 —||—
G_3 има 4 —||—
$\Rightarrow$ само G_2 је уникурс.

цртање:

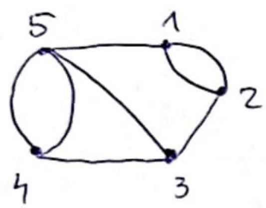


(в) Из (а) и (б) видимо да $G_1 \not\approx G_2$ и $G_3 \not\approx G_2$.

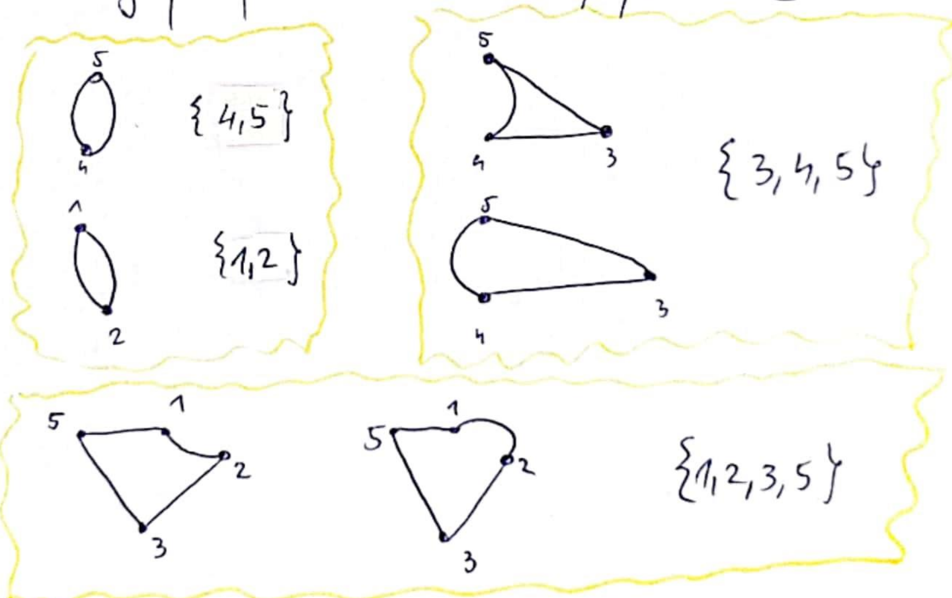
Једино још може бити $G_1 \approx G_3$ и ова два графа јесу хомеоморфна:

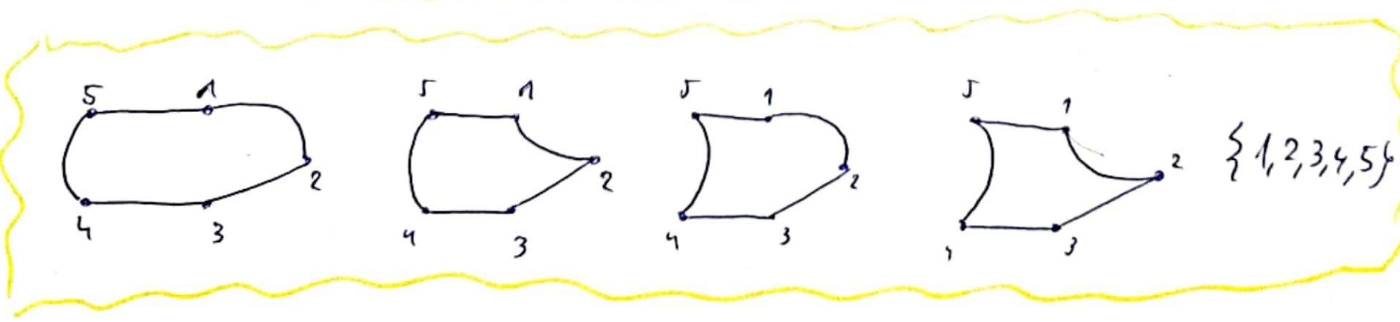


(г) Лакше је да посматрамо G_3 јер $G_1 \approx G_3$.



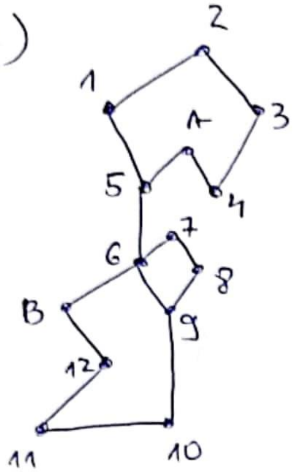
Подграфови хомеоморфни S^1:





Укупно: $\underline{\underline{10}}$

(д)



Елементарни ланци:

(A, 5, 6, B)

(A, 4, 3, 2, 1, 5, 6, B)

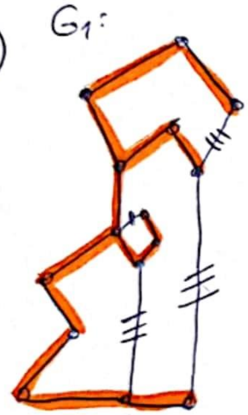
(A, 5, 6, 9, 10, 11, 12, B)

(A, 4, 3, 2, 1, 5, 6, 9, 10, 11, 12, B)

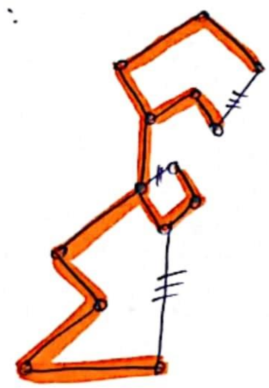
(A, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, B)

(A, 4, 3, 2, 1, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, B)

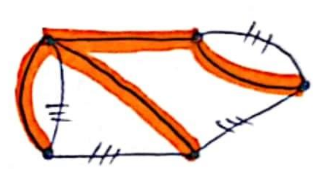
(ђ) G_1:



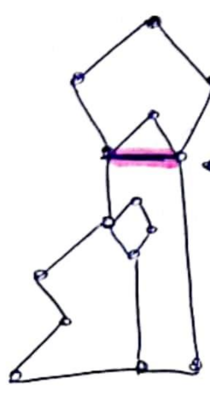
G_2:



G_3:



(е)



спајамо било која два темена непарног индекса

6. (а) Доказати да у сваком стаблу постоји бар једно теме индекса 1.

(б) Ако је T дрво доказати $|E| = |V| - 1$.

(в) Ако је G граф који не садржи ниједну контуру доказати да је $\chi(G)$ једнак броју компоненти путне повезаности од G.

решење (а) пп. $\text{ind}(v) \geq 2$ за свако $v \in V$

$\Rightarrow$ постоји подграф хомеоморфан S^1 тј. T има контуру ↯

Зад. 2 стр. 20

(б) Нека је $|V| = n$. Радимо индукцију по n.

база: $n = 1$ ✓ $(|E| = 0)$

хипотеза: $|V| = n \Rightarrow |E| = n-1$

корак: Нека је $|V| = n+1$. Из (а) имамо v тд. $\text{ind}\, v = 1$.
Избацимо v и његову ивицу и добијамо дрво са n темена $\overset{\text{и.х.}}{\Longrightarrow}$ оно има $n-1$ ивицу. Вратимо v и његову ивицу $\Rightarrow$ полазно дрво има $|E| = n$ ивица.

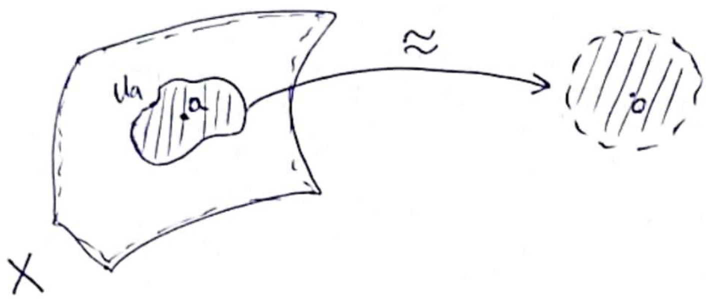
(в) Нека G има k компоненти путне повезаности.
Свака компонента је дрво, тј. $G = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_k$,
па је $\chi(G) = \chi(T_1) + \chi(T_2) + \dots + \chi(T_k) =$

$$= (n_1 - (n_1 - 1)) + (n_2 - (n_2 - 1)) + \dots + (n_k - (n_k - 1)) = k$$

где је $n_i = |V_i|$ – број темена од T_i. ■

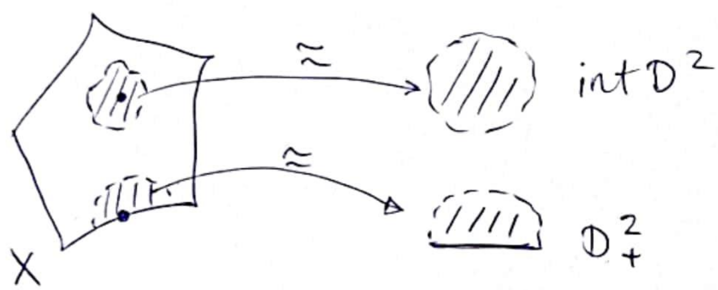
Површи

~~дефиниција~~ X је површ без границе ако свака тачка $a \in X$ има околину U_a хомеоморфну отвореном диску $\operatorname{int} D^2$.

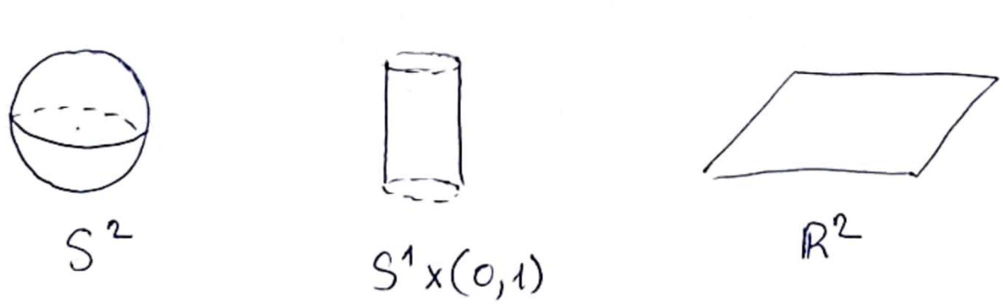


$\operatorname{int} D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$

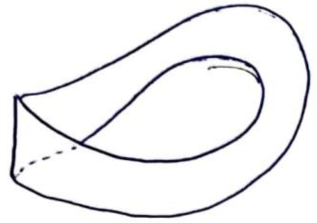
X је површ са границом ако свака тачка $a \in X$ има околину U_a хомеоморфну отвореном диску $\operatorname{int} D^2$ или полудиску $D^2_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1,\ y \geq 0\}$



~~пример~~ (1) Површи без границе



(2) Површи са границом



M

(Мебијусова трака)

$\partial M = S^1$ - круг

$S^1 \times [0,1]$

$\partial(S^1 \times [0,1]) = S^1 \sqcup S^1$

два круга

$S^1 \times [0,1)$

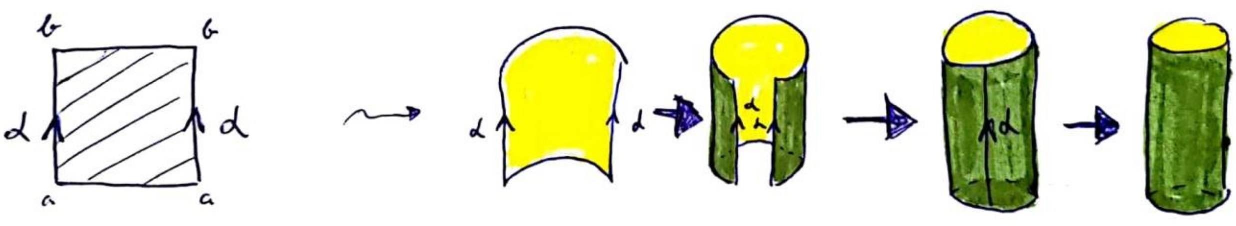
$\partial(S^1 \times [0,1)) = S^1$

круг

Деф дефиниција: Површ је затворена ако је компактна и без границе.

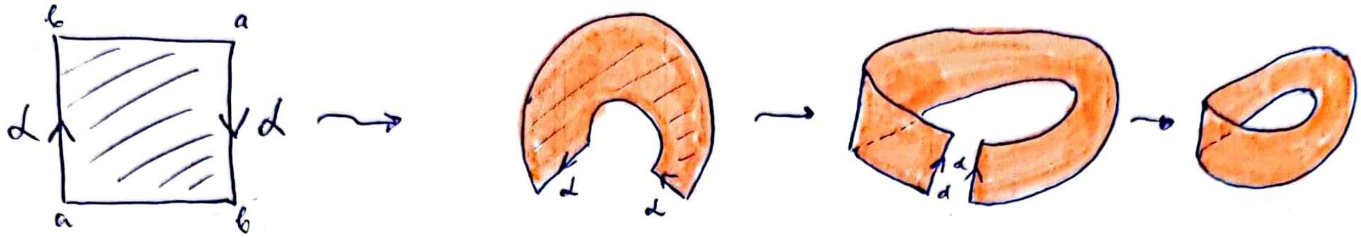
Количнички модели у равни

1 Цилиндар C

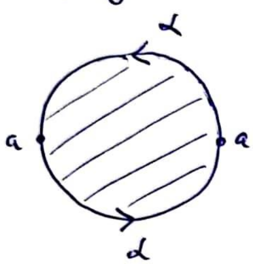


ово значи да лепимо α на α у смеру стрелица

② Мебијусова трака

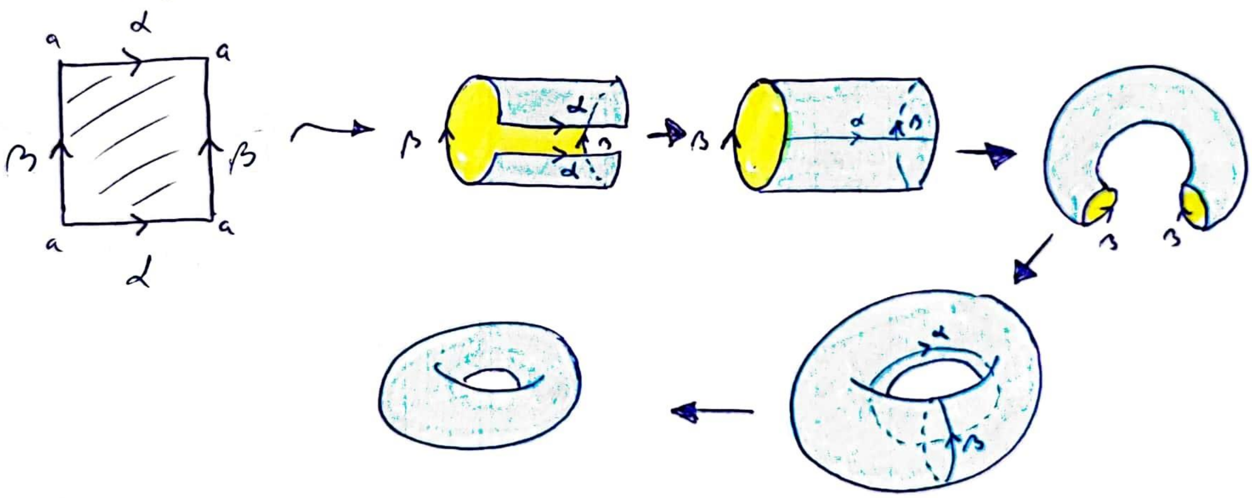


③ Пројективна раван $\mathbb{R}P^2$

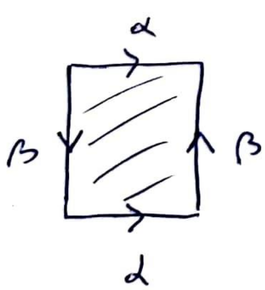


Не може да се види у $\mathbb{R}^3$ па зато нема илустрације

④ Торус T^2



⑤ Клајнова боца K

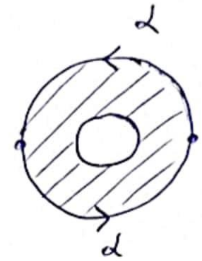


Не може се видети у $\mathbb{R}^3$

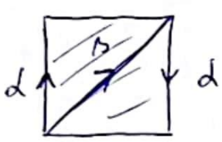
Сецкање и лепљење

$\boxed{1.}$ Доказати да је

(а) $M \approx$ 

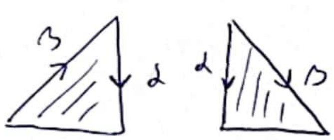
(б) $M \approx$ 

решење

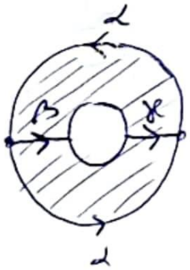
(а) $M \approx$ 

$\overset{\text{сечемо } \beta}{\approx}$

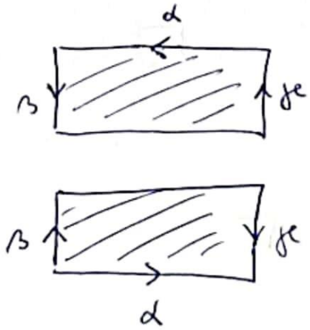
$\approx$

$\approx$ 

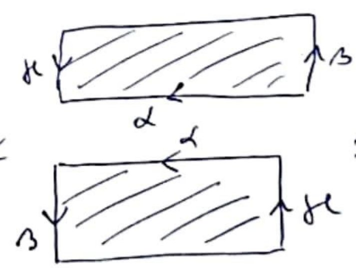
$\overset{\text{лепимо } \alpha}{\approx}$ 

(б) 

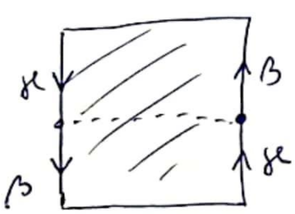
сечемо β
$\approx$
сечемо γ



$\approx$



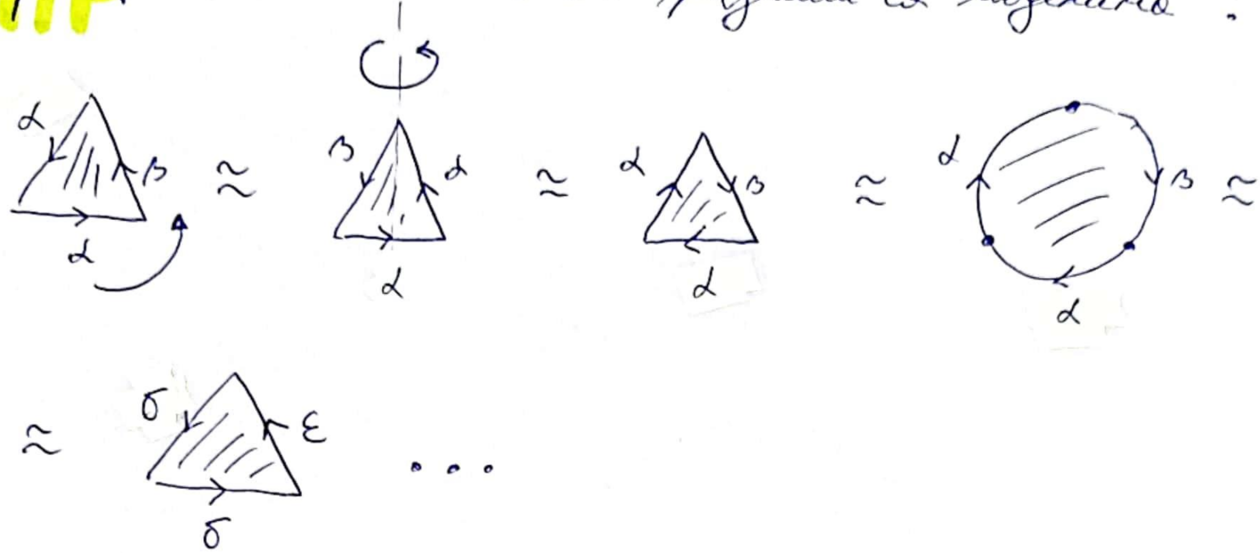
$\approx$

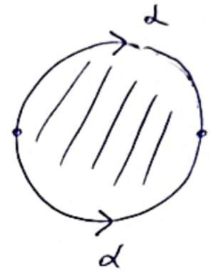
$\overset{\text{лепимо } \alpha}{\approx}$ 

$\overset{\delta := \gamma\beta}{\approx}$ 

$\approx M$ ■

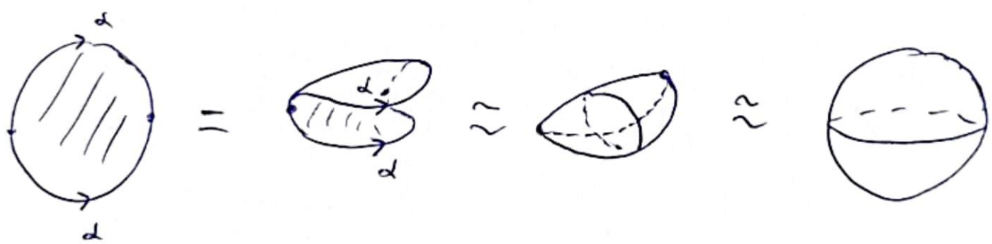
ПР пример Шта све смемо радити са моделима ?



2. (а)  ≈ ? (б)  ≈ ?

решење

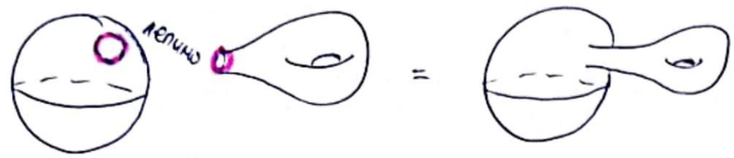
(а)  $= D^2$

(б)  $\approx S^2$ ■

Конструкција повезаних затворених површи

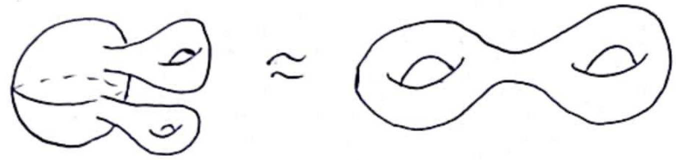
$M_0 \overset{def}{=} S^2 =$ 

Скинемо са S^2 мали диск и лепимо торус:

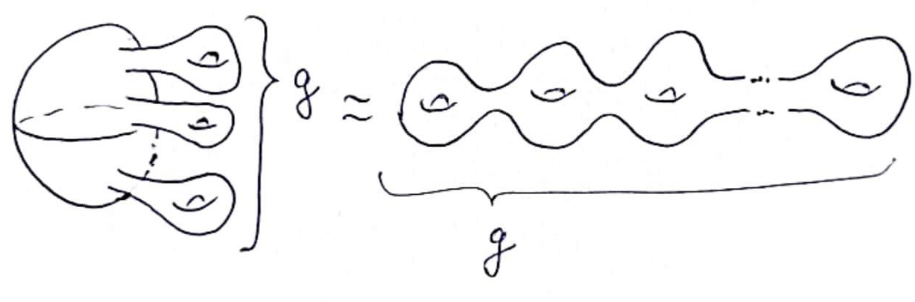


Генерално,

$M_1 \overset{def}{=}$  $= T^2$

$M_2 \overset{def}{=}$ 

$\vdots$

$M_g \overset{def}{=}$ 

Сада са S^2 скинемо диск и лепимо Мебијусову траку:

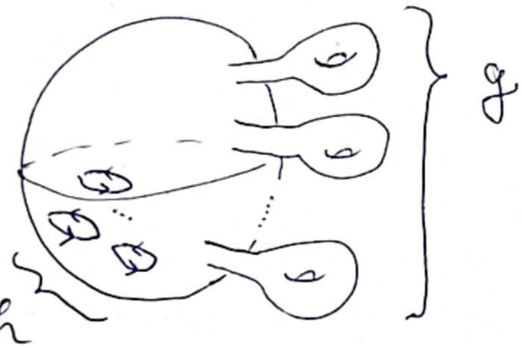
$N_1 \overset{\text{def}}{=}$  $\simeq$  $\simeq \mathbb{R}P^2$

$N_2 \overset{\text{def}}{=}$  $\simeq K$ (Клајнова боца)

$\vdots$

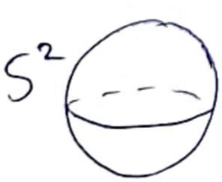
$N_h \overset{\text{def}}{=}$ 

И још ако на S^2 лепимо и T^2 и M:

$H_{g,h} \overset{\text{def}}{=}$ 

Показаћемо да је $H_{g,h} \simeq N_{2g+h}$.

деф ~~дефиниција~~ Површ је оријентабилна ако има 2 стране.



оријентабилна

неоријентабилна

Теорема [о класификацији површи] Нека је X повезана затворена површ. Тада

(1) ако је X оријентабилна, онда

$$(\exists g \in \mathbb{N}_0)\ X \approx M_g;$$

(2) ако је X неоријентабилна, онда

$$(\exists h \in \mathbb{N})\ X \approx N_h.$$