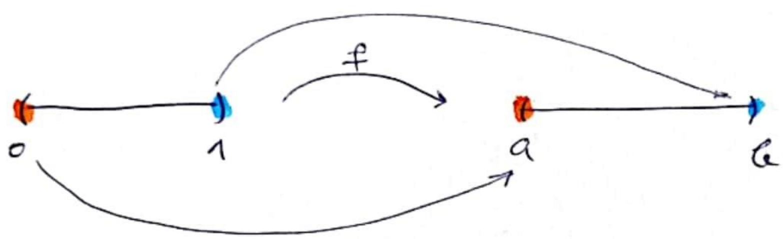
4. Доказати да је $(a,b) \approx (0,1)$, $-\infty < a < b < +\infty$.

Решење



Хоћемо да $(0,1)$ растегнемо и транслирамо до (a,b), тј. правимо линеарно пресликавање $f:(0,1)\to(a,b)$ т.д. $f(0)=a$ и $f(1)=b$.

$$f(t) = k\cdot t + n$$ – треба наћи k и n.

$$a = f(0) = k\cdot 0 + n \Rightarrow n = a$$

$$b = f(1) = k\cdot 1 + n \Rightarrow b = k + a \Rightarrow k = b - a$$

Дакле, $f(t) = (b-a)\cdot t + a$.

Нађимо инверз $f^{-1}: (a,b) \to (0,1)$

$$(b-a)t + a = s$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{s-a}{b-a} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(s) = \frac{s-a}{b-a}$$

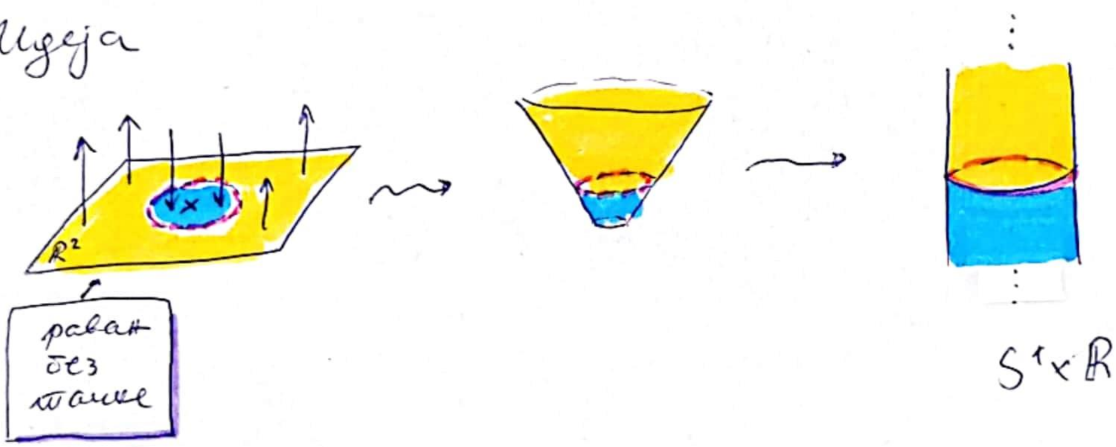
Очигледно су f и f^{-1} непрекидна пресликавања, па је f хомеоморфизам, тј. $(0,1) \approx (a,b)$. □

$\boxed{5.}$ Доказати да је $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \approx S^1 \times \mathbb{R}$

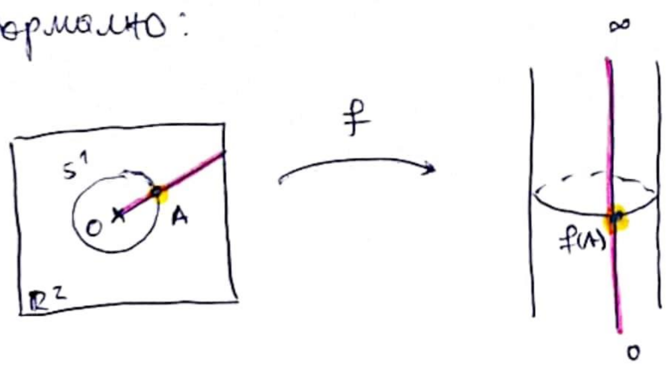
цилиндар

решење

Идеја



формално:



$$f(x) = \left(\frac{x}{\|x\|}, \ln\|x\| \right)$$ – ово ће бити хомеоморфизам.

□

Конструкција нових простора од старих

Подсетник: Ако је X скуп и $\sim$ релација еквиваленције (рефлексивна, симетрична и транзитивна), онда са $X/_\sim$ означавамо простор свих класа еквиваленције. Елементи од $X/_\sim$ су класе $[x] = \{ y \in X \mid x \sim y \}$.

Нека је X тополошки простор и $A \subseteq X$. Дефинишемо релацију $\sim$ на X:

$$(\forall x, y \in X) \quad x \sim y \overset{def}{\iff} x, y \in A.$$

1. Дефинишемо количнички простор

$$\boxed{X/A \overset{def}{=} X/_\sim}$$

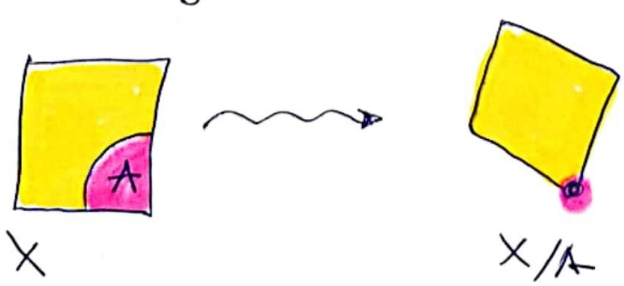
Може се дефинисати и топологија на X/A:

$$\mathcal{T}_{X/A} = \{ U \subseteq X/A \mid \pi^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X \},$$

где је $\pi : X \to X/A$ природна пројекција.

Главна идеја: X/A је простор који добијемо кад A скупимо у тачку.

Илустрација:



6. Одредити чему су простори хомеоморфни!

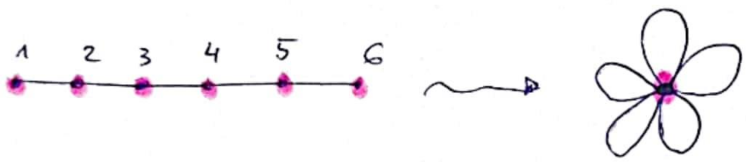
(а) $[0,1]/\{0,1\}$; (б) $[1,6]/\{1,2,3,4,5,6\}$;

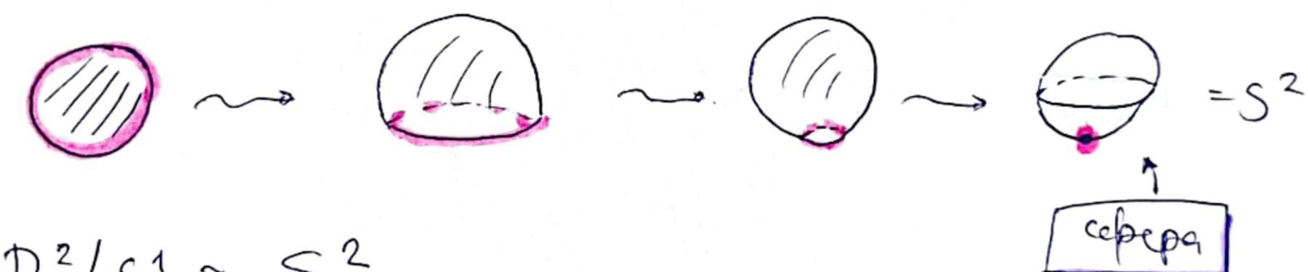
(в) D^2/S^1 ; (г) $\mathbb{R}^2/D^2$.

решење

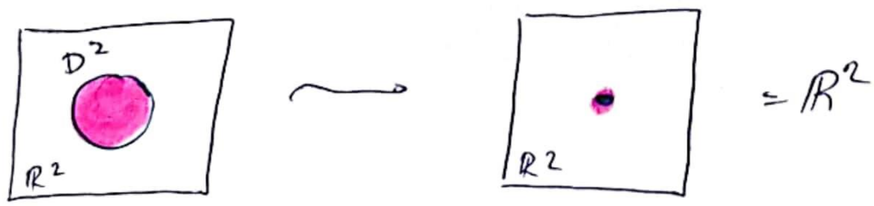
(а) 

$$[0,1]/\{0,1\} \approx S^1$$

(б) 

(в) 

$$D^2/S^1 \approx S^2$$

(г) 

$$\mathbb{R}^2/D^2 \approx \mathbb{R}^2 \quad \blacksquare$$

Напомена: не мешати $\setminus$ и $/$.

Нпр. $[0,1]/\{0,1\} \approx S^1$

$[0,1]\setminus\{0,1\} \approx (0,1)$

② Декартов производ простора

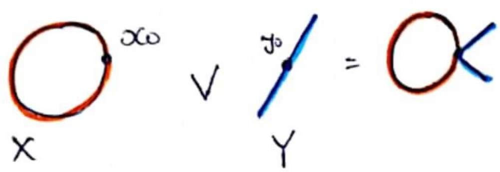
$$X \times Y \overset{def}{=} \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

Може се дефинисати и топологија на $X \times Y$ да то заиста буде тополошки простор.

③ Букет простора X и Y

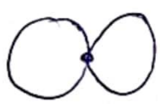
Нека су $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$ фиксиране тачке.

Букет је $X \vee Y \overset{def}{=} X \sqcup Y /_{x_0 \sim y_0}$

нпр. 

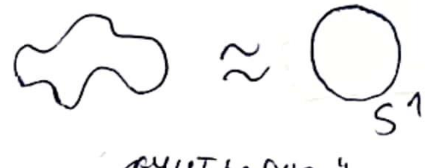
X и Y залепимо у тачкама x_0 и y_0

Често ће бити свеједно шта су x_0 и y_0, па то нећемо ни наглашавати.

Нпр. $S^1 \vee S^1 \simeq$ 

Напомена: Знамо да је свака непрекидна трансформација (без сецкања и лепљења) један хомеоморфизам, али треба бити обазрив јер неке хомеоморфизме не можемо видети као непрекидне трансформације!

пример

(1) 

„очигледно“

(2) 

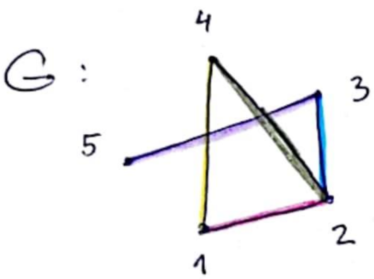
два уланчана круга су хомеоморфна са два одвојена иако их не можемо раздвојити без сецкања.

Теорија графова

дефиниција Граф је уређен пар скупова (V, E), где је V скуп темена графа, а E скуп ивица, тј. $E \subseteq V \times V$. (E = edges, V = vertices)

пример $V = \{1,2,3,4,5\}$, $E = \{(1,2),(1,4),(2,3),(2,4),(3,5)\}$

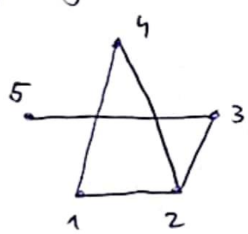
G:



$G = (V, E)$

дефиниција Индекс темена $v \in V$ је број ивица које из њега крећу. Ознака: $\mathrm{ind}(v)$.

пример G:



$\mathrm{ind}(1) = 2$ $\quad$ $\mathrm{ind}(4) = 2$

$\mathrm{ind}(2) = 3$ $\quad$ $\mathrm{ind}(5) = 1$

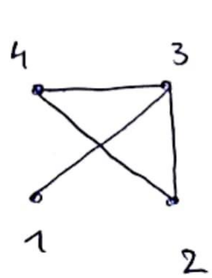
$\mathrm{ind}(3) = 2$

дефиниција Геометријска реализација графа је утапање графа у $\mathbb{R}^n$ за неко $n \in \mathbb{N}$.

пример $V = \{1,2,3,4\}$, $E = \{(1,3),(3,4),(2,4),(2,3)\}$

$G = (V, E)$ - граф

Геометријска реализација:



граф у $\mathbb{R}^2$

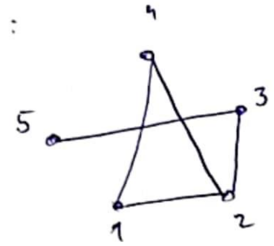
1. Нека је G коначан граф. Означимо са $a_k(G)$ број темена од G која имају индекс k.

Доказати $$|E| = \frac{a_1(G)+2a_2(G)+\cdots+n\,a_n(G)}{2}$$

решење

Проверимо прво на примеру:

G:



$a_1(G) = 1$

$a_2(G) = 3$

$a_3(G) = 1$

$a_4(G) = 0$

$a_5(G) = 0$

бр. ивица

$$|E| = \frac{1\cdot1+2\cdot3+3\cdot1+4\cdot0+5\cdot0}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Сад формално.

$$|E| = \frac{\operatorname{ind} v_1 + \operatorname{ind} v_2 + \cdots + \operatorname{ind} v_m}{2} = \frac{a_1(G)+2a_2(G)+\cdots+n\,a_n(G)}{2}$$

сваку ивицу бројимо дупло па зато делимо са 2

$a_k(G) \cdot k$

број темена из којих креће k ивица

за свако теме бројимо по тих k ивица

Нпр. за G одозго:

$$\frac{\operatorname{ind}(1)+\operatorname{ind}(2)+\operatorname{ind}(3)+\operatorname{ind}(4)+\operatorname{ind}(5)}{2} = \frac{2+3+2+2+1}{2} = \frac{1\cdot1+3\cdot2+1\cdot3+0\cdot4+0\cdot5}{2} = \frac{a_1(G)+2a_2(G)+\cdots+5a_5(G)}{2}$$

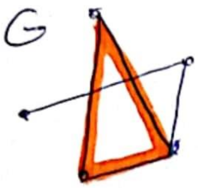
$\blacksquare$

2. Ако за свако $v \in V$ важи $\mathrm{ind}(v) \geq 2$,

онда G има подграф G' т.д. је $G' \cong S^1$

(тј. негде у графу се појављује затворени пут)

решење

нпр. G  G'  $\approx S^1$

Претпоставимо супротно да нема затвореног пута.

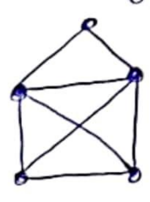
Уочимо најдужи отворени пут $(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k})$

(v_{i_j} су нека темена графа).

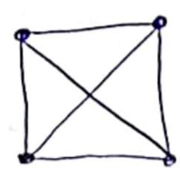
Тада је $\mathrm{ind}(v_{i_k}) = 1$ (јер је то крај пута) ↯ □

дефиниција: Граф је уникурсалан ако се може „нацртати једним потезом".

пример



јесте уникурс.



није уникурс.

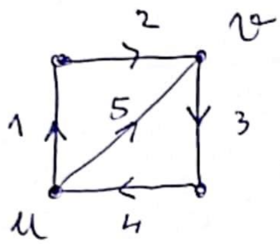
3. [Важан задатак] Ако је G повезан и уникурсалан, онда он има највише 2 темена непарног индекса.

решење Ако се граф може нацртати једним потезом то значи да постоји путања која креће од неког $u \in V$ и завршава се у неком $v \in V$ и пролази кроз све ивице.

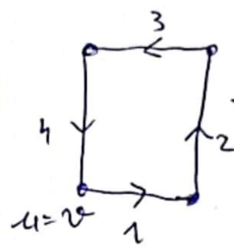
Ако је $w \in V \setminus \{u, v\}$ тј. w није почетак ни крај, онда је пут „ушао" и „изашао" из w исти број пута, па је $\mathrm{ind}(w)$ паран.

Индекс од u и v може бити и паран и непаран. ■

пример



ind(u) и ind(v) су непарни



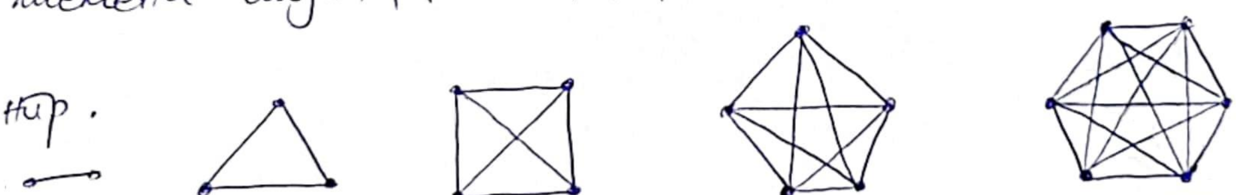
ind(u) и ind(v) су парни

Важи и више:

теорема Граф је уникурсалан АККО садржи највише два темена непарног индекса.

дефиниција Граф је комплетан ако су му свака два темена спојена. Ознака: K_n.

нпр.



K_2 K_3 K_4 K_5 K_6

3. Да ли је K_n уникурсалан?

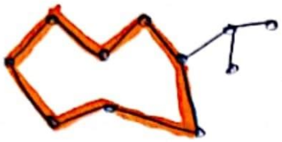
решење У K_n свако теме је повезано са $n-1$ теменом тј. $\mathrm{ind}(v) = n-1$ за свако $v \in K_n$.

Очигледно је K_2 уникурсалан. На основу теореме:

за $n \geq 3$: K_n је уникурс. $\Leftrightarrow$ n је непарно. ■

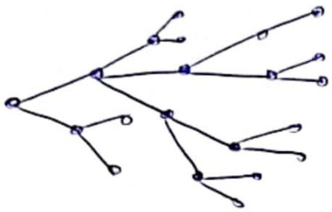
дефиниција Контура (цикл) у графу је затворен ланац ивица хомеоморфан кружници.

нпр.



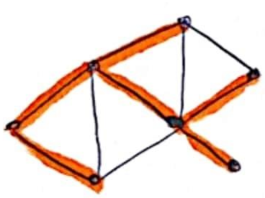
дефиниција Повезан граф без контура зове се дрво (стабло)

нпр.



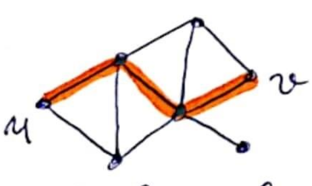
дефиниција Максимално дрво у G је подграф од G који је дрво и садржи сва темена.

нпр.



дефиниција Елементаран ланац ивица од темена u до v је ланац који креће од u, завршава се у v и хомеоморфан је дужи.

нпр.



4. Ако је G дрво, $u, v \in G$, онда постоји јединствени ланац од u до v.

решење птс. да постоје 2 ланца $\Rightarrow$ кад их надовежемо добијамо контуру ↯ □

дефиниција: Ојлерова карактеристика графа G је

$$\chi(G) \stackrel{\text{def}}{=} |V| - |E|.$$

Подсетник: у геометрији је

$$\chi(\underbrace{\Pi}_{\boxed{\text{полиедар}}}) = \underbrace{t}_{\boxed{\text{бр. темена}}} - \underbrace{i}_{\boxed{\text{бр. ивица}}} + \underbrace{p}_{\boxed{\text{бр. пљосни}}}$$

Уникурсалност и Ојлерова карактеристика су тополошке инваријанте. (тј. $G_1 \simeq G_2 \Rightarrow \chi(G_1) = \chi(G_2)$)