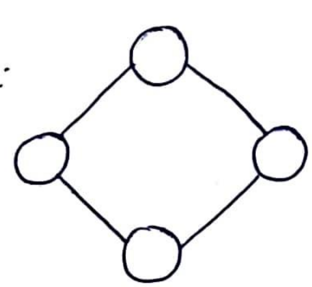
5. Да ли постоји неко од могућих 6 наткривања између просторима

X :



Y :

Z :

решење: У сва три простора тачке имају околину

 или  па то није проблем.

Ако у неком простору W имамо k тачака са неком специфичном околином (нпр. ), а у T имамо l таквих тачака и ако је $W \to T$, онда мора бити $k = n \cdot l$, где је n број листова овог наткривања, тј. $l \mid k$.

(1) $Y \to X$?

У Y имамо 2 тачке са околином , а у X их има 8, тј. $l=8$, $k=2$, па како $8 \nmid 2$, то $\boxed{Y \not\to X}$

(2) $Y \to Z$?

слично: у Y је $k=2$ у Z је $l=2$

$k = n \cdot l \Rightarrow n = 1 \Rightarrow$ наткривање мора бити једнолисно, тј. хомеоморфизам, али $Y \not\cong Z$

$\Rightarrow \boxed{Y \not\to Z}$

(3) $Z \to Y$? исто као (2) $\Rightarrow \boxed{Z \not\to Y}$

(4) $Z \to X$?

у Z је $k=2$, у X је $l=8$

$8 \nmid 2 \Rightarrow \boxed{Z \not\to X}$

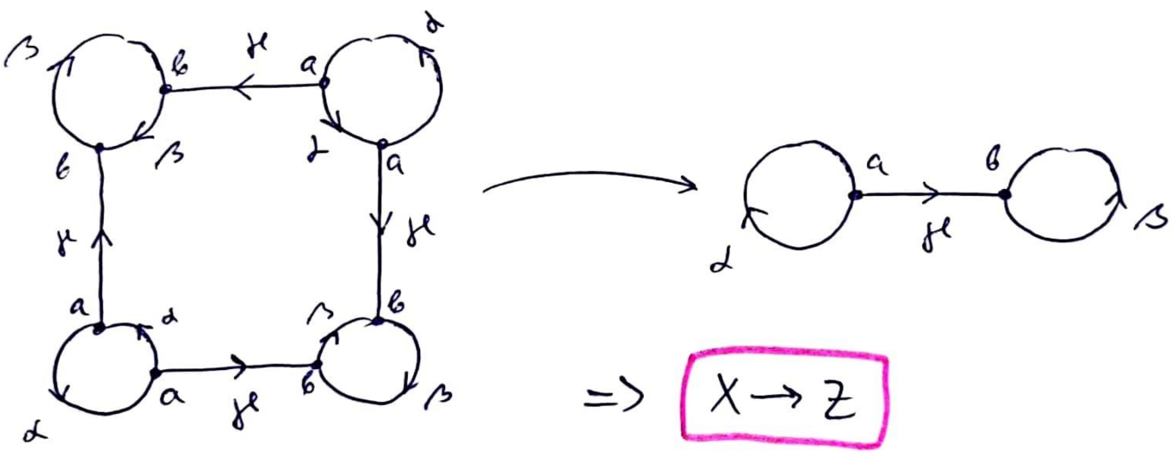
(5) $X \to Z$?

у X је $k=8$, у Z је $l=2$

$2 \mid 8$ ✓, $k = n \cdot l \Rightarrow n=4$

Ако постоји наткривање оно је 4-лисно.

Експлицитно дефинисано наткривање:



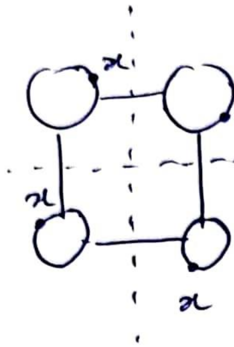
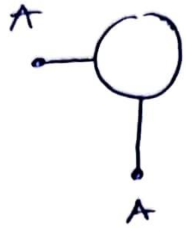
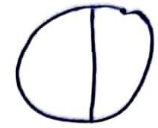
$\Rightarrow \boxed{X \to Z}$

(6) $X \to Y$? слично као у (5): $n=4$.

Имамо дејство $\mu : \mathbb{Z}_4 \times X \to X$

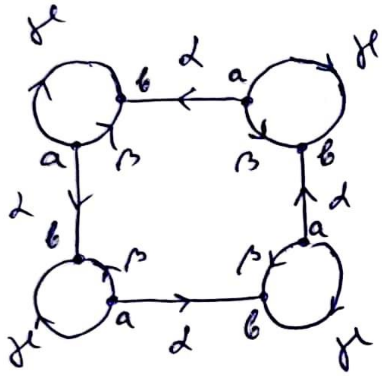
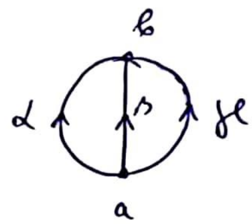
$$\mu(k, x) = \text{ротација за угао } \frac{k\pi}{2},$$

$k \in \{0,1,2,3\}$. Имамо наткривање $X \to X/\mathbb{Z}_4$

$X/\mathbb{Z}_4 =$  $/\mathbb{Z}_4 \simeq$  $\simeq$  $= Y$

$\Rightarrow$ $\boxed{X \to Y}$

2. начин: експлицитно дефинисање

 $\longrightarrow$ 

Став Ако је $p: E \to B$ n-лисно наткривање, E и B површи, онда је $\chi(E) = n \cdot \chi(B)$.

6. Да ли постоје наткривања

(а) $N_3 \to N_5$; (б) $N_5 \to N_3$?

решење

(а) $\chi(N_3) = 2-3 = -1$, $\chi(N_5) = 2-5 = -3$

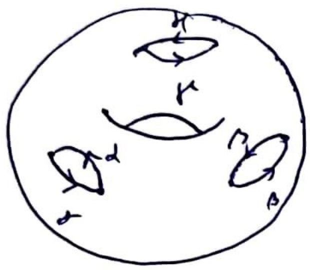
$-1 = n \cdot (-3) \Rightarrow n = \frac{1}{3}$ ↯ $\Rightarrow$ $\boxed{N_3 \not\to N_5}$

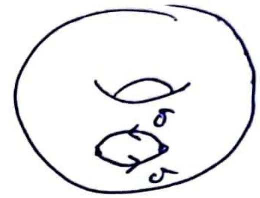
(O) $-3 = n\cdot(-1) \Rightarrow n=3$

Ако постоји наткривање оно је 3-лисно.

Сетимо се: $N_5 \approx M_1 \# N_1 \# N_1 \# N_1$

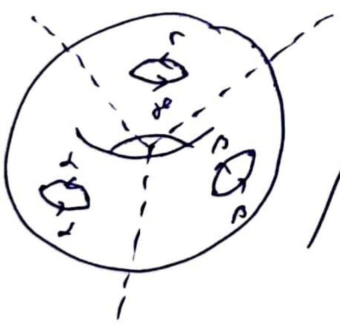
$N_3 \approx M_1 \# N_1$

N_5: 

N_3: 

Посматрајмо дејство $\mathbb{Z}_3$ на N_5, $\mu: \mathbb{Z}_3 \times N_5 \to N_5$

$\mu(k,x)$ = ротација за $\frac{2k\pi}{3}$, $k \in \{0,1,2\}$

$N_5/\mathbb{Z}_3 =$  $/\mathbb{Z}_3 \approx$  $\approx$  $= N_3$

$\Rightarrow \boxed{N_5 \longrightarrow N_3}$ ■

7. Да ли постоји наткривање

(а) $M_3 \to M_9$? (б) $M_9 \to M_3$?

решење

(а) $\chi(M_3) = 2-2\cdot 3 = -4$, $\chi(M_9) = 2-2\cdot 9 = -16$

Ако $M_3 \to M_9$, онда $-4 = n\cdot(-16) \Rightarrow n = \frac{1}{4}$ ↯

$\Rightarrow M_3 \not\to M_9$

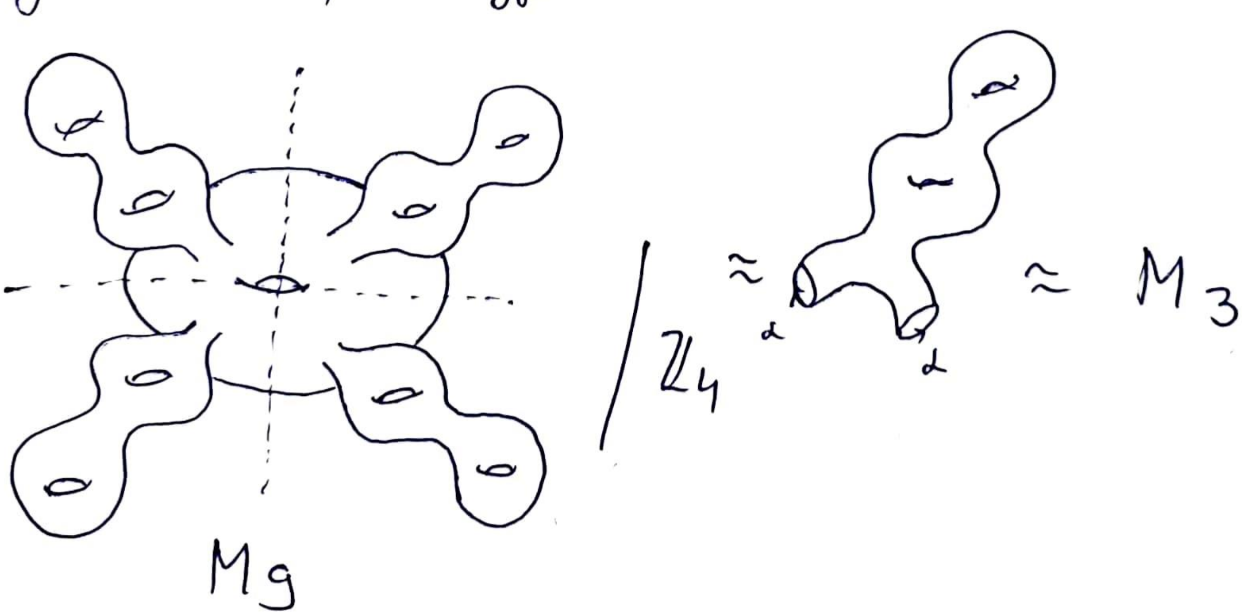
(б) Ако $M_9 \to M_3$, онда $-16 = n\cdot(-4) \Rightarrow n = 4$ тј.

наткривање је 4-лисно.

$M_9 =$ 

$M_3 =$ 

Имамо дејство $\mathbb{Z}_4$ на M_9, али треба M_9 да мало преобликујемо:



Дакле, $M_9 \to M_9/\mathbb{Z}_4$, тј. $\boxed{M_9 \to M_3}$ $\square$

Брауерова и Борсук-Уламова теорема

Теорема [Брауер] Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $f : D^n \to D^n$ непрекидно. Тада f има фиксну тачку, тј. $(\exists x_0 \in D^n)\, f(x_0) = x_0$.

Теорема [Борсук-Улам] Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ непрекидно. Тада постоји $x_0 \in S^n$ т.д. $f(x_0) = f(-x_0)$.

1. Доказати да је БУТ еквивалентна са следећим исказом:

(БУТ1) Ако је $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ непрекидно и непарно, онда $(\exists x_0 \in S^n)\, f(x_0) = 0$.

решење

(БУТ) => (БУТ1) Нека је $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ непр. и непарно. Из БУТ) следи да $(\exists x_0 \in S^n)\, f(x_0) = f(-x_0)$, али f је и непарно, па

$$f(x_0) = f(-x_0) = -f(x_0) \Rightarrow 2f(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = 0.$$

(БУТ1) $\Rightarrow$ (БУТ) Нека је $f: S^n \to \mathbb{R}^n$ непрекидно.

Дефинишимо $g: S^n \to \mathbb{R}^n$ са $g(x) \overset{\text{def}}{=} f(x) - f(-x)$.

g је непр. и непарно:

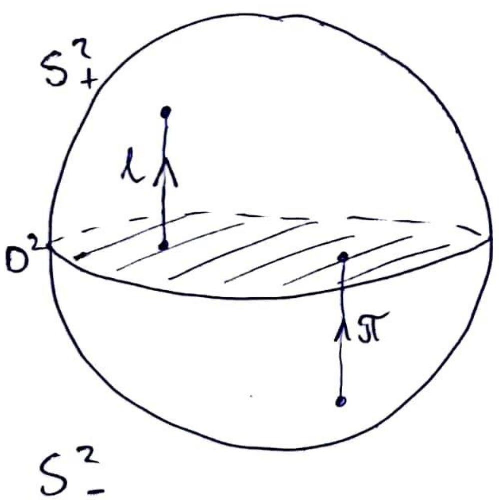
$$g(-x) = f(-x) - f(x) = -(f(x) - f(-x)) = -g(x)$$

па на основу (БУТ1) $(\exists x_0 \in S^n)$ $g(x_0) = 0$, тј.

$$0 = g(x_0) = f(x_0) - f(-x_0) \Rightarrow f(x_0) = f(-x_0). \square$$

2. Нека је $f: S^2_+ \to S^2_-$ непрекидно. Доказати да постоји $x = (x_1, x_2, x_3) \in S^2_+$ т.д. $f(x) = (x_1, x_2, -x_3)$.
(S^2_+ = горња полусфера, S^2_- = доња полусфера)

решење



Нека је $l: D^2 \to S^2_+$ „подизање"

тј. $l(x_1, x_2, 0) = (x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2})$,

а $\pi: S^2_- \to D^2$ „пројекција", тј.

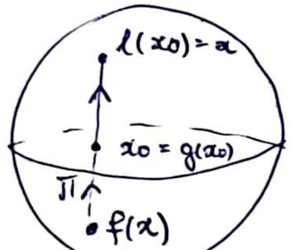
$$\pi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 0)$$

Нека је $g: D^2 \to D^2$ дато са $g = \pi \circ f \circ l$.

$$\begin{tikzcd} D^2 \arrow[r, "l"] \arrow[rrr, bend right, "g"'] & S^2_+ \arrow[r, "f"] & S^2_- \arrow[r, "\pi"] & D^2 \end{tikzcd}$$

g је непр. па на основу Брауерове теореме има фиксну тачку, тј. $(\exists x_0 \in D^2)\ g(x_0) = x_0$.

Нека је $x := l(x_0)$. Тада је x тражена тачка.



Формално: $x_0 = (x_1, x_2, 0)$

$$x = l(x_0) = (x_1, x_2, \sqrt{1-x_1^2-x_2^2})$$

$$\pi(f(l(x_0))) = x_0 \Rightarrow \pi(f(x)) = (x_1, x_2, 0)$$

$$\Rightarrow f(x) = (x_1, x_2, -\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}). \quad \blacksquare$$

3. Нека су F_1, F_2 и F_3 затворени скупови на S^2 који је покривају, тј. $S^2 = F_1 \cup F_2 \cup F_3$. Показати да бар један од ова три скупа садржи пар антиподалних тачака.

решење Нека су $d_1, d_2 : S^2 \to \mathbb{R}$ дате са

$d_1(x) \overset{\text{def}}{=} d(x, F_1)$ - растојање x и F_1

$d_2(x) \overset{\text{def}}{=} d(x, F_2)$ - растојање x и F_2

и нека је $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ дато са $f(x) \overset{\text{def}}{=} (d_1(x), d_2(x))$.

f је непр. $\xRightarrow{\text{БУТ}}$ $(\exists x_0 \in S^2)\ f(x_0) = f(-x_0)$.

тј. $d_1(x_0) = d_1(-x_0)$ и $d_2(x_0) = d_2(-x_0)$.

1° Ако $x_0 \in F_1$: $d_1(x_0) = 0 \Rightarrow d_1(-x_0) = d_1(x_0) = 0$

$\Rightarrow -x_0 \in F_1 \Rightarrow \underline{x_0, -x_0 \in F_1}$

2° Ако $x_0 \in F_2$: слично као 1° $\underline{x_0, -x_0 \in F_2}$

3° Ако $x_0 \notin F_1$ и $x_0 \notin F_2 \Rightarrow x_0 \in F_3$

$$\left.\begin{array}{l} x_0 \notin F_1 \Rightarrow d_1(x_0) > 0 \Rightarrow d_1(-x_0) > 0 \Rightarrow -x_0 \notin F_1 \\ x_0 \notin F_2 \Rightarrow d_2(x_0) > 0 \Rightarrow d_2(-x_0) > 0 \Rightarrow -x_0 \notin F_2 \end{array}\right\} \Rightarrow -x_0 \in F_3$$

$\Rightarrow \underline{x_0, -x_0 \in F_3}$. $\blacksquare$

$\boxed{4.}$ Нека је $f: S^1 \to S^1$ непрекидно и „1-1". Тада је f „на".

решење Пп. f није „на", тј. $\exists y \in S^1 \setminus f(S^1)$. Имамо

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right] & S^1 \setminus \{y\} \arrow[r, "h", "\approx"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$h \circ f: S^1 \to \mathbb{R}$ непр. $\xRightarrow{\text{БУТ}}$ $(\exists x_0 \in S^1)\ (h \circ f)(x_0) = (h \circ f)(-x_0)$

Како је h хомео то

$$h^{-1}(h(f(x_0))) = h^{-1}(h(f(-x_0)))$$

$\Rightarrow$ $f(x_0) = f(-x_0)$ $\Rightarrow$ f није „1-1" ↯

Дакле, f мора бити „на" $\square$

5. Показати да је БУТ еквивалентна са следећим исказом:

(БУТ2) Не постоји непрекидно непарно пресликавање
$$g: S^n \to S^{n-1}.$$

решење (БУТ) $\Rightarrow$ (БУТ2) пдс. Нека је g непр. и непарно.

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "i\circ g"'] & S^{n-1} \arrow[r, hook, "i"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd} \qquad i\circ g: S^n \to \mathbb{R}^n \text{ непр.}$$

$\overset{(БУТ)}{\Longrightarrow}$ $(\exists x_0 \in S^n)\ i(g(x_0)) = i(g(-x_0)) \Rightarrow g(x_0) = g(-x_0) = -g(x_0)$

$\Rightarrow 2g(x_0) = 0 \Rightarrow g(x_0) = 0 \notin S^{n-1}$ ↯

(БУТ2) $\Rightarrow$ (БУТ) Нека је $f: S^n \to \mathbb{R}^n$ и пдс.

$(\forall x \in S^n)\ f(x) \neq f(-x)$.

Дефинишемо $g: S^n \to S^{n-1}$ са

$$g(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}$$

g је непр. и непарно и слика $S^n \to S^{n-1}$ $\lightning$ $\square$

Крај :)