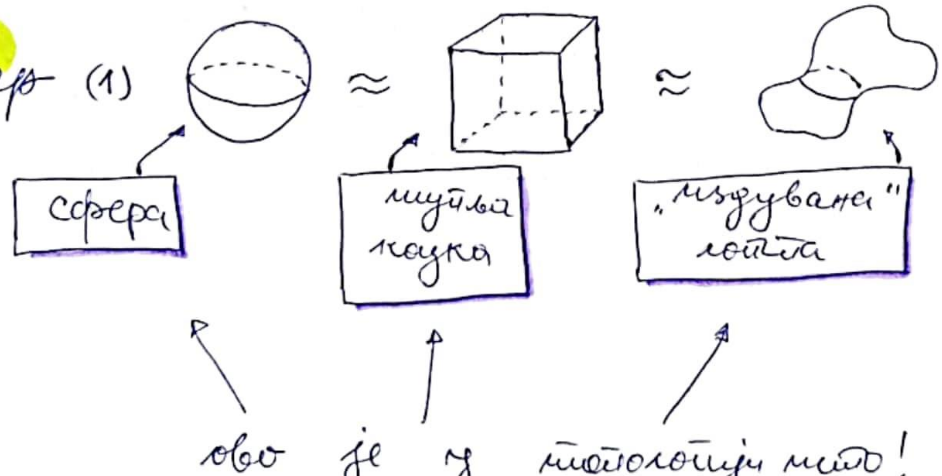
Увод

Топологија је „опуштена геометрија". Објекти које изучавамо нису „крути" већ ако један објекат можемо „деформисати" да добијемо други, онда су та два објекта за топологију исто.

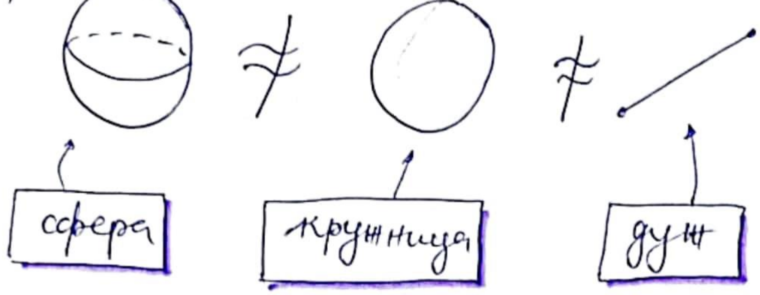
Како то тачно смемо деформисати објекат а да му не променимо суштину?
Објекти X и Y су „једнаки" ако постоји бијекција $f: X \to Y$ т.д. су и f и f^{-1} непрекидна.
Ови „објекти" ће бити тополошки простори, а пресликавања f која их идентификују зваћемо хомеоморфизмима. (Ускоро ћемо све формално дефинисати.)

ПР пример (1)



ово је у топологији исто!

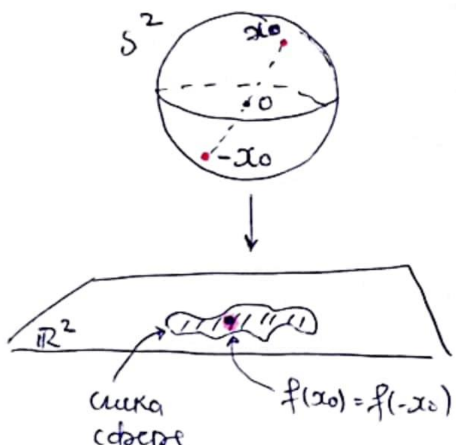
(2)



ово у топологији није исто!

Неке познате теореме у топологији:

Т теорема [Борсук-Улам] Нека је $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ непрекидно пресликавање (S^2 = сфера, $\mathbb{R}^2$ = раван). Тада постоји тачка $x_0 \in S^2$ т.д. $f(x_0) = f(-x_0)$.



Сликовито: како год да згужвамо сферу и залепимо је на раван, постоје две антиподалне тачке са сфере које се лепе у исту тачку у равни.

ПР пример У сваком тренутку на Земљи постоји пар антиподалних тачака које имају исту температуру и ваздушни притисак!

(антиподалне = дијаметрално супротне)

доказ Нека је $f: S^2 \to \mathbb{R}^2$ дато са

Земља

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \big(t(x),\ p(x)\big)$$

x — локација на Земљи

$t(x)$ — температура у x

$p(x)$ — притисак у x

f је непрекидно, па на основу БУТ:

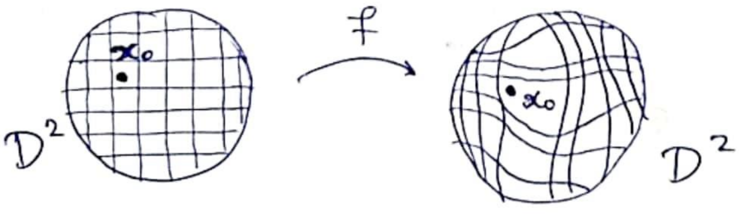
$(\exists x_0 \in S^2)\ f(x_0) = f(-x_0)$, тј.

$$t(x_0) = t(-x_0) \quad \text{и} \quad p(x_0) = p(-x_0)$$

температура и притисак у x_0 и $-x_0$ су исти! ■

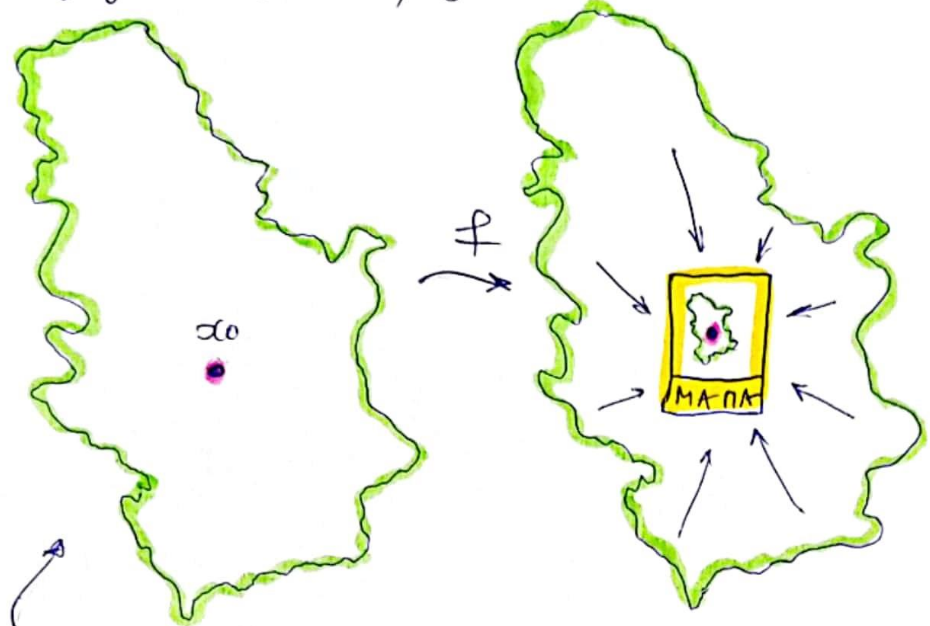
Теорема [Брауер] Нека је $f: D^2 \to D^2$ непрекидно (D^2 = диск у равни). Тада f има фиксну тачку, тј. постоји $x_0 \in D^2$ т.д. $f(x_0) = x_0$.

Илустрација:



при „развлачењу" диска, тачка x_0 се није померила

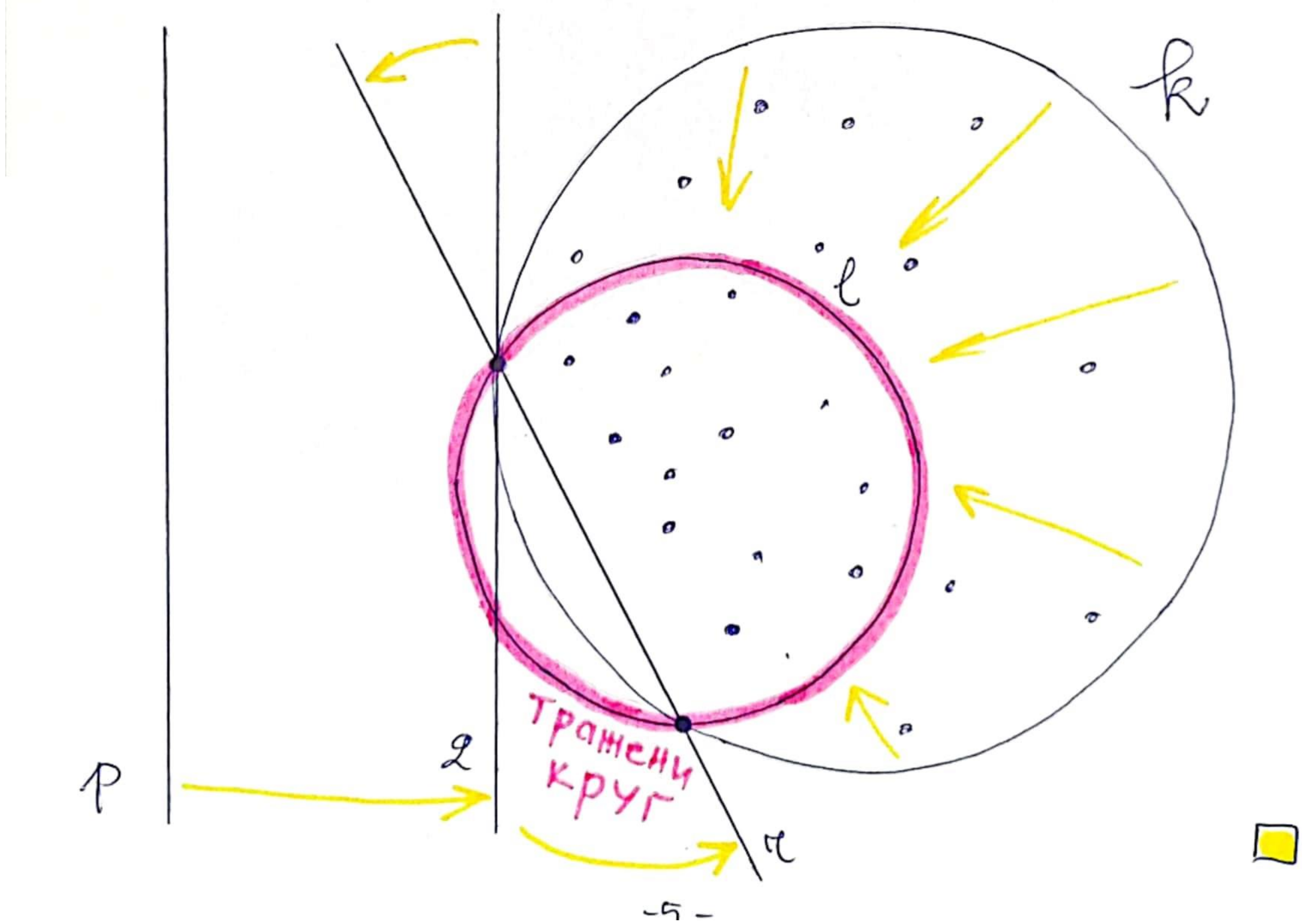
ПР пример Ако ставимо мапу Србије на сто, постојаће тачка на мапи која се налази баш на локацији коју представља.



У топологији територија Србије је исто што и диск, па можемо применити теорему!

$\boxed{1.}$ Дат је скуп од 2022 тачке у равни у општем положају (никоје три нису колинеарне, никоје четири нису коцикличне). Доказати да постоји кружница т.д. је тачно 1712 тачака унутар кружнице, 307 ван круга и 3 на кружници.

решење: Уочимо праву p у равни т.д. је свих 2022 тачака са исте стране те праве. Онда транслирамо p док не дође до прве тачке из скупа. Затим је ротирамо да ухвати још једну тачку и нека је то права q. Уочимо сада кружницу k која пролази кроз те две тачке на q и довољно је велика да су све остале тачке унутар ње. Полако смањујемо k (али т.д. све време садржи тачке са q) и избацујемо једну по једну тачку све док не добијемо да је тачно 1712 унутра.



Основни појмови

деф дефиниција Нека је X скуп и $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ фамилија неких подскупова од X т.д. важи:

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;

(2) $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$;

(3) $U_\alpha \in \mathcal{T},\ \alpha \in A \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$.

Тада $\mathcal{T}$ називамо топологијом на X, а пар $(X, \mathcal{T})$ тополошким простором. Елементе од $\mathcal{T}$ називамо отвореним скуповима.

пр пример Сваки метрички простор је и тополошки простор. Нпр. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ је метрички простор, па и тополошки пр. Отворени скупови би били отворени интервали и њихове уније. (нпр. $(1,2)$, $(1,3) \cup (5,7)$ су отворени, $[1,3)$ није).

деф дефиниција (1) $V \subseteq X$ је затворен, ако је $X \setminus V$ отворен. фамилију свих затворених скупова означавамо са $\mathcal{F}$.

(2) $K \subseteq X$ је компактан ако сваки његов отворен покривач има коначан потпокривач

тј. ако $K \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \Rightarrow$ постоје $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in A$

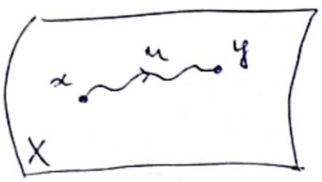
т.д. $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} U_{\alpha_k}$

(3) X је повезан ако

$$(\forall U, V \in \mathcal{T}) \quad X = U \sqcup V \Rightarrow U = \emptyset \text{ или } V = \emptyset$$

(4) X је путно повезан ако

$$(\forall x, y \in X)(\exists u : [0,1] \to X \text{ непрекидно}) \ u(0) = x, \ u(1) = y$$



тј. сваке две тачке се могу спојити путем

ПР пример (1) Посматрамо $\mathbb{R}$ са стандардном топологијом (наслеђеном од метрике)

	$[0,1]$	$(0,1) \cup (2,5)$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Q}$
отворен	✗	✓	✗	✗
затворен	✓	✗	✓	✗
повезан	✓	✗	✗	✗
компактан	✓	✗	✗	✗
путно повезан	✓	✗	✗	✗

(2) Посматрамо $\mathbb{R}^2$ са стандардном топологијом

	пун квадрат са границом	два одвојена круга без границе	квадрат без једне ивице	дуж	цела раван ($\mathbb{R}^2$)
отворен	✗	✓	✗	✗	✓
затворен	✓	✗	✗	✓	✓
повезан	✓	✗	✓	✓	✓
компактан	✓	✗	✗	✓	✗
путно повезан	✓	✗	✓	✓	✓

ДЕФ дефиниција Нека су $(X,\mathcal{T}_X)$ и $(Y,\mathcal{T}_Y)$ тополошки простори. Пресликавање $f: X\to Y$ је непрекидно ако је инверзна слика сваког отвореног скупа из Y отворена у X, тј.

$$(\forall U\in\mathcal{T}_Y)\quad f^{-1}(U)\in\mathcal{T}_X.$$

ДЕФ дефиниција $f: X\to Y$ је хомеоморфизам ако је бијекција и f и f^{-1} су непрекидна.

ПР пример $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3$ је хомеоморфизам.
(f је бијекција и $f(x)=x^3$ и $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$ су непр.)

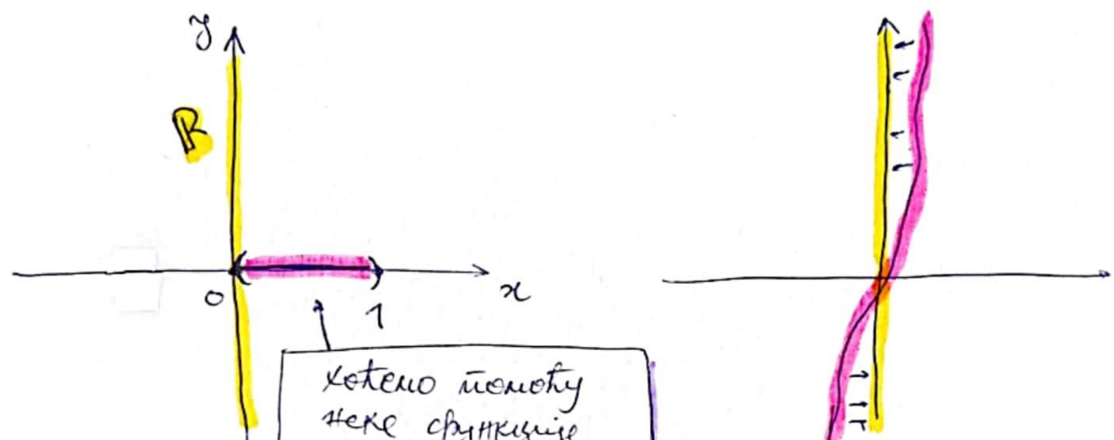
Деф дефиниција За просторе X и Y кажемо да су хомеоморфни ако постоји хомеоморфизам $f: X \to Y$.
Пишемо: $X \approx Y$.

2. Доказати да је $(0,1) \approx \mathbb{R}$.

решење Потребно је да направимо хомеоморфизам

$f:(0,1) \to \mathbb{R}$.

Идеја:



хоћемо помоћу
неке функције
да „развучемо"
ово $(0,1)$ и
залепимо га на
y-осу

формално:

1. корак - „растегнемо" $(0,1)$ до $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$g:(0,1) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad g(x) := \pi \cdot x - \frac{\pi}{2}$$

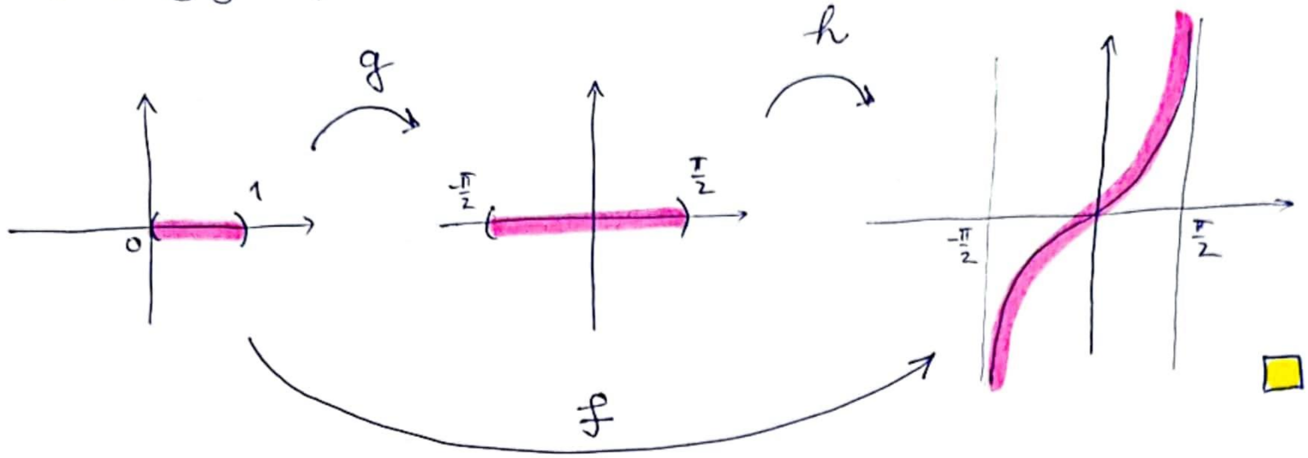
2. корак - „растегнемо" $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ вертикално помоћу $\operatorname{tg} x$.

$$h:\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \operatorname{tg} x.$$

коначно: $f = h \circ g : (0,1) \to \mathbb{R}$

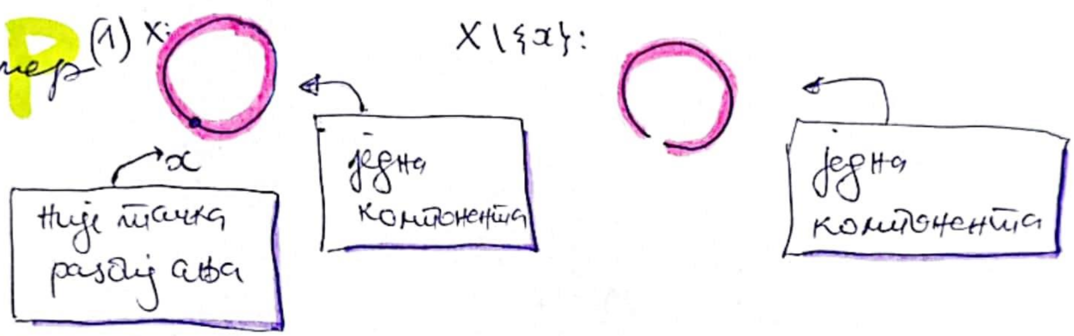
Може се проверити да је f хомеоморфизам - за вежбу

Илустрација решења:

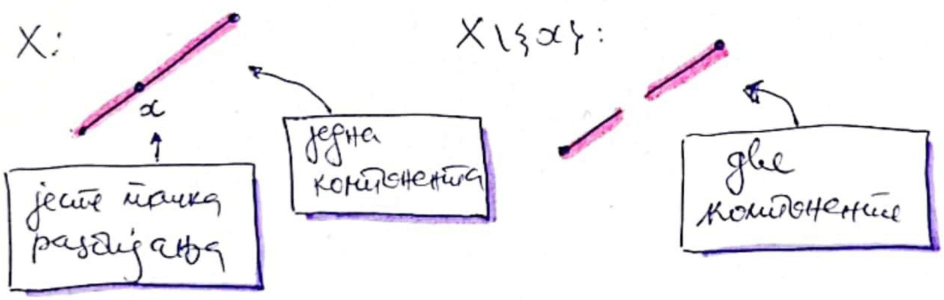


ДЕФ дефиниција $x \in X$ је тачка разбијања ако $X \setminus \{x\}$ има више компоненти повезаности од X

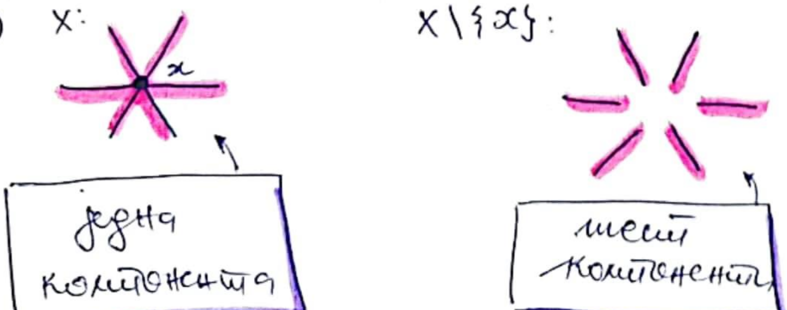
ПР пример (1) X: $X \setminus \{x\}$:



(2) X: $X \setminus \{x\}$:



(3) X: $X \setminus \{x\}$:



Тополошке инваријанте

Дефиниција Тополошке инваријанте су особине тополошких простора које се не мењају при хомеоморфизмима.

Неке тополошке инваријанте су:

(1) компактност

(2) повезаност

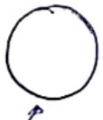
(3) број компоненти повезаности

(4) тачке разбијања

Како ово користимо? Ако два простора имају различите инваријанте (нпр. један је повезан, а други није) онда знамо да сигурно нису хомеоморфни.

ПР пример (1) $[0,1] \not\cong (0,1)$

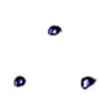
компактан | није компактан

(2)  $\not\cong$ 

Нема тачке разбијања | има тачака разбијања

(3) $(0,1) \cup (5,6) \not\cong (0,6)$

неповезан | повезан

(4)  $\not\cong$ 

5 компоненти повезаности | 3 компоненте повезаности

3. Да ли су хомеоморфни простори:

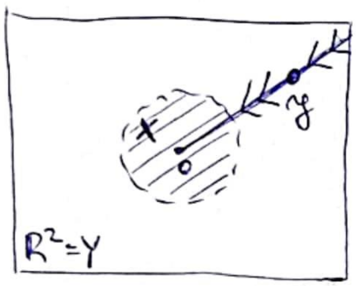
(а) $X = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$ и $Y=\mathbb{R}^2$?

(б) $X=(0,1)$ и $Y=[0,1]$?

(в) $X=[0,1]$ и $Y=[0,17]$?

(г) $X=S^1$ и $Y=\infty$?

решење (а) Јесу. $f: Y \to X$

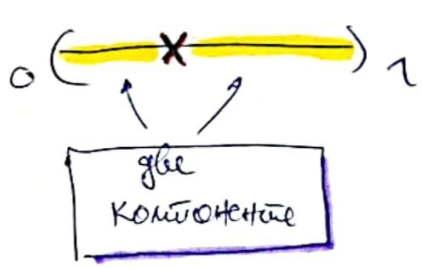


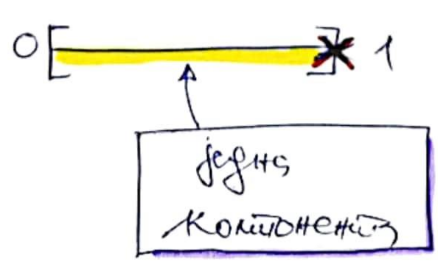
идеја: сваку полуправу из коорд. почетка „скупимо" до (0,1).

$$f(y) := \frac{y}{\|y\|+1}, \quad f^{-1}(x) = \frac{x}{1-\|x\|}$$

f и f^{-1} су непрекидна пресликавања па је f хомеоморфизам.

(б) Нису. У $X=(0,1)$ свака тачка је тачка разбијања, а у $Y=[0,1]$ имамо две тачке (0 и 1) које нису тачке разбијања.





(в) Јесу. $f:[0,1]\to[0,17]$, $f(x):=17\cdot x$,

$f^{-1}(x)=\frac{1}{17}x$. f и f^{-1} су непр., па је f хомео.

(г) Нису.