ОЧИГЛЕДНА ТОПОЛОГИЈА

очигледна топологија

Обавезе на курсу:

1. писмени - 60 (min 27)
2. усмени - 40

асистент Милица Јовановић

e-mail milica_jovanovic@math.rs

сајт poincare.math.rs/~milica_jovanovic

кабинет 824

садржај

Увод

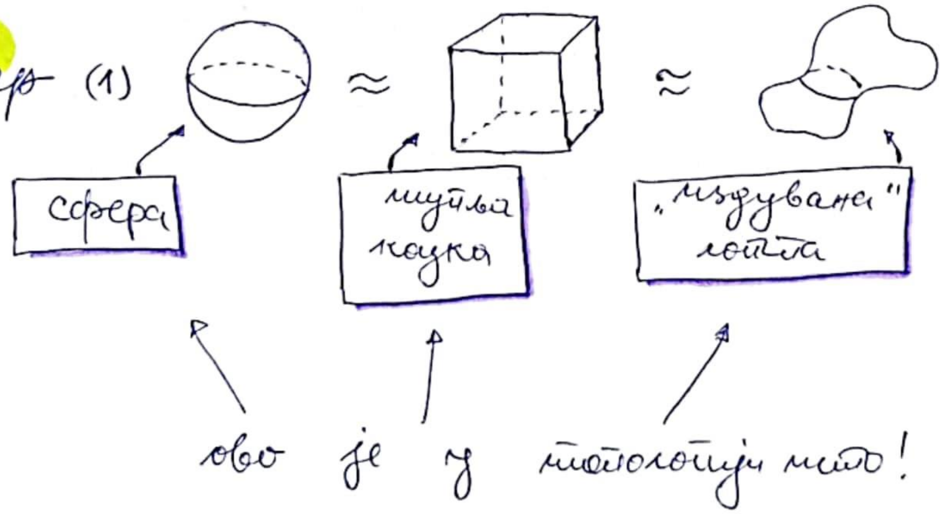
Топологија је „опуштена геометрија". Објекти које изучавамо нису „крути" већ ако један објекат можемо „деформисати" да добијемо други, онда су та два објекта за топологију исто.

Како то тачно смемо деформисати објекат а да му не променимо суштину?

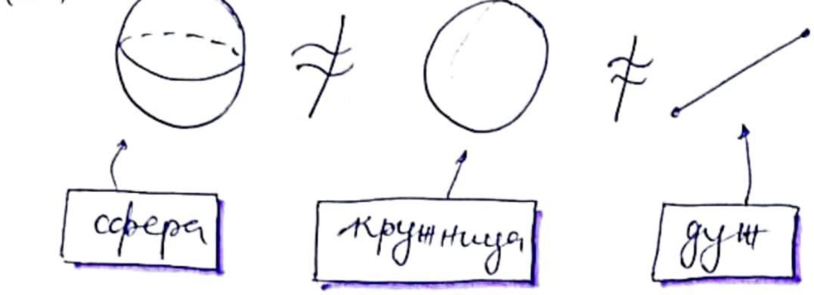
Објекти X и Y су „једнаки" ако постоји бијекција $f: X \to Y$ т.д. су и f и f^{-1} непрекидна.

Ови „објекти" ће бити тополошки простори, а пресликавања f која их идентификују зваћемо хомеоморфизмима. (Ускоро ћемо све формално дефинисати.)

ПР пример (1)



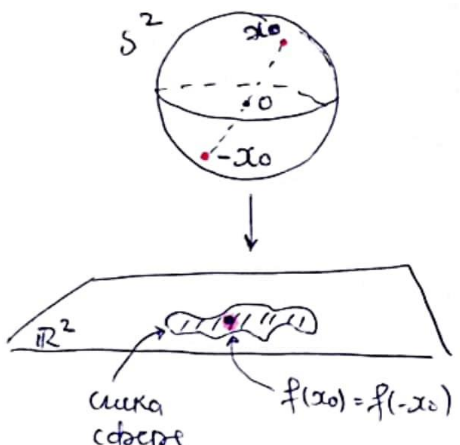
(2)



ово у топологији *није* исто !

Неке познате теореме у топологији:

Т теорема [Борсук-Улам] Нека је $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ непрекидно пресликавање (S^2 = сфера, $\mathbb{R}^2$ = раван). Тада постоји тачка $x_0 \in S^2$ т.д. $f(x_0) = f(-x_0)$.



Сликовито: како год да згужвамо сферу и залепимо је на раван, постоје две антиподалне тачке са сфере које се лепе у исту тачку у равни.

ПР пример У сваком тренутку на Земљи постоји пар антиподалних тачака које имају исту температуру и ваздушни притисак!

(антиподалне = дијаметрално супротне)

доказ Нека је $f : \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Земља}}}{S^2} \to \mathbb{R}^2$ дато са

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} (t(x), p(x))$$

x — локација на Земљи; $t(x)$ — температура у x; $p(x)$ — притисак у x

f је непрекидно, па на основу БУТ:

$(\exists x_0 \in S^2)\ f(x_0) = f(-x_0)$, тј.

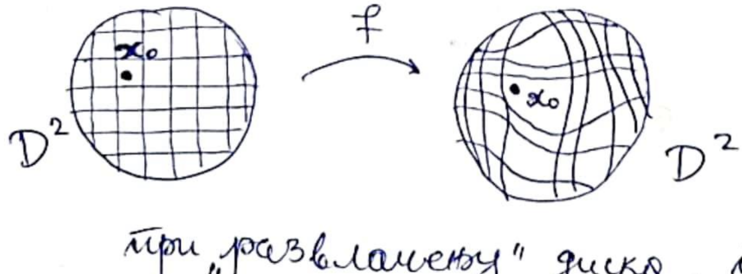
$$t(x_0) = t(-x_0) \quad \text{и} \quad p(x_0) = p(-x_0)$$

температура и притисак у x_0 и $-x_0$ су исти!

■

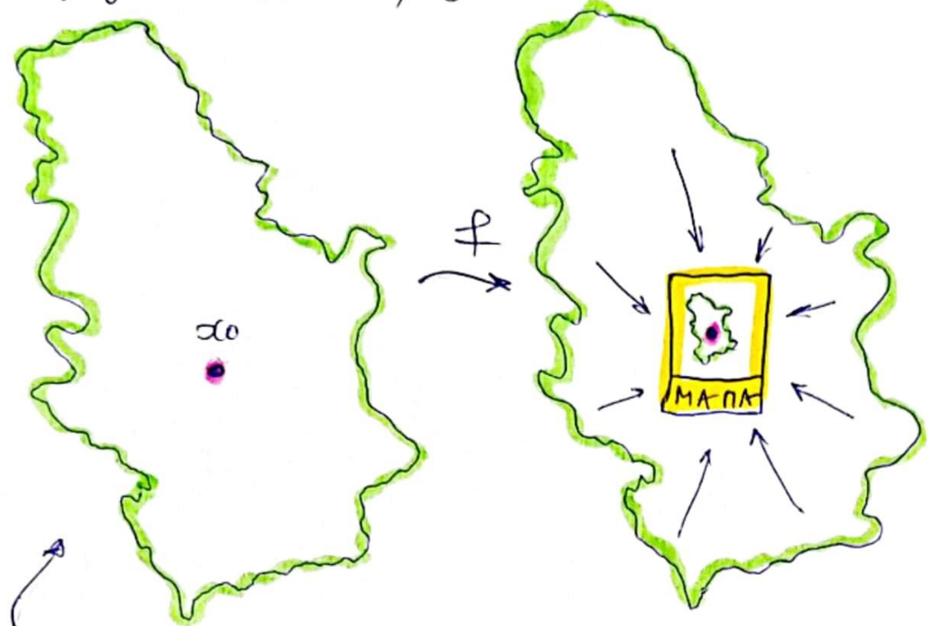
Т теорема [Брауер] Нека је $f : D^2 \to D^2$ непрекидно (D^2 = диск у равни). Тада f има фиксну тачку, тј. постоји $x_0 \in D^2$ т.д. $f(x_0) = x_0$.

Илустрација:



при „развлачењу" диска, тачка x_0 се није померила

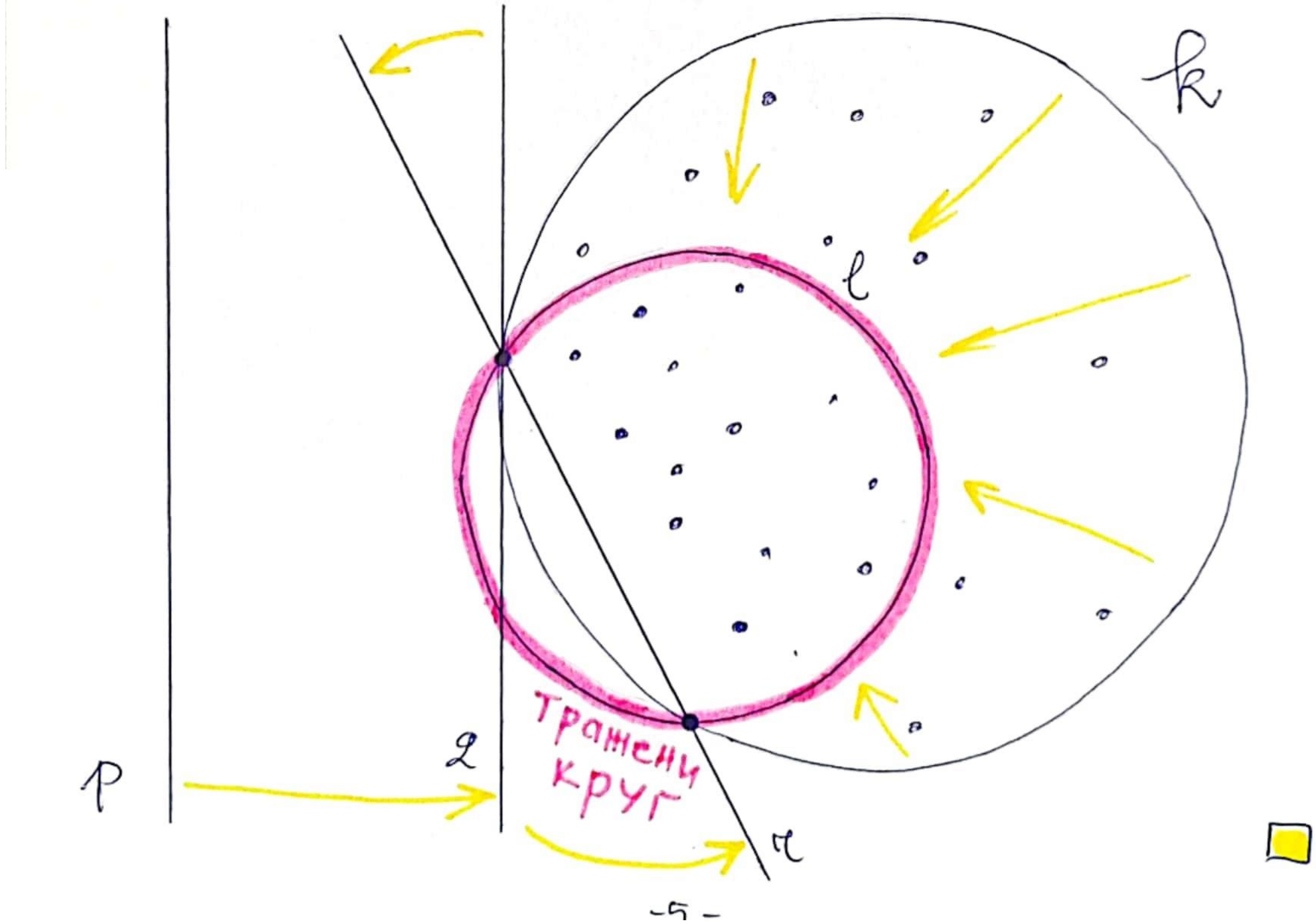
Пример Ако ставимо мапу Србије на сто, постојаће тачка на мапи која се налази баш на локацији коју представља.



У топологији територија Србије је исто што и диск, па можемо применити теорему!

$\boxed{1.}$ Дат је скуп од 2022 тачке у равни у општем положају (никоје три нису колинеарне, никоје четири нису концикличне). Доказати да постоји кружница т.д. је тачно 1712 тачака унутар кружнице, 307 ван круга и 3 на кружници.

решење Уочимо праву p у равни т.д. је свих 2022 тачака са исте стране те праве. Онда транслирамо p док не дође до прве тачке из скупа. Затим је ротирамо да ухвати још једну тачку и нека је то права r. Уочимо сада кружницу k која пролази кроз те две тачке на r и довољно је велика да су све остале тачке унутар ње. Полако смањујемо k (али т.д. све време садржи тачке са r) и избацујемо једну по једну тачку све док не добијемо да је тачно 1712 унутра.



Основни појмови

деф дефиниција Нека је X скуп и $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ фамилија неких подскупова од X т.д. важи:

(1) $\phi, X \in \mathcal{T}$;

(2) $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$;

(3) $U_\alpha \in \mathcal{T},\ \alpha \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \in \mathcal{T}$.

Тада $\mathcal{T}$ називамо топологијом на X, а пар $(X, \mathcal{T})$ тополошким простором. Елементе од $\mathcal{T}$ називамо отвореним скуповима.

пр пример Сваки метрички простор је и тополошки простор. Нпр. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ је метрички простор, па и тополошки пр. Отворени скупови би били отворени интервали и њихове уније. (нпр. $(1,2)$, $(1,3) \cup (5,7)$ су отворени, $[1,3)$ није).

деф дефиниција (1) $V \subseteq X$ је затворен, ако је $X \setminus V$ отворен. Фамилију свих затворених скупова означавамо са $\mathcal{F}$.

(2) $K \subseteq X$ је компактан ако сваки његов отворен покривач има коначан потпокривач

тј. ако $K \subseteq \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \Rightarrow$ постоје $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k \in A$

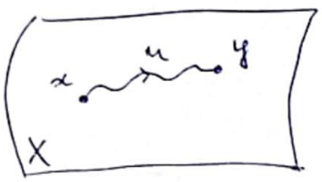
т.д. $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} U_{\alpha_k}$

(3) X је повезан ако

$$(\forall U,V\in\mathcal{T})\ \ X = U\sqcup V \Rightarrow U=\emptyset \text{ или } V=\emptyset$$

(4) X је путно повезан ако

$$(\forall x,y\in X)\,(\exists u:[0,1]\to X \text{ непрекидно})\ u(0)=x,\ u(1)=y$$



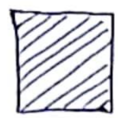
тј. сваке две тачке се могу спојити путем

ПР

пример (1) Посматрамо $\mathbb{R}$ са стандардном топологијом (наслеђеном од метрике)

	$[0,1]$	$(0,1)\cup(2,5)$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Q}$
отворен	✗	✓	✗	✗
затворен	✓	✗	✓	✗
повезан	✓	✗	✗	✗
компактан	✓	✗	✗	✗
путно повезан	✓	✗	✗	✗

(2) Посматрамо $\mathbb{R}^2$ са стандардном топологијом

					$\mathbb{R}^2$
отворен	✗	✓	✗	✗	✓
затворен	✓	✗	✗	✓	✓
повезан	✓	✗	✓	✓	✓
компактан	✓	✗	✗	✓	✗
путно повезан	✓	✗	✓	✓	✓
	пун квадрат са границом	два одвојена круга без границе	квадрат без једне ивице	дуж	цела раван

Деф дефиниција Нека су $(X, \mathcal{T}_X)$ и $(Y, \mathcal{T}_Y)$ тополошки простори. Пресликавање $f: X \to Y$ је непрекидно ако је инверзна слика сваког отвореног скупа из Y отворена у X, тј.

$$(\forall U \in \mathcal{T}_Y) \quad f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X.$$

Деф дефиниција $f: X \to Y$ је хомеоморфизам ако је бијекција и f и f^{-1} су непрекидна.

ПР пример $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ је хомеоморфизам.
(f је бијекција и $f(x) = x^3$ и $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ су непр.)

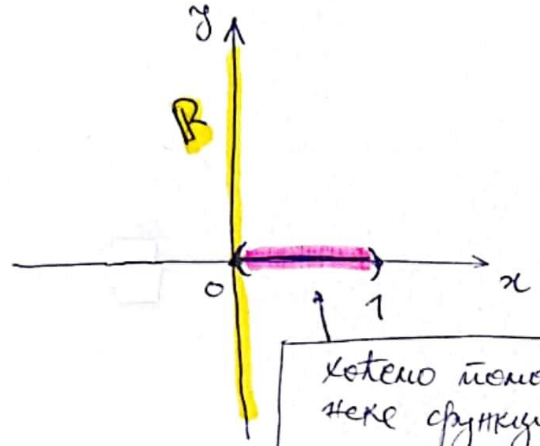
Деф дефиниција За просторе X и Y кажемо да су хомеоморфни ако постоји хомеоморфизам $f: X \to Y$.
Пишемо: $X \approx Y$.

$\boxed{2.}$ Доказати да је $(0,1) \approx \mathbb{R}$.

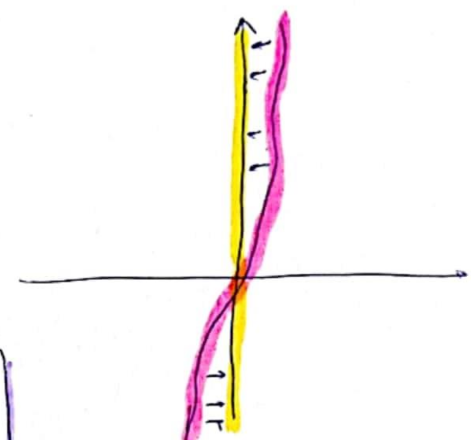
решење Потребно је да направимо хомеоморфизам

$$f:(0,1) \to \mathbb{R}.$$

Идеја:



хоћемо помоћу неке функције да „развучемо" ово $(0,1)$ и залепимо га на y-осу



формално:

1. корак – „растегнемо" $(0,1)$ до $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$g:(0,1) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad g(x) := \pi \cdot x - \frac{\pi}{2}$$

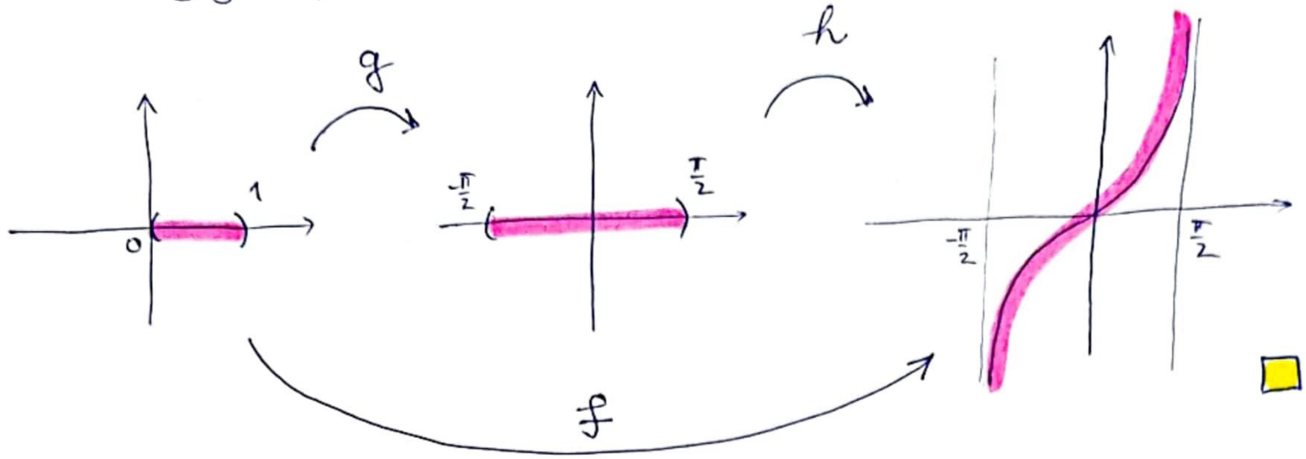
2. корак – „растегнемо" $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ вертикално помоћу $\operatorname{tg} x$.

$$h:\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \operatorname{tg} x.$$

коначно: $f = h \circ g : (0,1) \to \mathbb{R}$

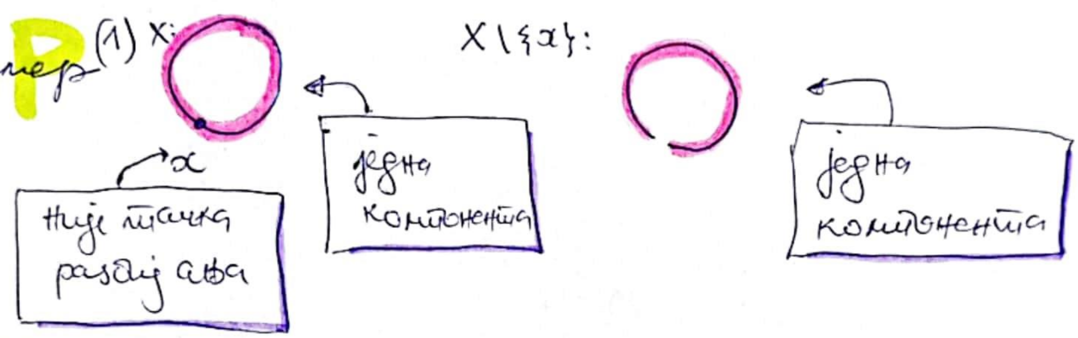
Може се проверити да је f хомеоморфизам – за вежбу

Илустрација решења:

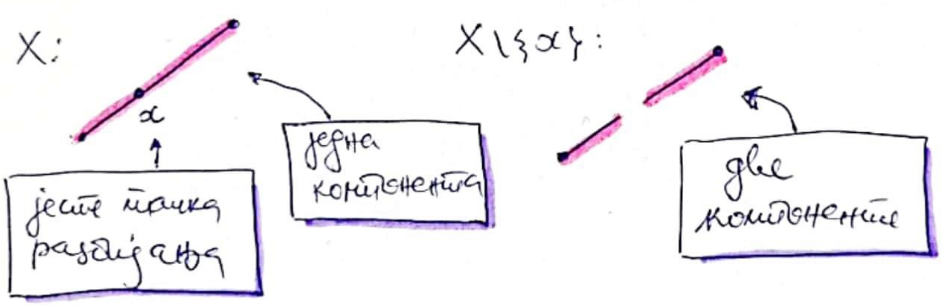


Деф дефиниција $x \in X$ је тачка разбијања ако $X \setminus \{x\}$ има више компоненти повезаности од X.

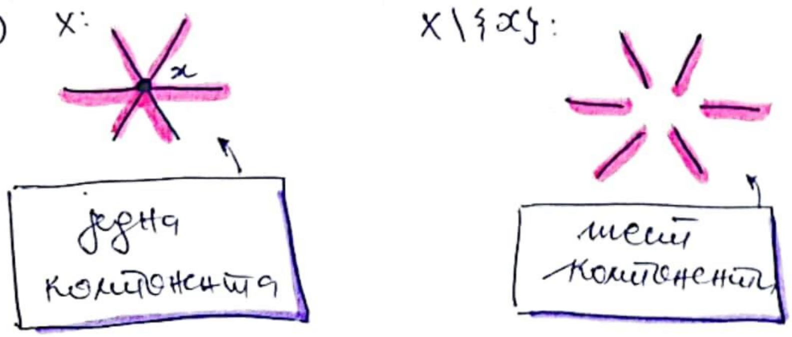
ПР пример (1) X: $X\setminus\{x\}$:



(2) X: $X\setminus\{x\}$:



(3) X: $X\setminus\{x\}$:



Тополошке инваријанте

Дефиниција Тополошке инваријанте су особине тополошких простора које се не мењају при хомеоморфизмима.

Неке тополошке инваријанте су:

(1) компактност

(2) повезаност

(3) број компоненти повезаности

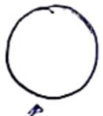
(4) тачке разбијања

Како ово користимо? Ако два простора имају различите инваријанте (нпр. један је повезан, а други није) онда знамо да сигурно нису хомеоморфни.

ПР пример (1) $[0,1] \not\cong (0,1)$

компактан

није компактан

(2)  $\not\cong$ 

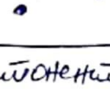
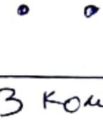
Нема тачке разбијања

има тачака разбијања

(3) $(0,1) \cup (5,6) \not\cong (0,6)$

неповезан

повезан

(4)  $\not\cong$ 

5 компоненти повезаности

3 компоненте повезаности

3. Да ли су хомеоморфни простори:

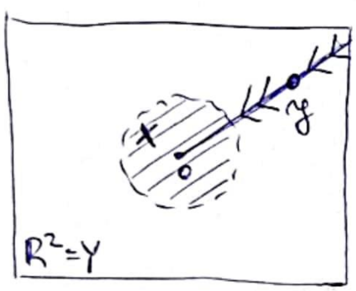
(а) $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$ и $Y = \mathbb{R}^2$?

(б) $X = (0,1)$ и $Y = [0,1]$?

(в) $X = [0,1]$ и $Y = [0,17]$?

(г) $X = S^1$ и $Y = \infty$?

решење (а) Јесу. $f : Y \to X$

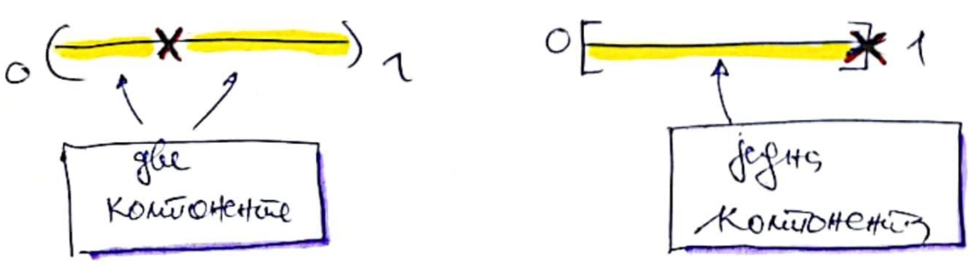


идеја: сваку полуправу из коорд. почетка „скупимо" до (0,1).

$$f(y) := \frac{y}{\|y\|+1}, \quad f^{-1}(x) = \frac{x}{1-\|x\|}$$

f и f^{-1} су непрекидна пресликавања па је f хомеоморфизам.

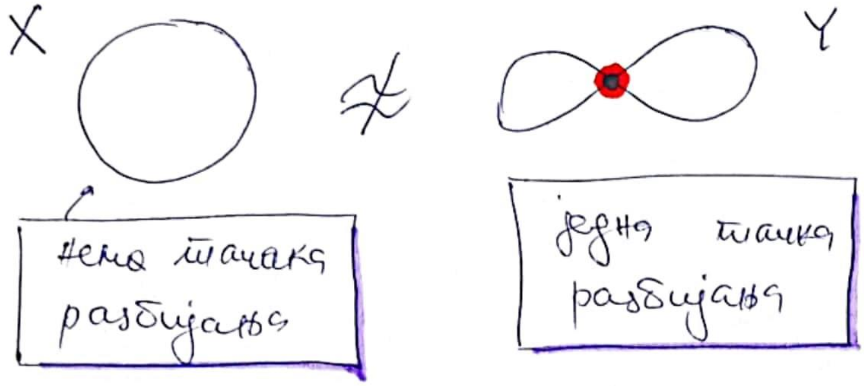
(б) Нису. У $X=(0,1)$ свака тачка је тачка разбијања, а у $Y=[0,1]$ имамо две тачке (0 и 1) које нису тачке разбијања.



(в) Јесу. $f:[0,1]\to[0,17]$, $f(x):=17\cdot x$,

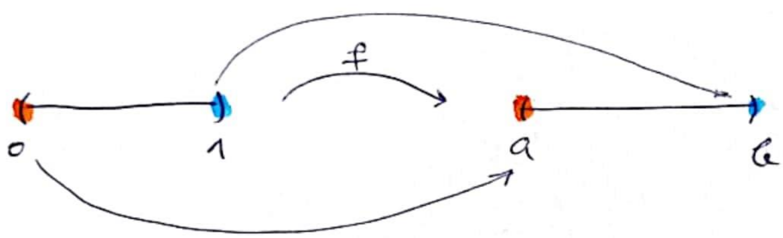
$f^{-1}(x)=\frac{1}{17}x$. f и f^{-1} су непр., па је f хомео.

(г) Нису.



4. Доказати да је $(a,b)\approx(0,1)$, $-\infty<a<b<+\infty$.

решење



Хоћемо да $(0,1)$ растегнемо и транслирамо до (a,b), тј. правимо линеарно пресликавање $f:(0,1)\to(a,b)$ т.д. $f(0)=a$ и $f(1)=b$.

$f(t)=k\cdot t+n$ – треба наћи k и n.

$a=f(0)=k\cdot 0+n \Rightarrow n=a$

$b=f(1)=k\cdot 1+n \Rightarrow b=k+a \Rightarrow k=b-a$

Дакле, $f(t)=(b-a)\cdot t+a$.

Нађимо инверз $f^{-1}: (a,b) \longrightarrow (0,1)$

$$(b-a)t + a = s$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{s-a}{b-a} \qquad \Rightarrow \quad f^{-1}(s) = \frac{s-a}{b-a}$$

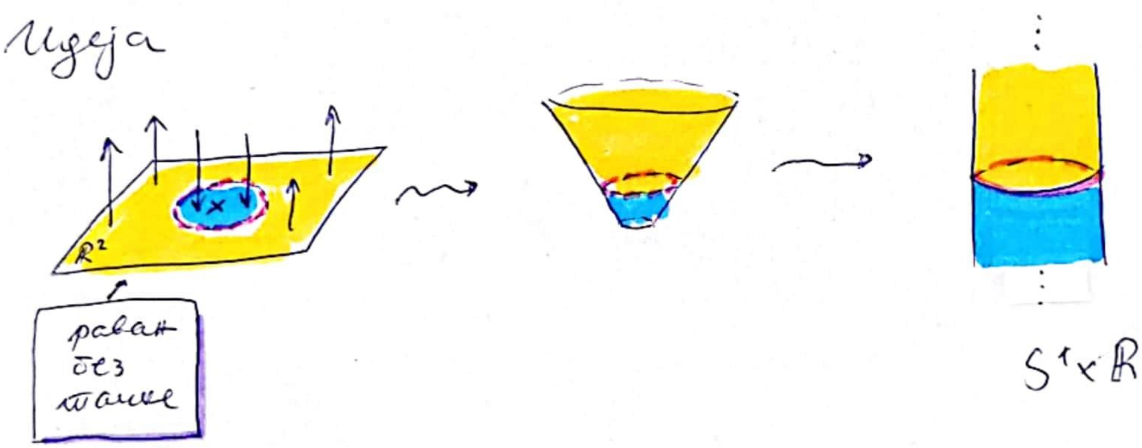
Очигледно су f и f^{-1} непрекидна пресликавања, па је f хомеоморфизам, тј. $(0,1) \approx (a,b)$. □

5. Доказати да је $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \approx S^1 \times \mathbb{R}$

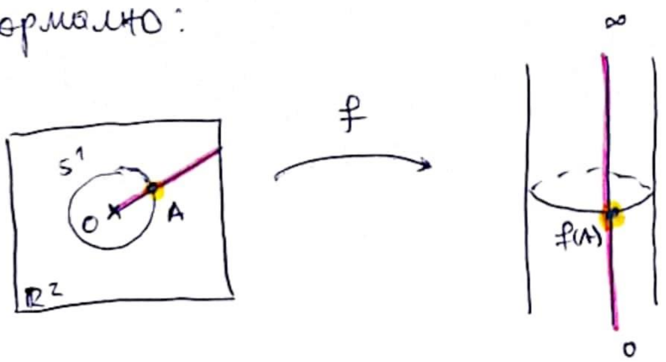
цилиндар

решење

Идеја



формално:



$$f(x) = \left(\frac{x}{\|x\|}, \ln \|x\| \right)$$ – ово ће бити хомеоморфизам.

□

Конструкција нових простора од старих

Подсетник: Ако је X скуп и $\sim$ релација еквиваленције (рефлексивна, симетрична и транзитивна), онда са $X/_\sim$ означавамо простор свих класа еквиваленције. Елементи од $X/_\sim$ су класе $[x] = \{y \in X \mid x \sim y\}$.

Нека је X тополошки простор и $A \subseteq X$. Дефинишемо релацију $\sim$ на X:

$$(\forall x, y \in X) \quad x \sim y \overset{def}{\iff} x, y \in A.$$

1 Дефинишемо количнички простор

$$\boxed{X/A \overset{def}{=} X/_\sim}$$

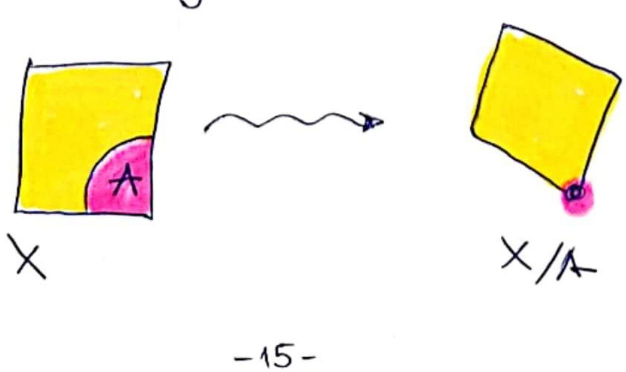
Може се дефинисати и топологија на X/A:

$$\mathcal{T}_{X/A} = \{ U \subseteq X/A \mid \pi^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X \},$$

где је $\pi : X \to X/A$ природна пројекција.

Главна идеја: X/A је простор који добијемо кад A скупимо у тачку.

Илустрација:



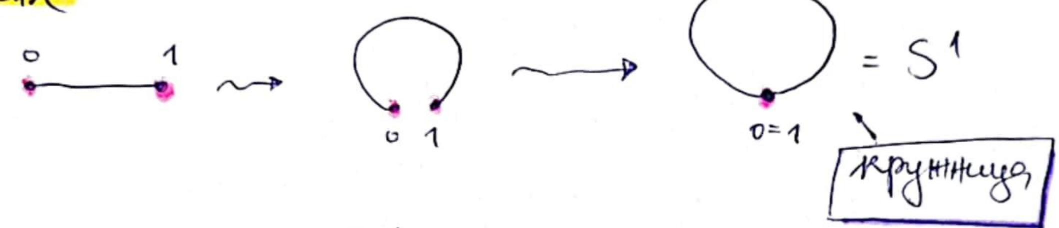
6. Одредити чему су простори хомеоморфни:

(а) $[0,1]/\{0,1\}$; (б) $[1,6]/\{1,2,3,4,5,6\}$;

(в) D^2/S^1 ; (г) $\mathbb{R}^2/D^2$.

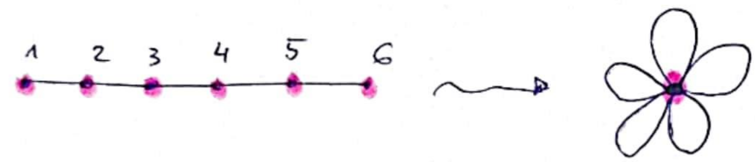
решење

(а)

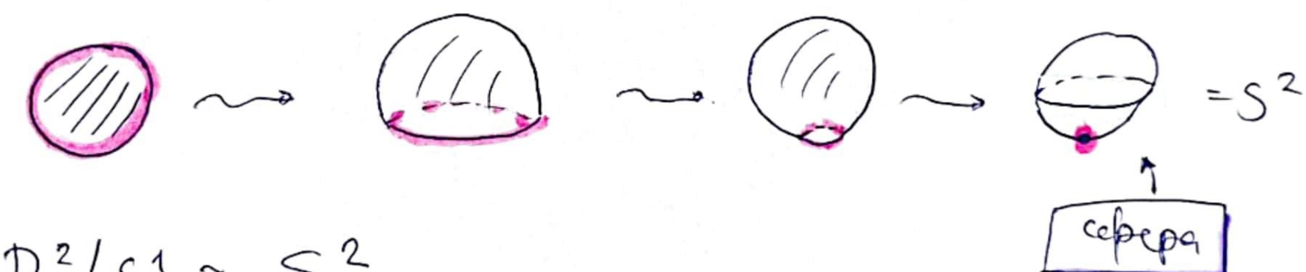


$[0,1]/\{0,1\} \approx S^1$

(б)

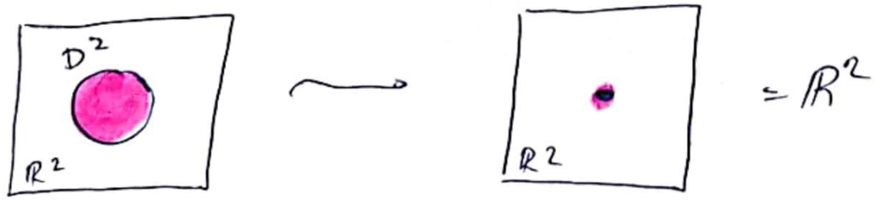


(в)



$D^2/S^1 \approx S^2$

(г)



$\mathbb{R}^2/D^2 \approx \mathbb{R}^2$ ∎

Напомена: не мешати \ и /.

Нпр. $[0,1]/\{0,1\} \approx S^1$

$[0,1]\setminus\{0,1\} \approx (0,1)$

2 Декартов производ простора

$$X \times Y \overset{def}{=} \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

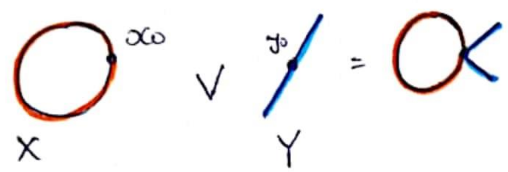
Може се дефинисати и топологија на $X \times Y$ па то заиста буде тополошки простор.

3 Букет простора X и Y

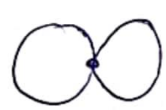
Нека су $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$ фиксиране тачке.

Букет је $X \vee Y \overset{def}{=} X \sqcup Y /_{x_0 \sim y_0}$

X и Y залепимо у тачкама x_0 и y_0

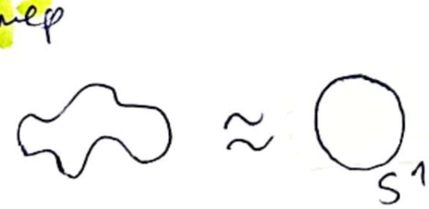
нпр. 

Често ће бити свеједно шта су x_0 и y_0, па то нећемо ни наглашавати.

Нпр. $S^1 \vee S^1 \simeq$ 

Напомена: Знамо да је свака непрекидна трансформација (без сецкања и лепљења) један хомеоморфизам, али треба бити обазрив јер неке хомеоморфизме не можемо видети као непрекидне трансформације!

пример

(1) 

„очигледно"

(2) 

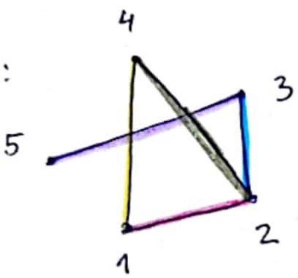
два уланчана круга су хомеоморфна са два одвојена тако их не можемо раздвојити без сецкања.

Теорија графова

ДЕФ дефиниција: Граф је уређен пар скупова (V, E), где је V скуп темена графа, а E скуп ивица, тј. $E \subseteq V \times V$. (E = edges, V = vertices)

ПР пример: $V = \{1,2,3,4,5\}$, $E = \{(1,2),(1,4),(2,3),(2,4),(3,5)\}$

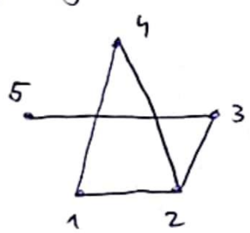
G :



$G = (V, E)$

ДЕФ дефиниција: Индекс темена $v \in V$ је број ивица које из њега крећу. Ознака: $ind(v)$.

ПР пример: G :



$ind(1) = 2$ $\quad$ $ind(4) = 2$

$ind(2) = 3$ $\quad$ $ind(5) = 1$

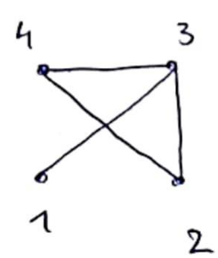
$ind(3) = 2$

ДЕФ дефиниција: Геометријска реализација графа је уцртавање графа у $\mathbb{R}^n$ за неко $n \in \mathbb{N}$.

ПР пример: $V = \{1,2,3,4\}$, $E = \{(1,3),(3,4),(2,4),(2,3)\}$

$G = (V, E)$ - граф

Геометријска реализација:



граф у $\mathbb{R}^2$

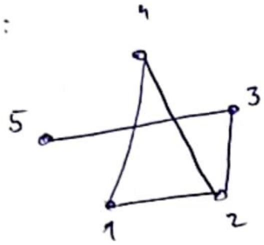
1. Нека је G коначан граф. Означимо са $a_k(G)$ број темена од G која имају индекс k.

Доказати $$|E| = \frac{a_1(G)+2a_2(G)+\cdots+n\,a_n(G)}{2}$$

решење

Проверимо прво на примеру:

G:



$a_1(G) = 1$

$a_2(G) = 3$

$a_3(G) = 1$

$a_4(G) = 0$

$a_5(G) = 0$

бр. ивица

$$|E| = \frac{1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 1 + 4\cdot 0 + 5\cdot 0}{2} = \frac{10}{2} = 5 \checkmark$$

Сад формално.

$$|E| = \frac{\text{ind } v_1 + \text{ind } v_2 + \cdots + \text{ind } v_m}{2} = \frac{a_1(G)+2a_2(G)+\cdots+n\,a_n(G)}{2}$$

сваку ивицу бројимо дупло па зато делимо са 2

$a_k(G) \cdot k$

број темена из којих креће k ивица

за свако теме бројимо по њих k ивица

Нпр. за G одозго:

$$\frac{\text{ind}(1)+\text{ind}(2)+\text{ind}(3)+\text{ind}(4)+\text{ind}(5)}{2} = \frac{2+3+2+2+1}{2} = \frac{1\cdot 1 + 3\cdot 2 + 1\cdot 3 + 0\cdot 4 + 0\cdot 5}{2} =$$

$$= \frac{a_1(G)+2a_2(G)+\cdots+5a_5(G)}{2} \quad \square$$

2. Ако за свако $v \in V$ важи $\mathrm{ind}(v) \geq 2$, онда G има подграф G' т.д. је $G' \cong S^1$ (тј. негде у графу се појављује затворени пут)

решење

нпр.

Претпоставимо супротно да нема затвореног пута.

Уочимо најдужи отворени пут $(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k})$ (v_{i_j} су нека темена графа).

Тада је $\mathrm{ind}(v_{i_k}) = 1$ (јер је то крај пута) ↯ $\square$

дефиниција Граф је уникурсалан ако се може „нацртати једним потезом".

пример

јесте уникурс. није уникурс.

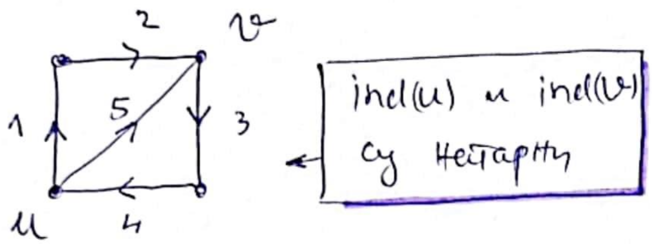
3. [Важан задатак] Ако је G повезан и уникурсалан, онда он има највише 2 темена непарног индекса.

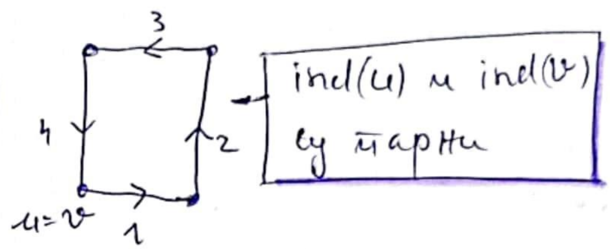
решење Ако се граф може нацртати једним потезом то значи да постоји путања која креће од неког $u \in V$ и завршава се у неком $v \in V$ и пролази кроз све гране.

Ако је $w \in V \setminus \{u,v\}$ тј. w није почетак ни крај, онда је пут „ушао" и „изашао" из w исти број пута, па је $\mathrm{ind}(w)$ паран.

Индекс од u и v може бити и паран и непаран. ■

пример



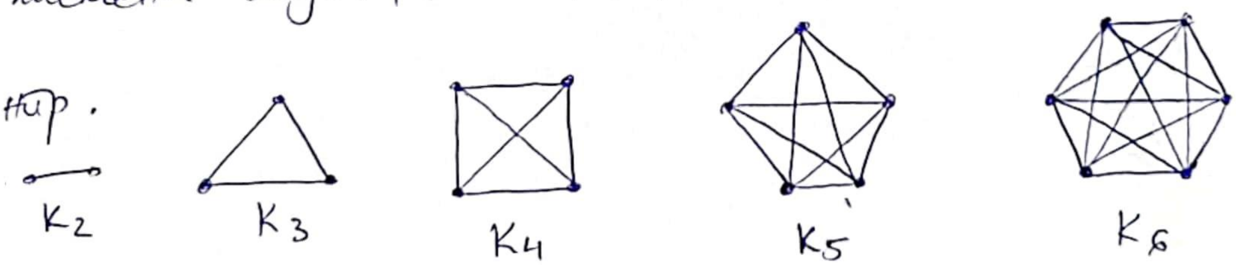


Важи и више:

теорема Граф је уникурсалан АККО садржи највише два темена непарног индекса.

дефиниција Граф је комплетан ако су му свака два темена спојена. Ознака: K_n.

нпр.



3. Да ли је K_n уникурсалан?

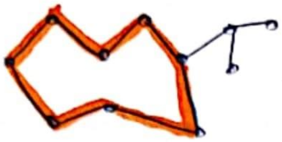
решење У K_n свако теме је повезано са $n-1$ теменом тј. $\mathrm{ind}(v)=n-1$ за свако $v \in K_n$.

Очигледно је K_2 уникурсалан. На основу теореме:

за $n \geq 3$: K_n је уникурс. $\Leftrightarrow$ n је непарно. ■

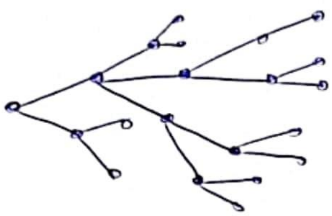
деф. дефиниција Контура (цикл) у графу је затворен ланац ивица хомеоморфан кружници.

npr.



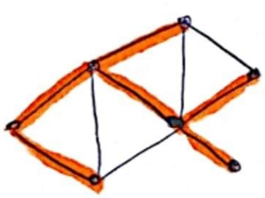
деф. дефиниција Повезан граф без контура зове се дрво (стабло)

npr.



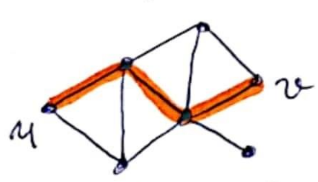
деф. дефиниција Максимално дрво у G је подграф од G који је дрво и садржи сва темена.

npr.



деф. дефиниција Елементаран ланац ивица од темена u до v је ланац који крене од u, завршава се у v и хомеоморфан је дужи.

npr.



4. Ако је G дрво, $u, v \in G$, онда постоји јединствени ланац од u до v.

решење ПТС. да постоје 2 ланца $\Rightarrow$ кад их надовежемо добијамо контуру ↯ $\square$

дефиниција: Ојлерова карактеристика графа G је

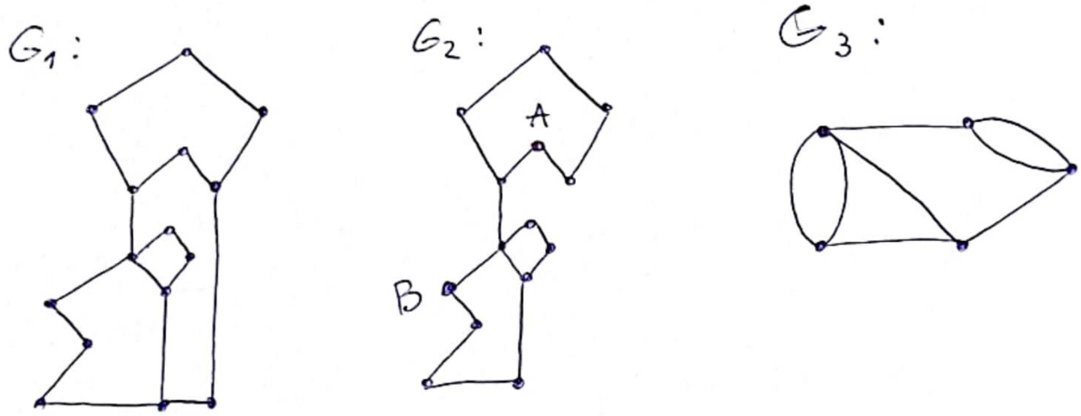
$$\chi(G) \stackrel{def}{=} |V| - |E|.$$

Подсетник: у геометрији је

$$\chi(\underbrace{\Pi}_{\text{полиедар}}) = \underbrace{t}_{\text{бр. темена}} - \underbrace{i}_{\text{бр. ивица}} + \underbrace{p}_{\text{бр. пљосни}}$$

Уникурсалност и Ојлерова карактеристика су тополошке инваријанте. (тј. $G_1 \cong G_2 \Rightarrow \chi(G_1) = \chi(G_2)$)

5. Дати су графови:



(а) $\chi(G_i) = ?$

(б) Који од ових графова су уникурсални? Оне које јесу нацртати једним потезом.

(в) Да ли међу овим графовима има хомеоморфних?

(г) Колико подграфова хомеоморфних S^1 има G_2?

(д) Наћи 6 различитих елементарних ланаца у G_2 који спајају A и B.

(ђ) У сваком графу наћи по једно максимално дрво.

(е) У G_1 додати 1 ивицу т.д. постане уникурсалан.

решење

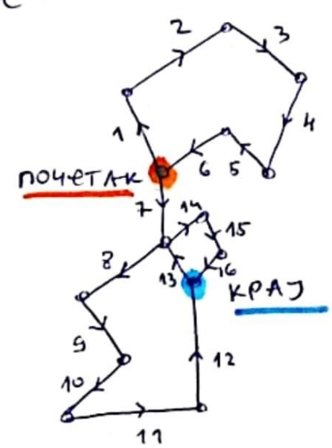
(а) $\chi(G_1) = 15 - 18 = -3$

$\chi(G_2) = 14 - 16 = -2$

$\chi(G_3) = 5 - 8 = -3$

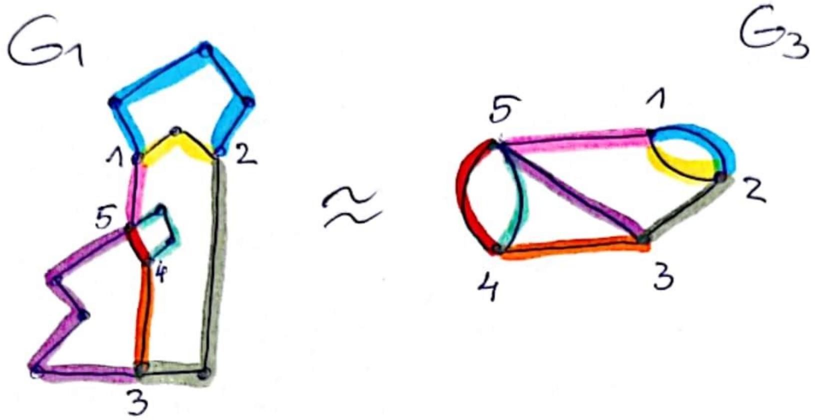
(б) $\left.\begin{array}{l} G_1 \text{ има 4 темена непарног индекса} \\ G_2 \text{ има 2 } -\|- \\ G_3 \text{ има 4 } -\|- \end{array}\right\} \Rightarrow$ само G_2 је уникурс.

цртање:

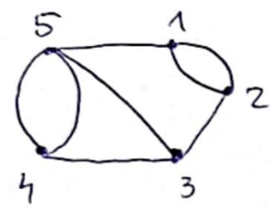


(в) Из (а) и (б) видимо да $G_1 \not\approx G_2$ и $G_3 \not\approx G_2$.

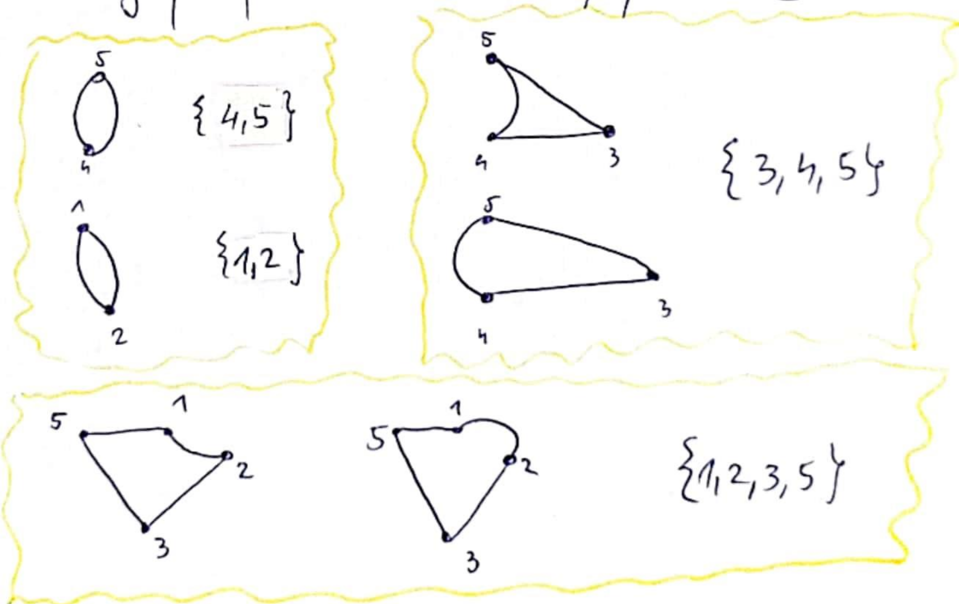
Једино још може бити $G_1 \approx G_3$ и ова два графа јесу хомеоморфна:

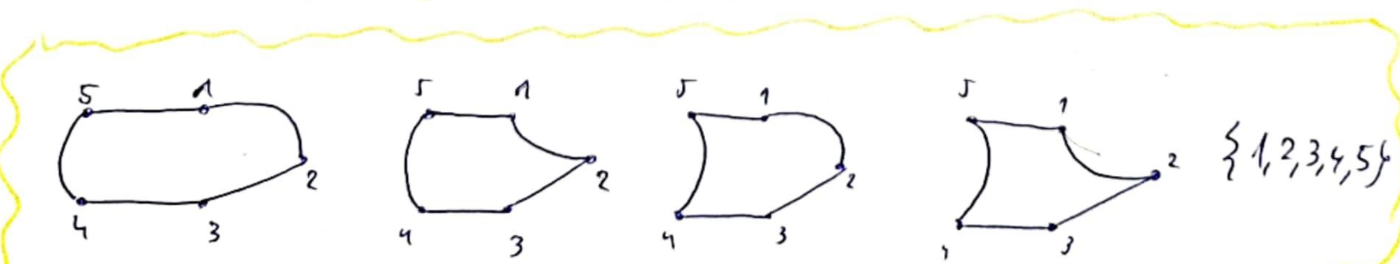


(г) Лакше је да посматрамо G_3 јер $G_1 \approx G_3$.



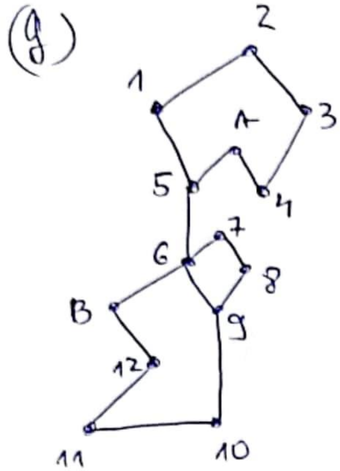
Подграфови хомеоморфни S^1:





Укупно: $\underline{\underline{10}}$

(д)



Елементарни ланци:

(A, 5, 6, B)

(A, 4, 3, 2, 1, 5, 6, B)

(A, 5, 6, 9, 10, 11, 12, B)

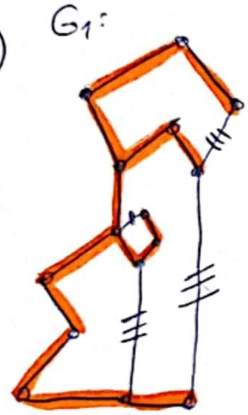
(A, 4, 3, 2, 1, 5, 6, 9, 10, 11, 12, B)

(A, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, B)

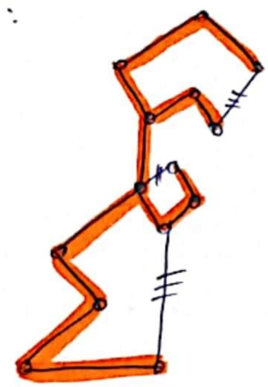
(A, 4, 3, 2, 1, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, B)

(ђ)

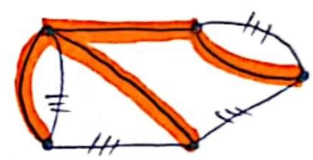
G_1:



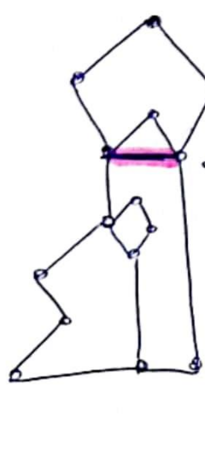
G_2:



G_3:



(е)



спајамо било која два темена непарног индекса

6. (а) Доказати да у сваком стаблу постоји бар једно теме индекса 1.

(б) Ако је T дрво доказати $|E| = |V| - 1$.

(в) Ако је G граф који не садржи ниједну контуру доказати да је $\chi(G)$ једнак броју компоненти путне повезаности од G.

решење (а) пс. $\operatorname{ind}(v) \geq 2$ за свако $v \in V$

$\Longrightarrow$ постоји подграф хомеоморфан S^1 тј. T има контуру ↯

Зад. 2 стр. 20

(б) Нека је $|V| = n$. Радимо индукцију по n.

база: $n = 1$ ✓ $(|E| = 0)$

хипотеза: $|V| = n \Rightarrow |E| = n - 1$

корак: Нека је $|V| = n+1$. Из (а) имамо v тд. $\operatorname{ind} v = 1$. Избацимо v и његову ивицу и добијамо дрво са n темена $\overset{\text{и.х.}}{\Longrightarrow}$ оно има $n-1$ ивицу. Вратимо v и његову ивицу $\Rightarrow$ полазно дрво има $|E| = n$ ивица.

(в) Нека G има k компоненти путне повезаности. Свака компонента је дрво, тј. $G = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_k$, па је

$$\chi(G) = \chi(T_1) + \chi(T_2) + \dots + \chi(T_k) =$$

$$= (n_1 - (n_1 - 1)) + (n_2 - (n_2 - 1)) + \dots + (n_k - (n_k - 1)) = k$$

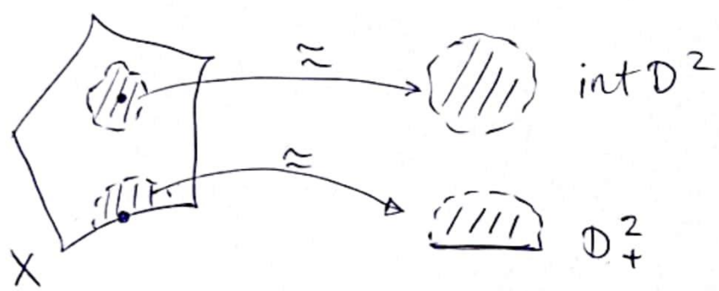
где је $n_i = |V_i|$ - број темена од T_i. ■

Површи

Деф ~~дефиниција~~ X је површ без границе ако свака тачка $a \in X$ има околину U_a хомеоморфну отвореном диску $\text{int } D^2$.

$$\text{int } D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$$

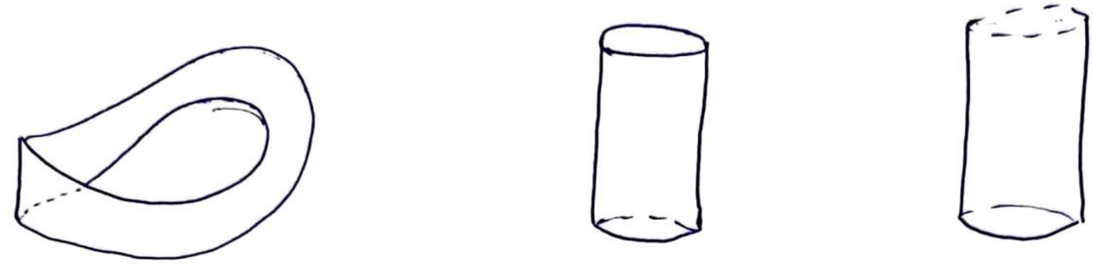
X је површ са границом ако свака тачка $a \in X$ има околину U_a хомеоморфну отвореном диску $\text{int } D^2$ или полудиску $D^2_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1,\ y \geq 0\}$



ПР ~~пример~~ (1) Површи без границе

S^2 $\qquad$ $S^1 \times (0,1)$ $\qquad$ $\mathbb{R}^2$

(2) Површи са границом



M (Мебијусова трака) $\rightsquigarrow$ $\partial M = S^1$ - круг

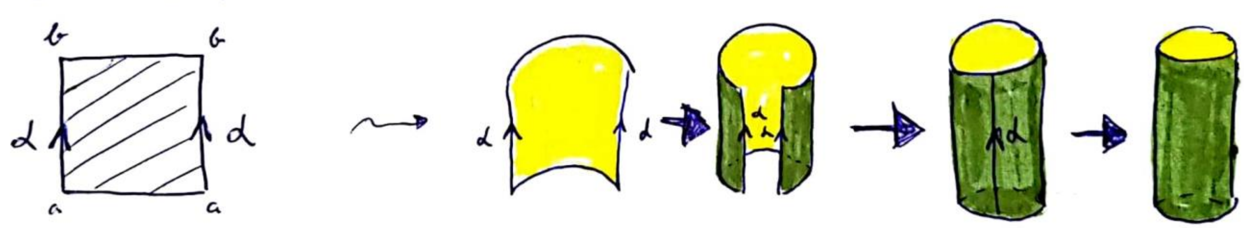
$S^1 \times [0,1]$ $\rightsquigarrow$ $\partial(S^1\times[0,1]) = S^1 \sqcup S^1$ два круга

$S^1 \times [0,1)$ $\rightsquigarrow$ $\partial(S^1\times[0,1)) = S^1$ круг

Деф ~~дефиниција~~: Површ је затворена ако је компактна и без границе.

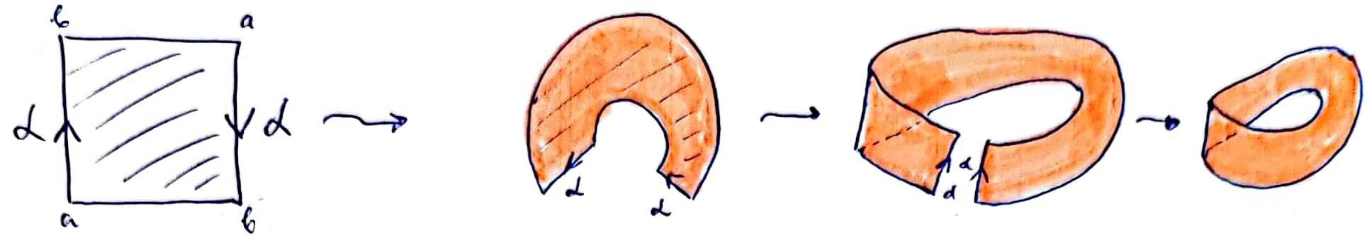
Количнички модели у равни

1. Цилиндар C

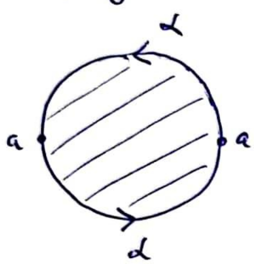


ово значи да лепимо α на α у смеру стрелица

2 Мебијусова трака

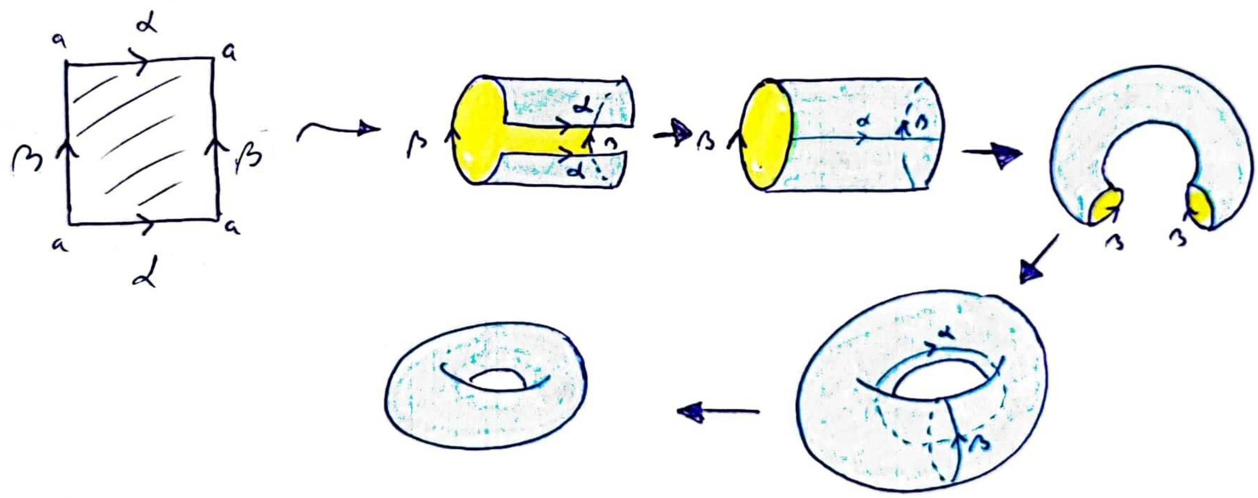


3. Пројективна раван $\mathbb{R}P^2$

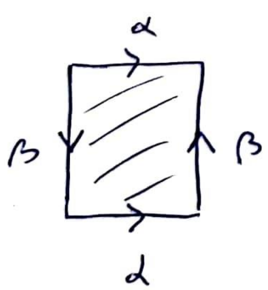


Не може да се види у $\mathbb{R}^3$ па зато нема илустрације

4 Торус T^2



5 Клајнова боца K

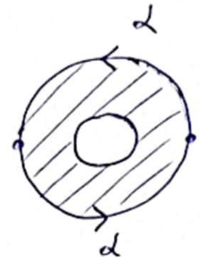


Не може се видети у $\mathbb{R}^3$

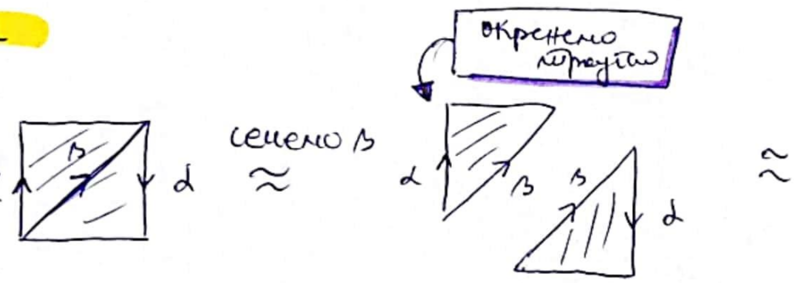
Сецкање и лепљење

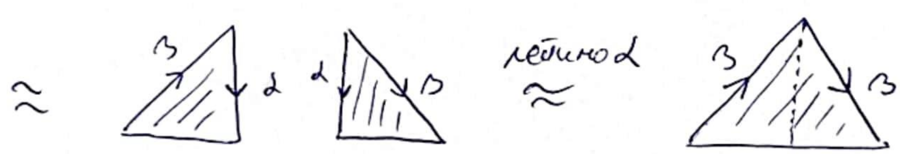
1. Доказати да је

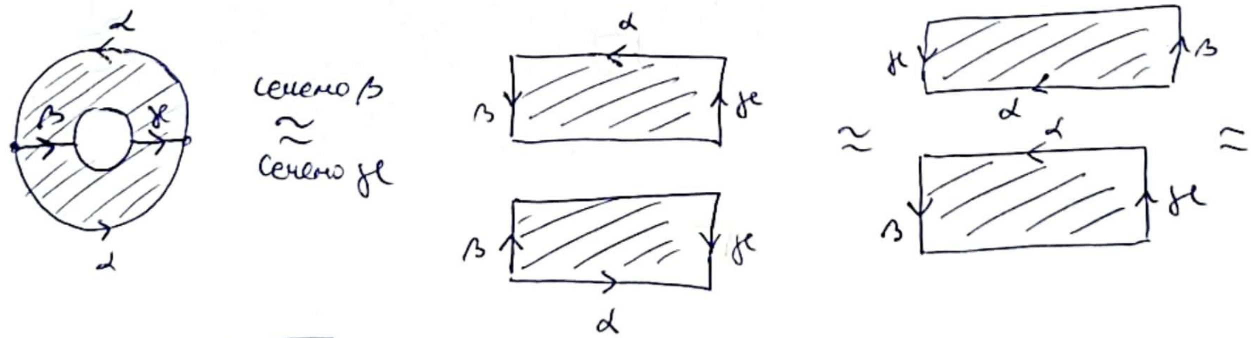
(а) M ≈ 

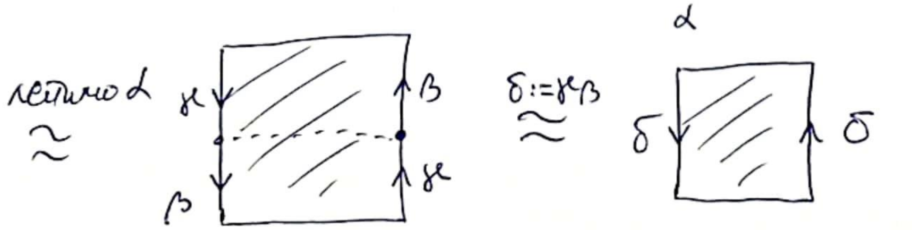
(б) M ≈ 

решење

(а) M ≈ 

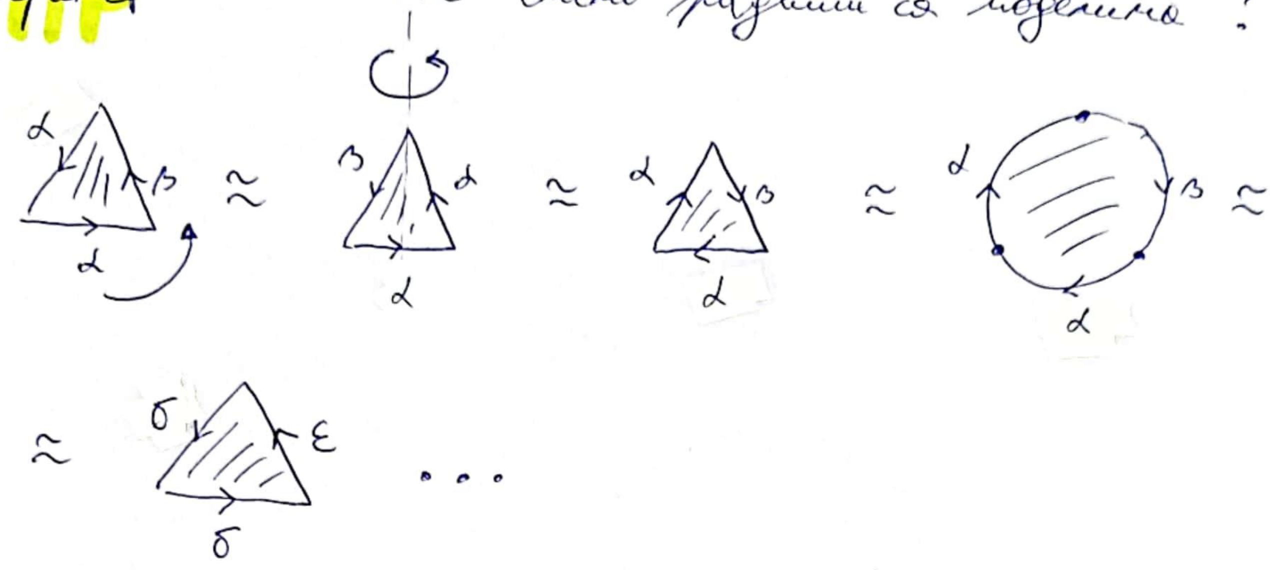


(б) 

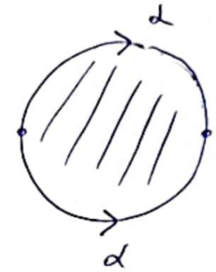


≈ M ■

ПР пример Шта све смемо радити са моделима?



2. (а) 

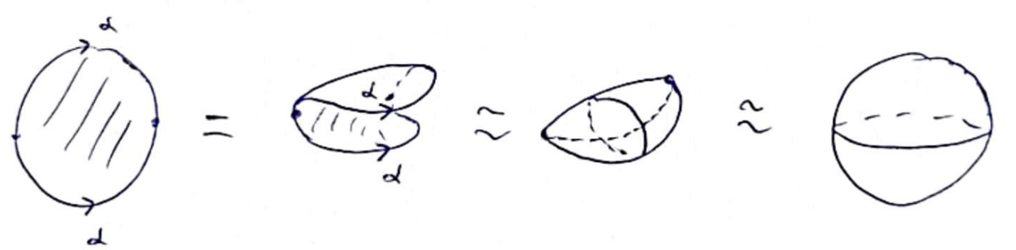
$\approx$? (б) 

$\approx$?

решење

(а) 

$\approx D^2$

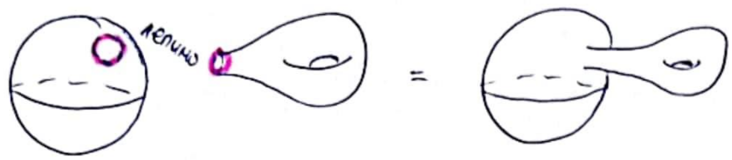
(б) 

$\approx S^2$ ■

Конструкција повезаних затворених површи

$M_0 \overset{def}{=} S^2 =$ 

Скинемо са S^2 мали диск и лепимо торус:

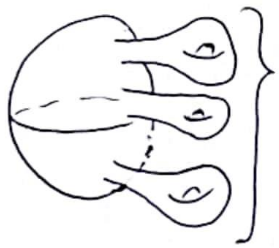


Генерално,

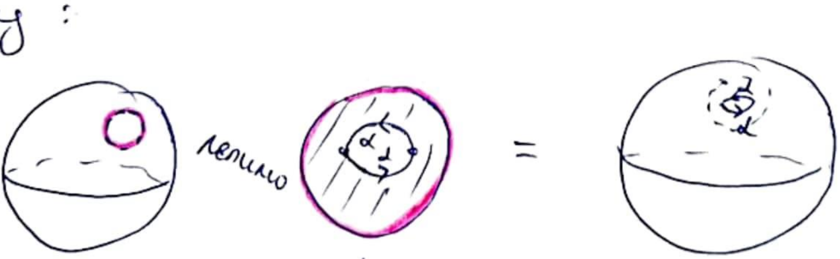
$M_1 \overset{def}{=}$  $\simeq$  $= T^2$

$M_2 \overset{def}{=}$  $\simeq$ 

$\vdots$

$M_g \overset{def}{=}$  $g \simeq$ 

Сада са S^2 скинемо диск и лепимо Мебијусову траку:



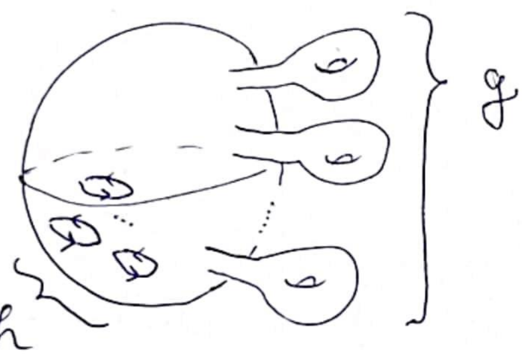
$N_1 \overset{def}{=}$  $\simeq$  $\simeq \mathbb{R}P^2$

$N_2 \overset{def}{=}$  $\simeq K$ (Клајнова боца)

$\vdots$

$N_h \overset{def}{=}$ 

И још ако на S^2 лепимо и T^2 и M:

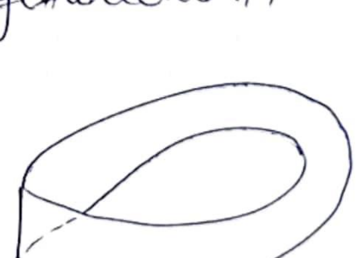
$H_{g,h} \overset{def}{=}$ 

Показаћемо да је $H_{g,h} \simeq N_{2g+h}$.

~~дефиниција~~ деф Површ је оријентабилна ако има 2 стране.

S^2 

оријентабилна

 M

неоријентабилна

Теорема [о класификацији површи] Нека је X повезана затворена површ. Тада

(1) ако је X оријентабилна, онда

$$(\exists g \in \mathbb{N}_0)\ X \approx M_g ;$$

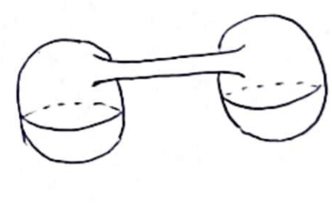
(2) ако је X неоријентабилна, онда

$$(\exists h \in \mathbb{N})\ X \approx N_h .$$

Дефинишемо операцију $\#$ (повезана сума) за површи:

$\boxed{M \text{ и } N \text{ су неке две површи}}$

$M \# N \overset{\text{def}}{=}$ скинемо по диск са M и N и залепимо их по границама тих дискова

нпр. $S^2 \# S^2 =$  $\#$  $=$  $\approx S^2$

Приметимо:

$$M_1 = \underset{\boxed{\text{сфера}}}{S^2} \# \underset{\boxed{\text{торус}}}{T^2} \qquad N_1 = \underset{\boxed{\text{сфера}}}{S^2} \# \underset{\boxed{\text{Мебијусова трака}}}{M}$$

$$M_2 = S^2 \# T^2 \# T^2 \qquad N_2 = S^2 \# M \# M$$

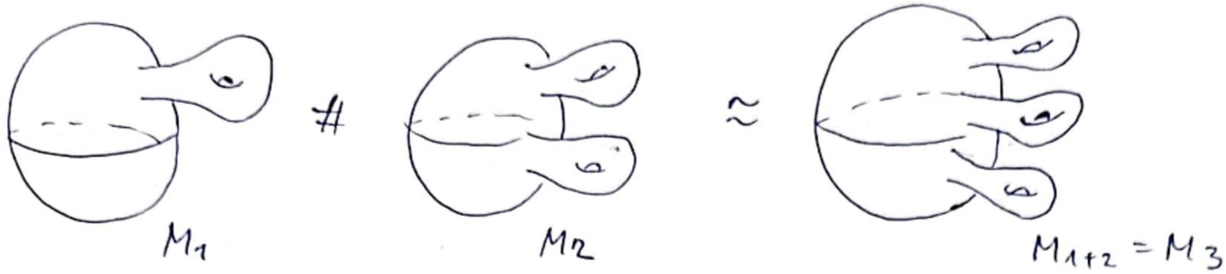
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$M_g = S^2 \# \underbrace{T^2 \# \cdots \# T^2}_{g} \qquad N_h = S^2 \# \underbrace{M \# \cdots \# M}_{h}$$

Генерално,

$$\boxed{M_{g_1} \# M_{g_2} \approx M_{g_1+g_2}}$$

Нпр.



$$\boxed{N_{h_1} \# N_{h_2} \approx N_{h_1+h_2}}$$

Нпр.

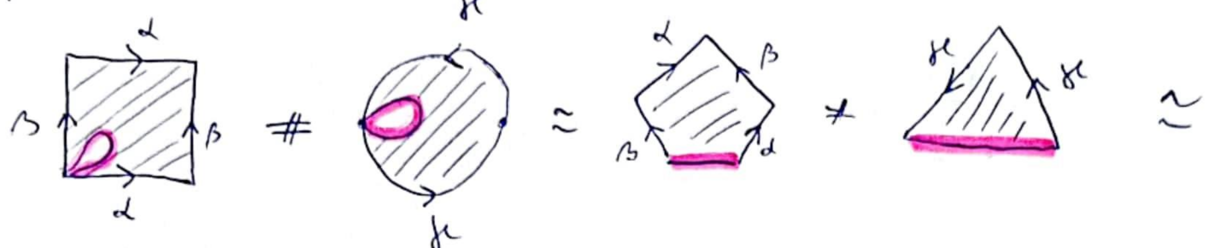
$$\boxed{H_{g_1,h_1} \# H_{g_2,h_2} \approx H_{g_1+g_2,\, h_1+h_2}}$$

Нпр.

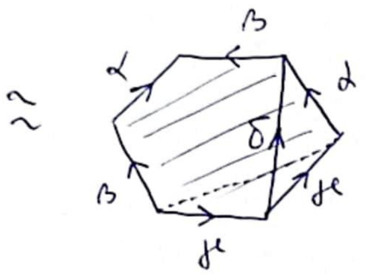
Операција # је комутативна и асоцијативна (до на хомеоморфизам) и неутрал јој је S^2.

3. Доказати $M_1 \# N_1 \approx N_3$.

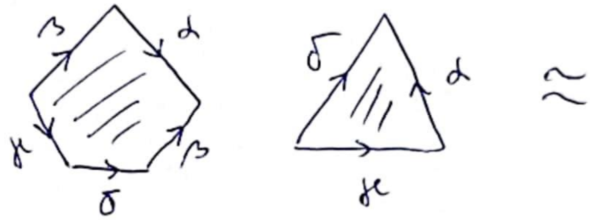
решење

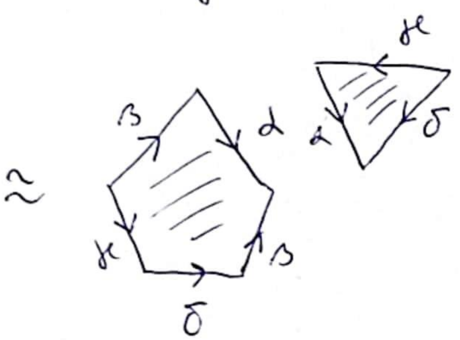


$M_1 = T^2$ $\quad$ $N_1 = \mathbb{R}P^2$

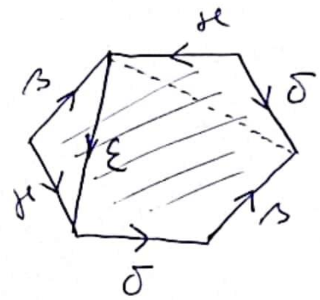


сечемо δ $\approx$

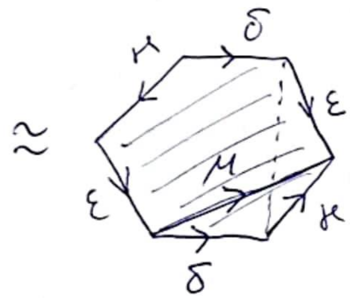




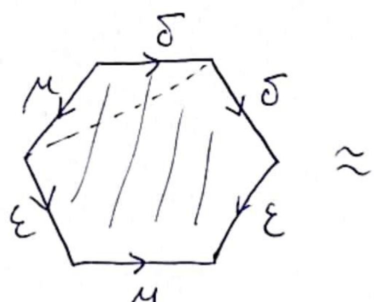
лепимо α $\approx$

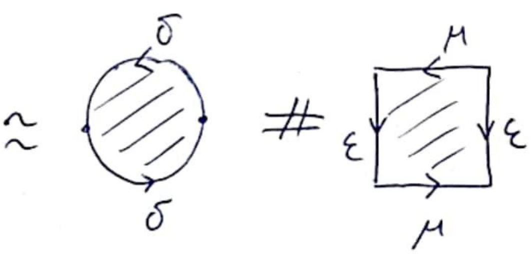


сечемо ε $\approx$ лепимо β



сечемо μ $\approx$ лепимо γ





$\approx \mathbb{R}P^2 \# K = N_1 \# N_2 \approx N_3$ ■

$\boxed{4.}$ Доказати $M_g \# N_h \approx N_{2g+h}$, $g \in \mathbb{N}_0$, $h \in \mathbb{N}$.

решење

$\boxed{\text{Индукција по } g \in \mathbb{N}_0}$

- база $g=0$: $M_0 \# N_h = S^2 \# N_h = N_h = N_{2\cdot 0+h}$ ✓

  $g=1$: $M_1 \# N_h \approx N_{2+h}$?

  $\boxed{\text{индукција по } h \in \mathbb{N}}$

  - база $h=1$: $M_1 \# N_1 \approx N_3$ (зад. 3.)
  - хипотеза $M_1 \# N_h \approx N_{2+h}$
  - корак $M_1 \# N_{h+1} \approx \underbrace{M_1 \# N_1} \# N_h \approx N_3 \# N_h \approx$

    $\approx N_{3+h} \approx N_{2+(h+1)}$

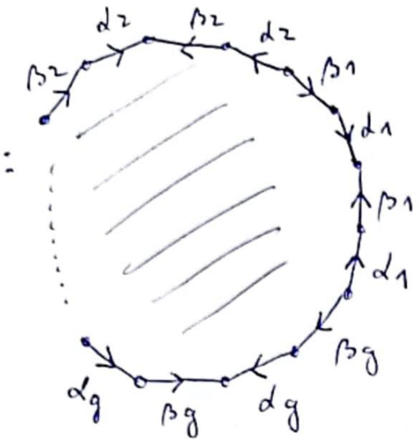
- хипотеза $M_g \# N_h \approx N_{2g+h}$, $\forall h \in \mathbb{N}$
- корак $M_{g+1} \# N_h \approx M_g \# \underbrace{M_1 \# N_h} \overset{\text{база}}{\approx} M_g \# N_{2+h} \overset{\text{хипотеза}}{\approx}$

  $\approx N_{2g+2+h} \approx N_{2(g+1)+h}$ ■

Специјално, $H_{g,h} \approx M_g \# N_h \approx N_{2g+h}$

Количнички модели у равни за M_g и N_h

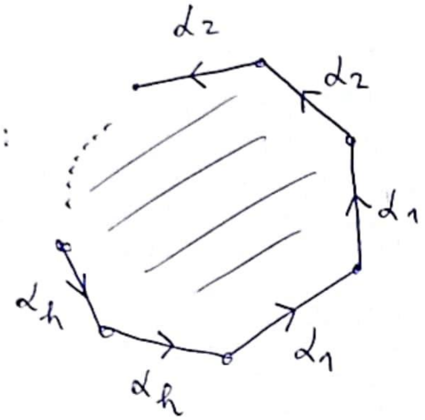
M_g :



$4g$ ивица

$2g$ идентификација

N_h :

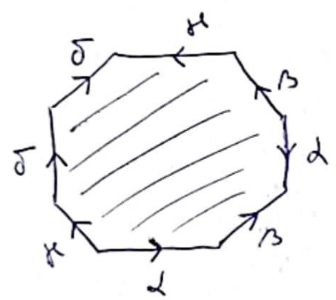


$2h$ ивица

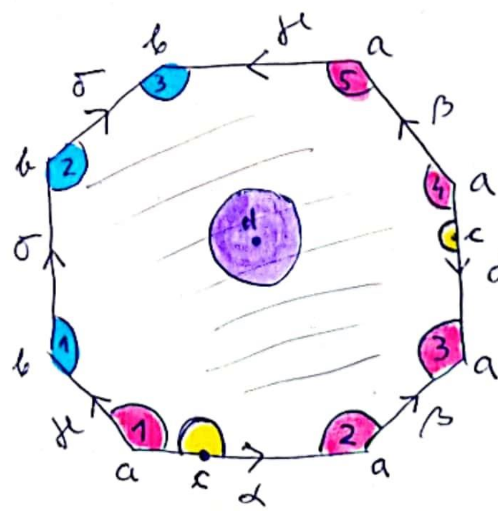
h идентификација

$\boxed{5.}$ Доказати да је X површ и одредити које

X :



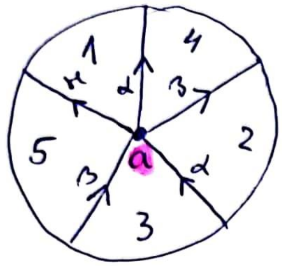
решење Да би се уверили да је X површ треба да проверимо да свака тачка има околину хомеоморфну int D^2 (диску)



Проверавамо за неколико типичних тачака:

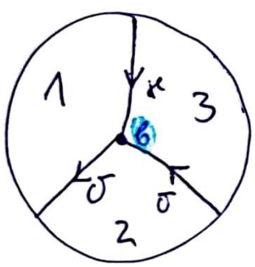
a

кад залепимо:

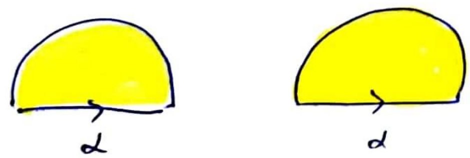
 $\simeq$  $\simeq \operatorname{int} D^2$

b

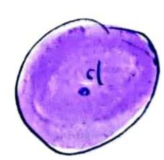
кад залепимо:

 $\simeq \operatorname{int} D^2$

c



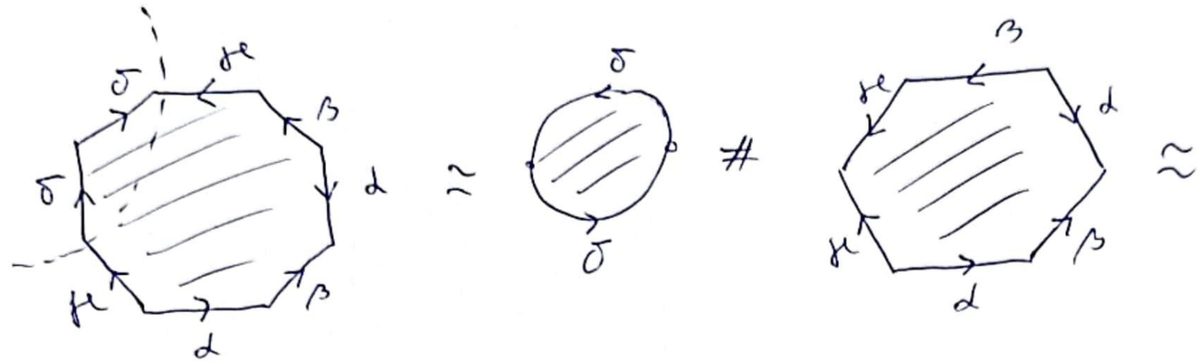
d

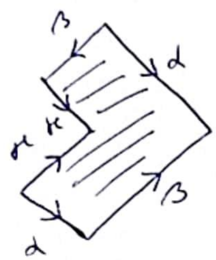
 $\simeq \operatorname{int} D^2$

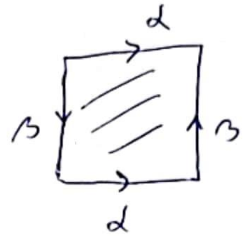
кад залепимо

 $\simeq \operatorname{int} D^2$

Сад помоћу сецкања и лепљења да видимо која је ово површ.



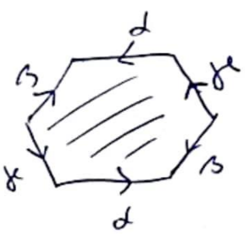
$\simeq \mathbb{R}P^2 \#$ 

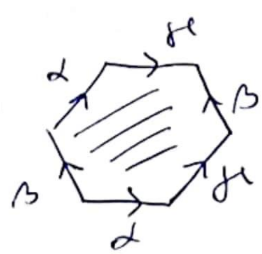
$\overset{\text{лепимо } \gamma}{\simeq}$ $\mathbb{R}P^2 \#$  $\simeq$

$\simeq \mathbb{R}P^2 \# K \simeq N_1 \# N_2 = N_3$ ■

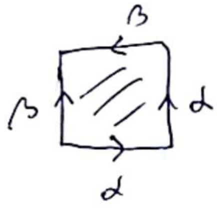
Напомена У претходном задатку смо детаљно проверавали да ли је X површ, генерално нема потребе за толиким расписивањем, довољно је укратко прокоментарисати.

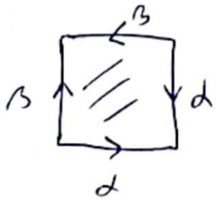
6. Одредити тип површи

(а) 

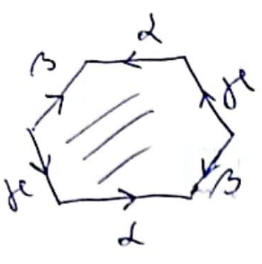
(б) 

(в) 

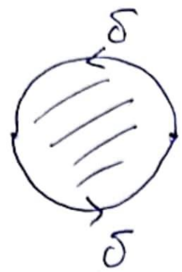
(г) 

(д) 

решење (а) јесте површ и

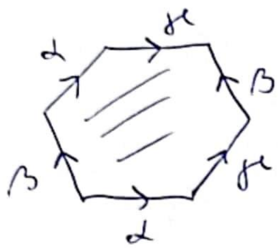


$\delta := \alpha\beta^{-1}\gamma$ $\approx$

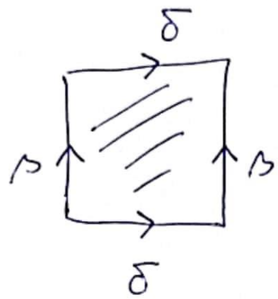


$= \mathbb{R}P^2$

(б) јесте површ и

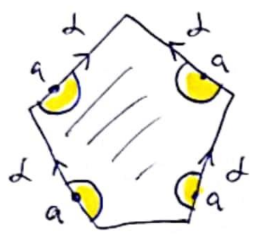


$\delta := \alpha\gamma$ $\approx$

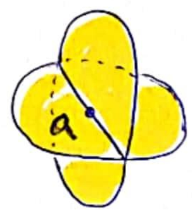


$\approx T^2$

(в) није површ



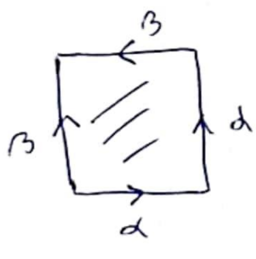
a нема околину:



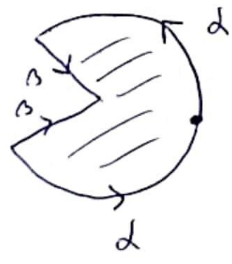
$\not\approx$

$= \operatorname{int} D^2$

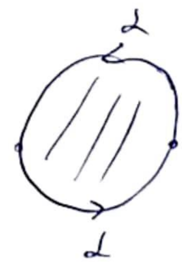
(г)



$\approx$

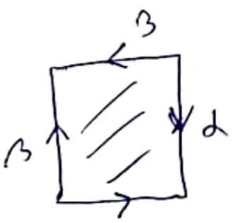


лепимо β $\approx$

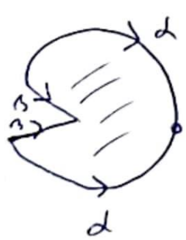


$= \mathbb{R}P^2$

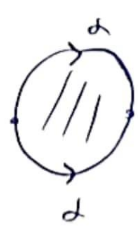
(д)



$\approx$



лепимо β $\approx$



лепимо α $\approx$

$\approx$

$= S^2$ ■

Ојлерова карактеристика површи:

$$\chi(P) = t - i + p$$

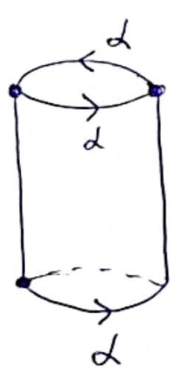
површ; бр. темена; бр. ивица; бр. пљосни

$$\chi(M_g) = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g$$

$$\chi(N_h) = 1 - h + 1 = 2 - h$$

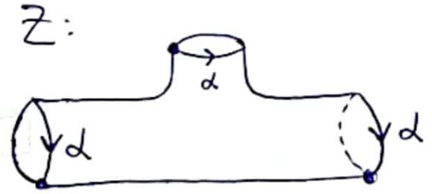
7. За сваки од следећих тополошких простора испитати да ли је хомеоморфан некој затвореној повезаној површи (и којој), наћи неки његов тополошки модел у равни и одредити његову Ојлерову карактеристику.

(а) X:

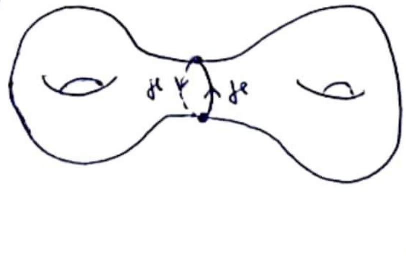


(б) Y:

(в) Z:

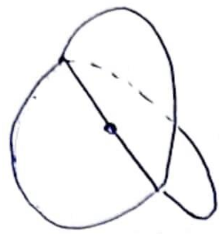


(г) T:



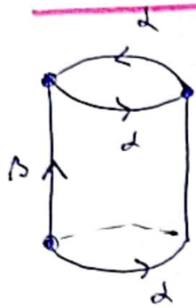
решење

(а) није површ јер тачке са α имају околину

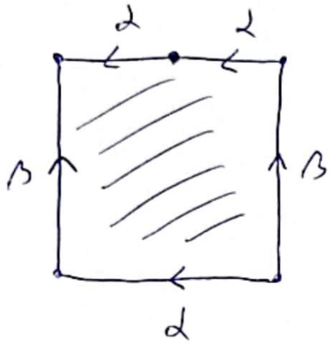


$\not\approx \operatorname{int} D^2$

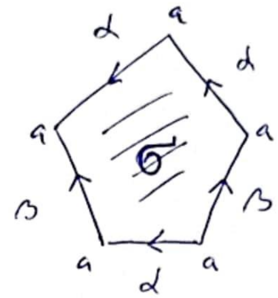
модел у равни



$\approx$



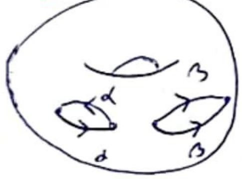
$\approx$



темена: a
ивице: α, β
стране: σ

$\Rightarrow \chi(X) = 1 - 2 + 1 = 0$

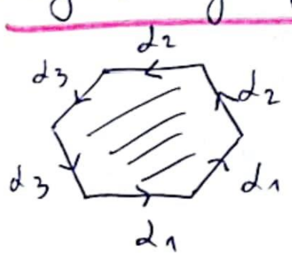
(б) јесте површ



лема 3 $\approx$

$\approx H_{1,1} = N_{2\cdot 1+1} = N_3$

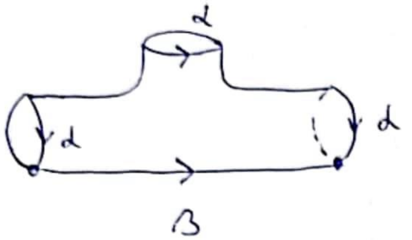
модел у равни



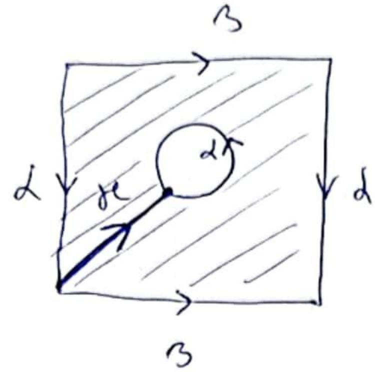
$\chi(Y) = \chi(N_3) = 2 - 3 = -1$

(в) није површ (слично као (а))

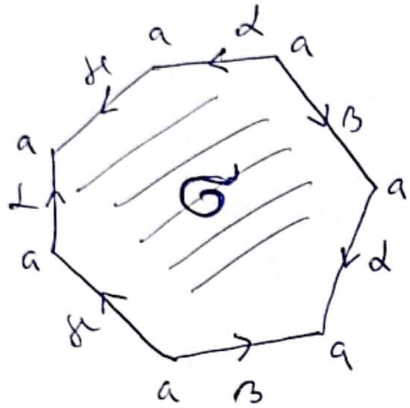
модел у равни



сечемо β
$\approx$



сечемо γ
$\approx$

$\approx$ 

темена : a

ивице : α, β, γ

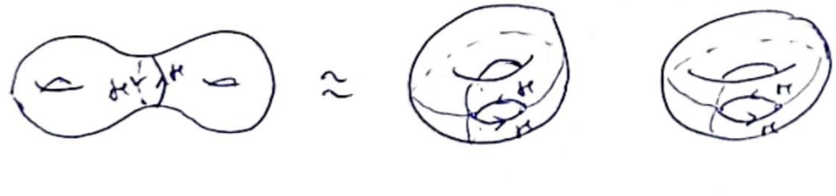
стране : σ

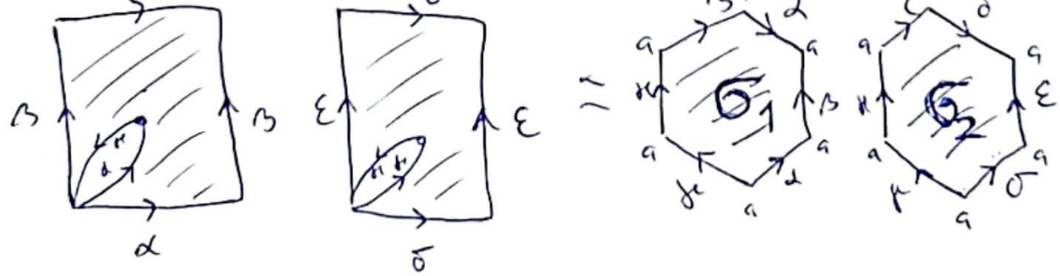
$\Rightarrow \chi(Z) = 1-3+1 = -1$

(г) није површ јер тачке на γ имају

околину  $\neq \mathrm{int}\, D^2$

модел у равни

 $\approx$

$\approx$ 

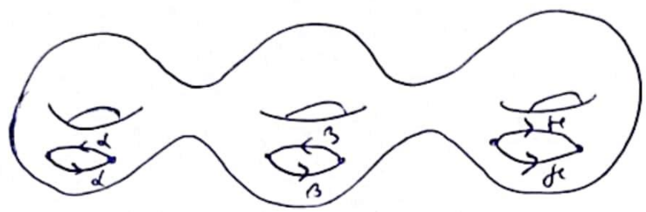
темена: a

ивице: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ $\Rightarrow$ $\chi(T) = 1-5+2 = -2$ ■

стране: σ_1, σ_2

$\boxed{8.}$ Одредити тип површи

(а) X:



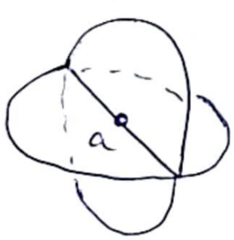
(б) Y:

решење

(а) је залепимо (јер је на исту страну)

$$X \simeq H_{3,2} \simeq N_{2\cdot 3+2} = N_8$$

(б) није површ: $a \in \alpha$

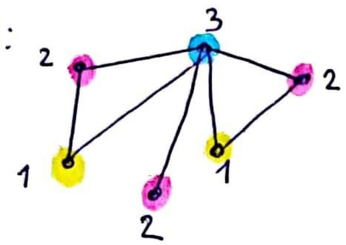


$\not\cong \operatorname{int} D^2$. ■

Бојење графова

дефиниција Бојење графа $G=(V,E)$ је пресликавање $c: V \to \mathbb{N}$. Број $c(v)$ је боја темена $v \in V$. Кажемо да је бојење правилно ако су свака два суседна темена обојена различитим бојама.

пример G:



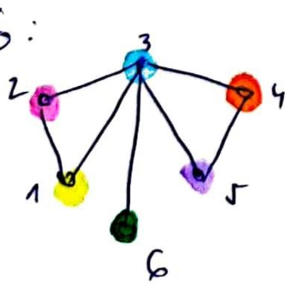
ово је једно правилно бојење графа

дефиниција Хроматски број графа је најмањи број боја потребних за правилно бојење. Означава се са $col(G)$.

Дакле, $col(G) \overset{def}{=} \min\{d \in \mathbb{N} \mid \text{постоји правилно бојење графа } G \text{ са } d \text{ боје}\}$

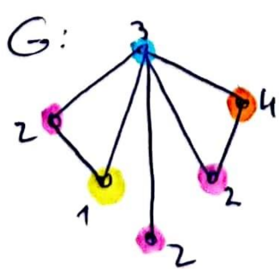
пример Један граф можемо правилно обојити на више начина:

G:



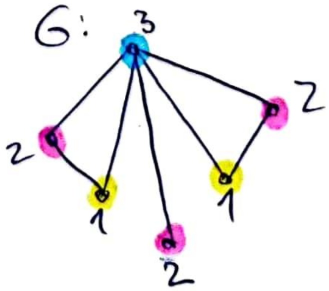
6 боја

G:



4 боје

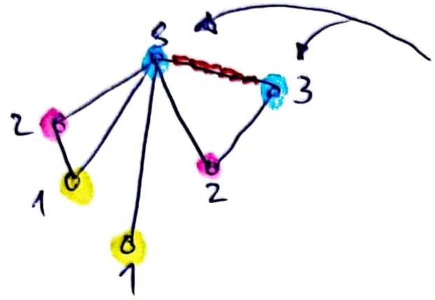
G:



3 боје

Овај граф се не може обојити правилно са мање од 3 боје, па је $col(G) = 3$

Једно неправилно бојење:



два темена исте боје су обојена

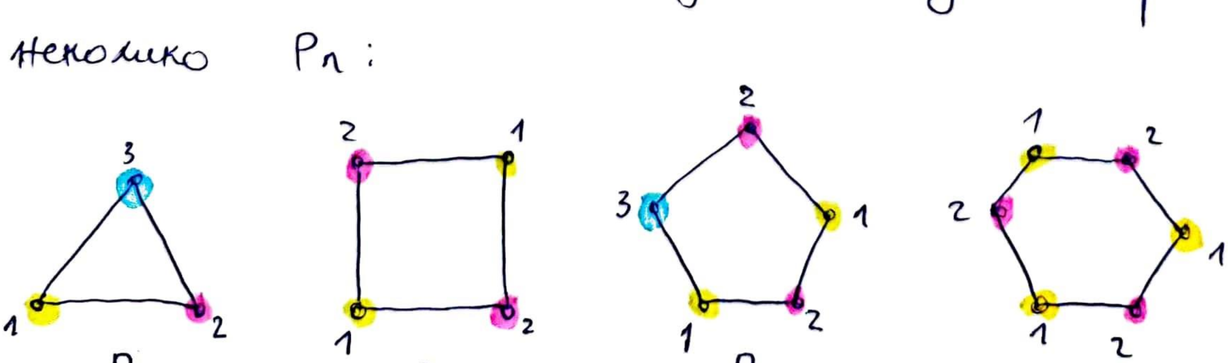
Знамо да увек имамо бар једно правилно бојење (свако теме обојимо различитом бојом), па је $col(G) \leq |V|$.

Ако је $G' \subseteq G$ подграф, онда $col(G') \leq col(G)$.

$\boxed{1.}$ Одредити хроматски број графа чија су темена и ивице темена и ивице n-тоугла.

решење

Означимо са P_n n-тоугао. Обојимо првих неколико P_n:



P_3 P_4 P_5 P_6

Закључак :

$$col(P_{2k}) = 2$$

$$col(P_{2k+1}) = 3 \quad \blacksquare$$

$\boxed{2.}$ Одредити $col(K_n)$, K_n - комплетан граф.

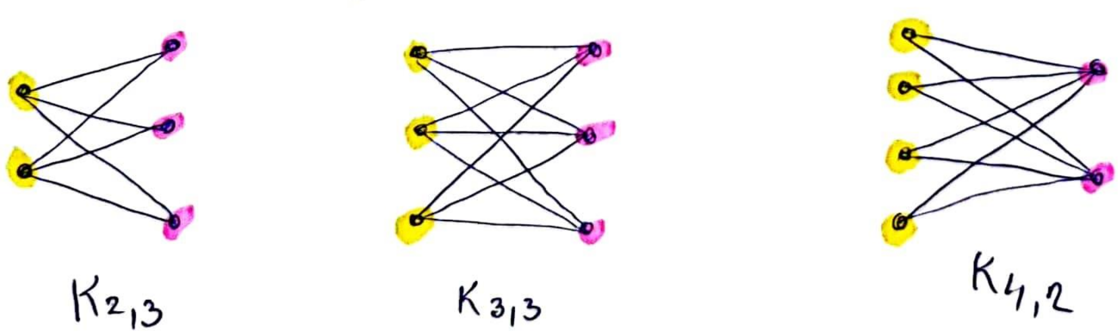
решење

У K_n су свака два темена суседна, па свако теме мора имати другу боју, тј.

$$col(K_n) = n. \quad \blacksquare$$

$\boxed{3.}$ Одредити хроматски број бипартитног графа $K_{m,n}$ (бипартитни граф се састоји од $m+n$ темена подељених у два дела по m и n темена т.д. свако од m темена је суседно са сваким од n и ни са чим више).

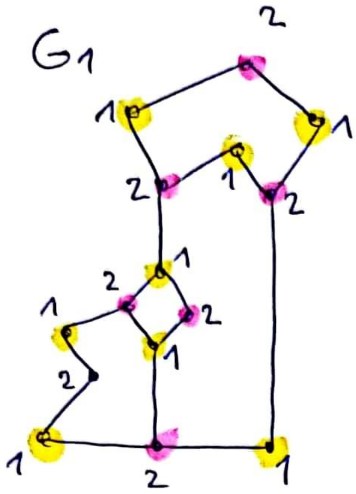
решење Да видимо пар примера

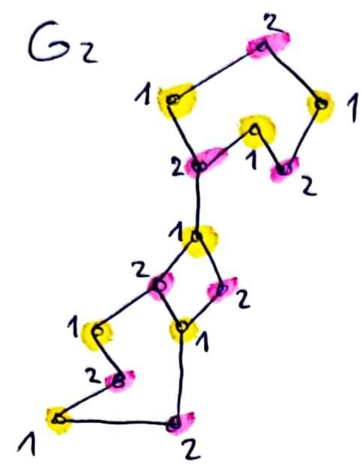


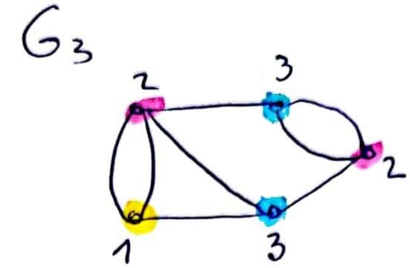
$K_{2,3}$ $K_{3,3}$ $K_{4,2}$

Закључак: $col(K_{m,n}) = 2. \quad \blacksquare$

4. Одредити хроматске бројеве следећих графова.







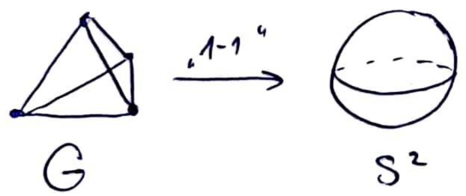
$col(G_1) = 2$ $\qquad$ $col(G_2) = 2$ $\qquad$ $col(G_3) = 3$

деф дефиниција: Нека је S површ и G граф. Утапање $\varphi : G \to S$ називамо мапом на површи S.

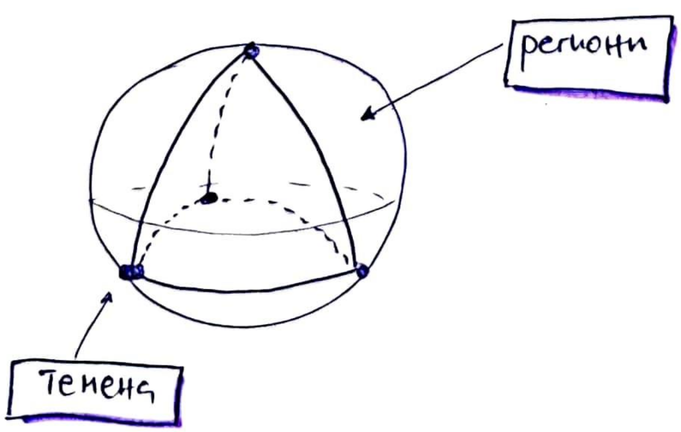
пр пример: G – темена и ивице тетраедра

S – сфера S^2

φ :

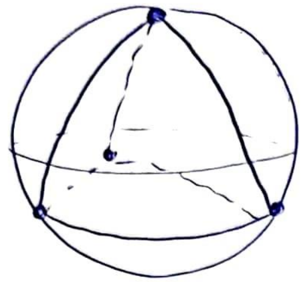


резултат:

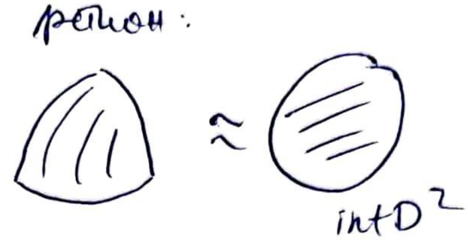


Мапа је регуларна ако је сваки регион хомеоморфан отвореном диску $\mathrm{int}\, D^2$.

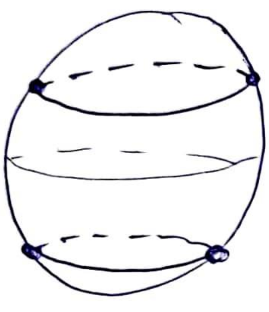
ПР пример (1)



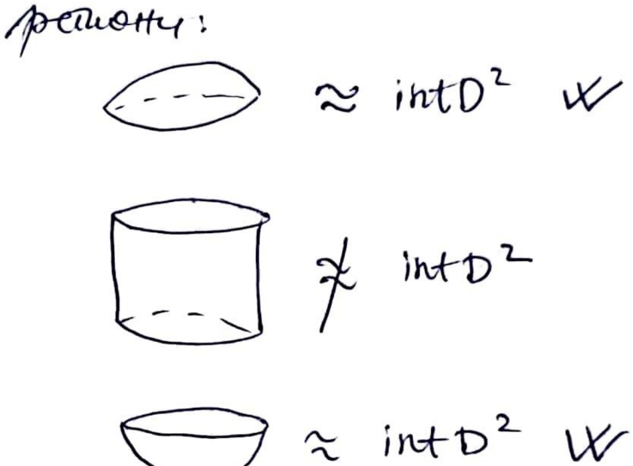
јесте регуларна мапа



(2)



није регуларна мапа

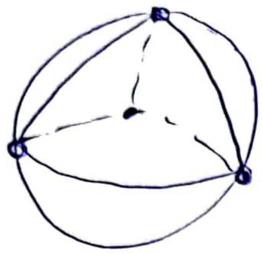


СТАВ став На свакој затвореној повезаној површи (тј. M_g и N_a) постоји регуларна мапа.

ДЕФ дефиниција: Нека је $\varphi : G \to S$ мапа на површи S. Ако је V скуп темена, E скуп ивица, а R скуп региона, онда је Ојлерова карактеристика мапе φ дата са:

$$\chi(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} |V| - |E| + |R|.$$

пример



$|V| = 4$

$|E| = 6$

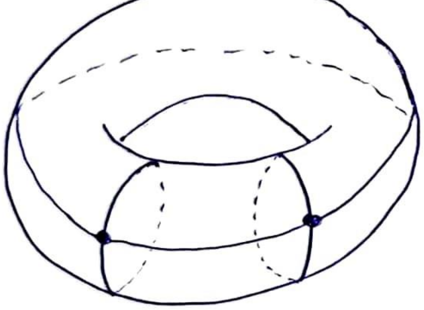
$|R| = 4$

$$\chi(\varphi) = 4 - 6 + 4 = 2$$

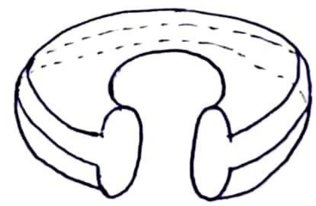
дефиниција Нека је S затворена повезана површ и φ регуларна мапа на S. Ојлерова карактеристика од S је

$$\chi(S) \overset{def}{=} \chi(\varphi).$$

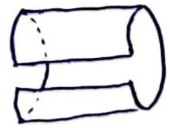
пример Торус T^2



региони:



$\approx \operatorname{int} D^2$



$\approx \operatorname{int} D^2$

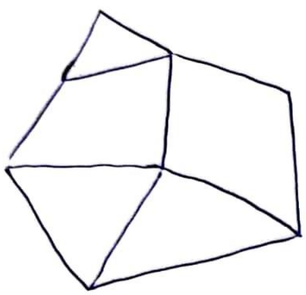
$$\left.\begin{array}{l} |V| = 2 \\ |E| = 4 \\ |R| = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \chi(T^2) = \chi(\varphi) = 2 - 4 + 2 = 0.$$

Знамо од раније: $\chi(T^2) = \chi(M_1) = 2 - 2 \cdot 1 = 0.$

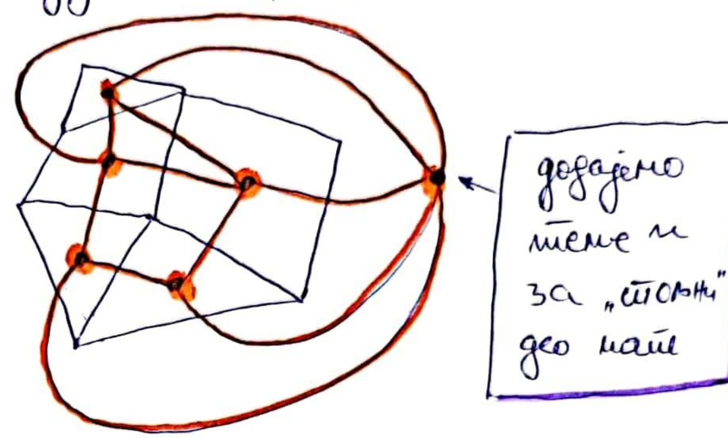
дефиниција Дуални граф мапе се добија тако што сваком региону придружимо теме графа, а темена спојимо ивицом уколико припадају суседним регионима.

пример

мапа у равни:



дуални граф:



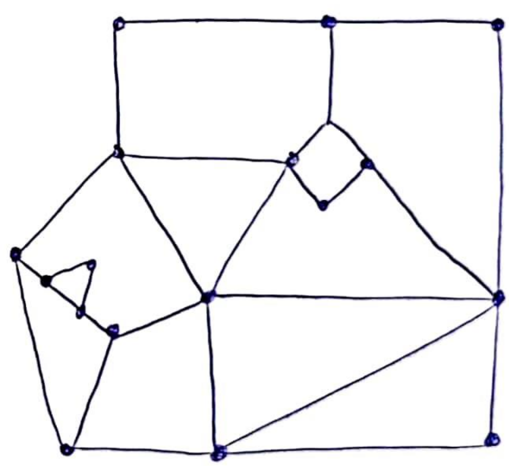
5. Нека је дата мапа на слици.

(а) Обојити мапу са 4 боје (т.д. су свака два суседна региона различите боје);

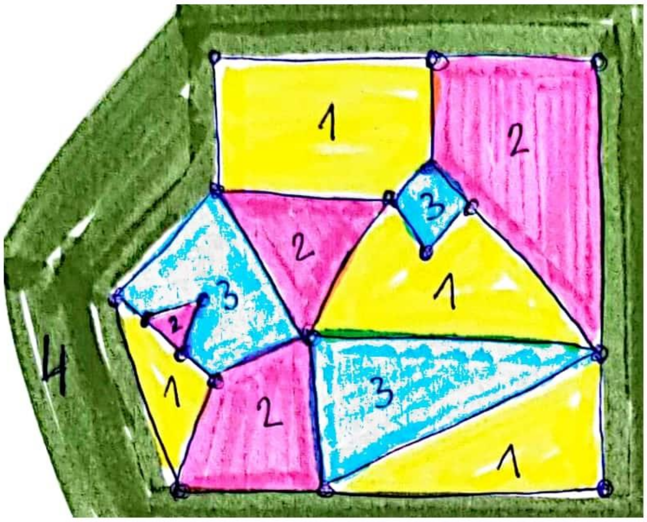
(б) Наћи њен дуални граф;

(в) Доказати да се не може обојити са мање од 4 боје;

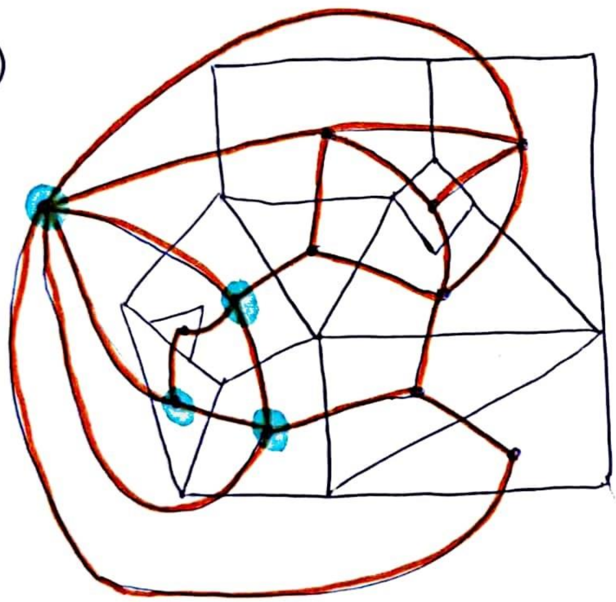
(г) Избацити 1 ивицу т.д. се може обојити са 3 боје.



(а) Бојимо и спољашњост!

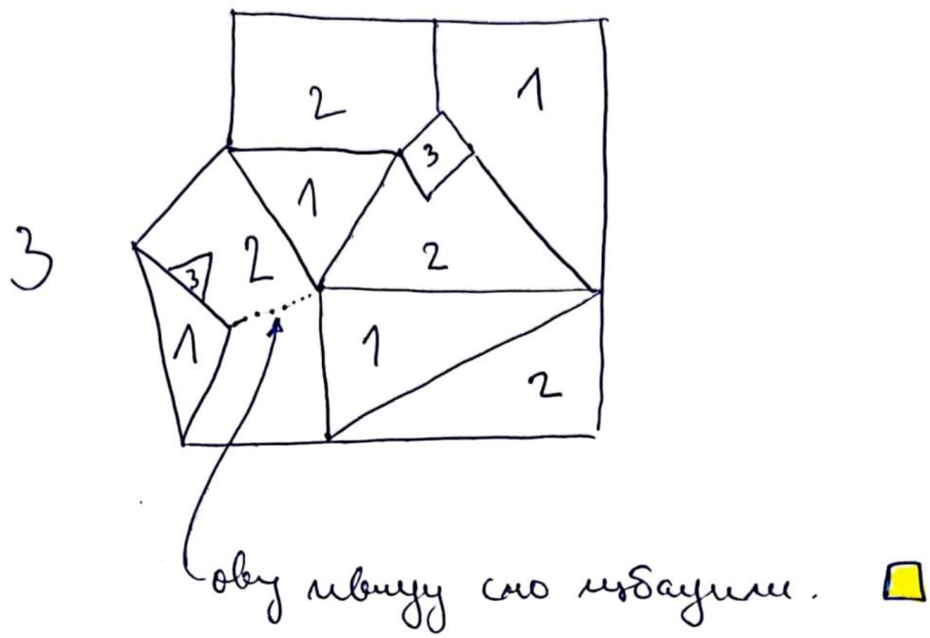


(б)



(в) Најмањи број боја за бојење мапе је у ствари хроматски број дуалног графа. Дуални граф има комплетан K_4 подграф (темена плаве боје на слици у (б)) па како је $col(K_4)=4$, то је $col(G) \geq 4$, па је потребно бар 4 боје да се обоји мапа.

(2) Потребно је да склонимо неку ивицу која прави комплетан граф K_4. Нпр:



$\blacksquare$

деф дефиниција Хроматски број површи X је најмање $d \in \mathbb{N}$ т.д се сваки граф G утопљен у X може обојити са d боја.

$$\operatorname{col}(X) = \min\{d \in \mathbb{N} \mid (\forall G \text{ утопљен у } X)\ \operatorname{col} G \leq d\}$$

Специјално, ако се G може утопити у X, онда је

$$\operatorname{col}(G) \leq \operatorname{col}(X).$$

пр пример $\operatorname{col}(\mathbb{R}^2) = 4$

6. Нека је S произвољна површ. Доказати да постоји граф који се не може утопити у S.

решење

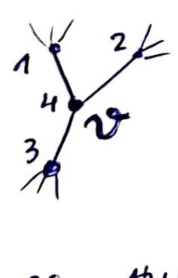
Нека је $col(S) = n$. Тада ако се граф G може утопити у S, мора да важи $col(G) \le col(S) = n$. Знамо да је $col(K_{n+1}) = n+1 > n$, па се K_{n+1} не може утопити у S. □

7. На некој површи је нацртана мапа тд. је од свака два суседна региона бар један троугао. Доказати да се ова мапа може обојити са 4 боје.

решење Разматрамо дуални граф (сваки регион нам даје по теме, а ако су региони суседни, одговарајућа темена су спојена). Нека је v теме у дуалном графу. Имамо два случаја.

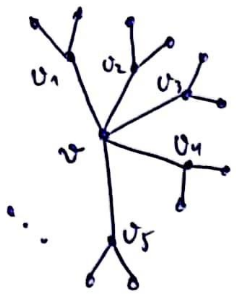
1° v потиче од региона који је троугао, тј.

v има тачно 3 суседа:



Тада v можемо обојити какве год да су боје преостала три темена

2° v није из троугла $\Rightarrow$ сваки сусед му је из троугла



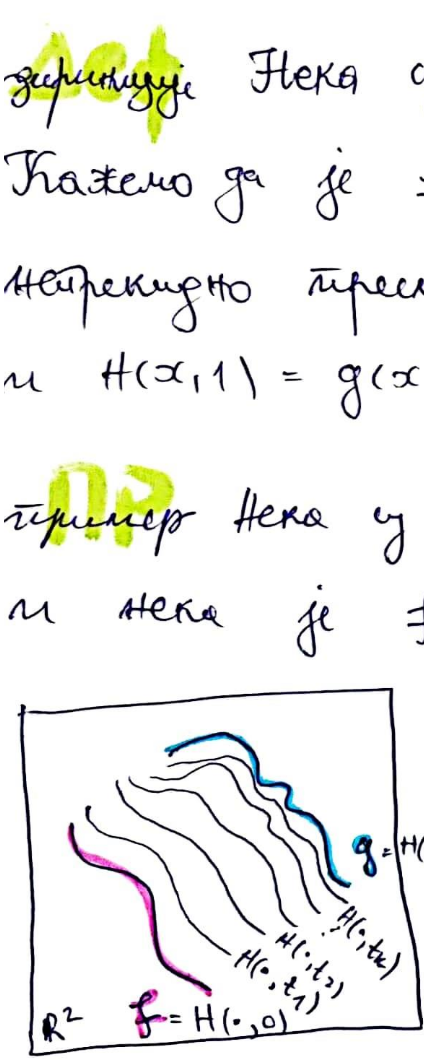
У овом случају теме v можемо произвољно обојити и по потреби променити боје суседних темена $v_1, v_2, \ldots, v_k$ (јер та темена потичу из троуглова, па имају тачно три суседа и као у 1° нема проблема за њихово бојење).

Дакле, цео дуални граф можемо обојити са 4 боје, па исто важи и за дату мапу. ∎

Хомотопија

деф дефиниција Нека су $f, g: X \to Y$ непрекидна пресликавања. Кажемо да је f хомотопно са g ако постоји непрекидно пресликавање $H: X \times I \to Y$ т.д. $H(x,0) = f(x)$ и $H(x,1) = g(x)$. Пишемо $f \simeq g$. (Ознака: $I = [0,1]$)

пр пример Нека су $f, g: [0,1] \to \mathbb{R}^2$ путеви у равни и нека је $f \simeq g$. То значи да се пут f „непрекидно трансформише" до g.



За свако $t \in [0,1]$, $h(x) := H(x,t)$ је неки пут између f и g

Пишемо и $H: f \simeq g$.

непр. фје из X у Y

$\simeq$ је релација еквиваленције на $C(X,Y)$:

(1) рефлексивност: $f \simeq f$

(2) симетричност: $f \simeq g \Rightarrow g \simeq f$

(3) транзитивност: $f \simeq g$ и $g \simeq h \Rightarrow f \simeq h$

Додатне особине:

(1) $f,g: X \to Y$, $h: Y \to Z$, $k: T \to X$ и $f \simeq g$, онда

$$h \circ f \simeq h \circ g \quad \text{и} \quad f \circ k \simeq g \circ k$$

(2) $f_1, f_2 : X \to Y$, $g_1, g_2 : Y \to Z$, $f_1 \simeq f_2$, $g_1 \simeq g_2$

$$\Rightarrow \quad g_1 \circ f_1 \simeq g_2 \circ f_2$$

$\boxed{1.}$ Ако су $f,g: X \to \mathbb{R}^n$, онда је $f \simeq g$.

решење Нека је $H: X \times I \to \mathbb{R}^n$ дато са

$$H(x,t) := (1-t)f(x) + tg(x).$$

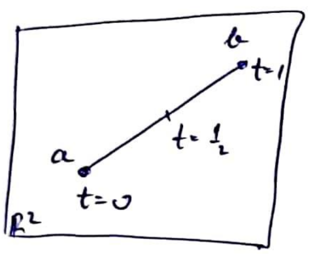
ова хомотопија пролази кад год је кодомен конвексан

$$\left.\begin{array}{l} H \text{ је непр.} \\ H(x,0) = f(x) \\ H(x,1) = g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow H: f \simeq g \quad \square$$

2. Ако су $f, g : X \to S^2$ непр. и за свако $x \in X$ је $f(x) \neq -g(x)$, онда је $f \simeq g$.

решење

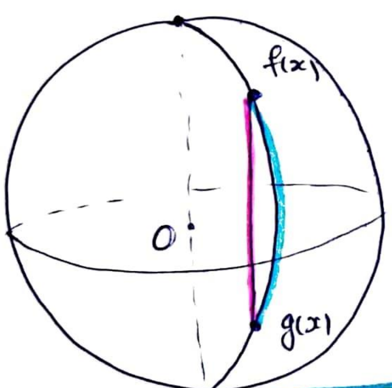
Генерално, ако су $a, b \in \mathbb{R}^n$ онда израз $(1-t) \cdot a + t \cdot b$, $t \in [0,1]$ представља све тачке са дужи $[a, b]$



Специјално код нас, $f(x)$ и $g(x)$ су неке тачке на сфери S^2, а $(1-t)f(x) + tg(x)$ су тачке на дужи која их спаја. Хоћемо хомотопију $H : X \times I \to S^2$, али не можемо узети само

$$\boxed{(1-t)f(x) + tg(x)}$$

јер то не припада S^2 већ



узимамо:

$$\boxed{H(x,t) := \frac{(1-t)f(x) + tg(x)}{\|(1-t)f(x) + tg(x)\|}} \in S^2$$

H је добро деф. и непр. јер $\|\cdot\|$ у имениоцу никад није 0 (због услова $f(x) \neq -g(x)$ дуж никад не пролази кроз 0).

$$\left.\begin{array}{l} H(x,0) = \dfrac{f(x)}{\underbrace{\|f(x)\|}_{=1}} = f(x) \\[2ex] H(x,1) = \dfrac{g(x)}{\underbrace{\|g(x)\|}_{=1}} = g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow H : f \simeq g. \ \blacksquare$$

Претходни зад. важи за свако S^n, не само за S^2.

Користићемо ознаке:

$\mathbb{1}_X : X \to X$ идентичко пресликавање на X

$\mathbb{1}_X(x) = x$, за све $x \in X$

$a_X : X \to X$ антиподално пресликавање

$a_X(x) = -x$, за све $x \in X$

(у просторима X где постоји $+,-$)

$\boxed{3.}$ Нека је $f : S^n \to S^n$ непр.

(а) Ако f нема фиксних тачака, онда $f \simeq a_{S^n}$;

б) Ако је $(\forall x \in S^n)\ f(x) \neq -x$, онда $f \simeq \mathbb{1}_{S^n}$.

решење

(а) $(\forall x \in S^n)\ f(x) \neq x = -(-x) = -a_{S^n}(x) \xRightarrow{\text{зад. 2}} f \simeq a_{S^n}$

(б) $(\forall x \in S^n)\ f(x) \neq -x = -\mathbb{1}_{S^n}(x) \xRightarrow{\text{зад 2}} f \simeq \mathbb{1}_{S^n}$. $\blacksquare$

деф дефиниција Нека су X и Y тополошки простори. Кажемо да су X и Y хомотопски еквивалентни ако постоје пресликавања $\varphi : X \to Y$ и $\psi : Y \to X$ тд. $\varphi \circ \psi \simeq \mathbb{1}_Y$ и $\psi \circ \varphi \simeq \mathbb{1}_X$

деф дефиниција Простор X је контрактибилан ако је $X \simeq *$.

> $*$ је простор који се састоји од једне тачке

Мало детаљније $X \simeq *$ значи:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "\varphi"] & * \arrow[l, bend left, "\psi"] \end{tikzcd}$$

$\varphi \circ \psi \simeq \mathbb{1}_*$ и $\psi \circ \varphi \simeq \mathbb{1}_X$

$\varphi \circ \psi$ је баш једнако $\mathbb{1}_*$, па заправо имамо

$X \simeq * \iff \psi \circ \varphi \simeq \mathbb{1}_X$

$\psi \circ \varphi$ је константно пресликавање које свако $x \in X$ слика у $\psi(*) \in X$. Дакле, $\psi \circ \varphi = c_{\psi(*)}$.

Коначно,

$$X \simeq * \iff c_{\psi(*)} \simeq \mathbb{1}_X$$

Ако је простор X путно повезан, онда

$$(\forall x_1, x_2 \in X)\ c_{x_1} \simeq c_{x_2},$$

па ћемо писати и

$$X \simeq * \iff 1_X \simeq const$$

неко константно пресликавање

$\boxed{4.}$ Доказати да је $\mathbb{R}^n$ контрактибилан.

решење Не користимо деф. већ показујемо $1_{\mathbb{R}^n} \simeq const$.

Нека је $H : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$ дато са $H(x,t) = x \cdot t$

$$\left.\begin{aligned} H(x,0) &= 0 = c_0(x) \\ H(x,1) &= x = 1_{\mathbb{R}^n}(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow H : c_0 \simeq 1_{\mathbb{R}^n}$$

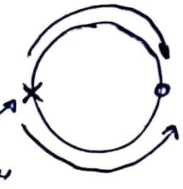
$$\Downarrow$$

$$\mathbb{R}^n \simeq * \quad \blacksquare$$

пример Интуитивно $X \simeq *$ значи да се може непрекидно скупити у тачку.

(1) $\mathbb{R}^2 \simeq *$

(2) $S^1 \not\simeq *$



проблем

(3) $S^n \not\simeq *$

(4) $[a,b] \simeq *$

Теорема Ако је $A \subseteq X$, $A \simeq *$ и пар (X,A) има својство проширења хомотопије, онда је $X \simeq X/A$.

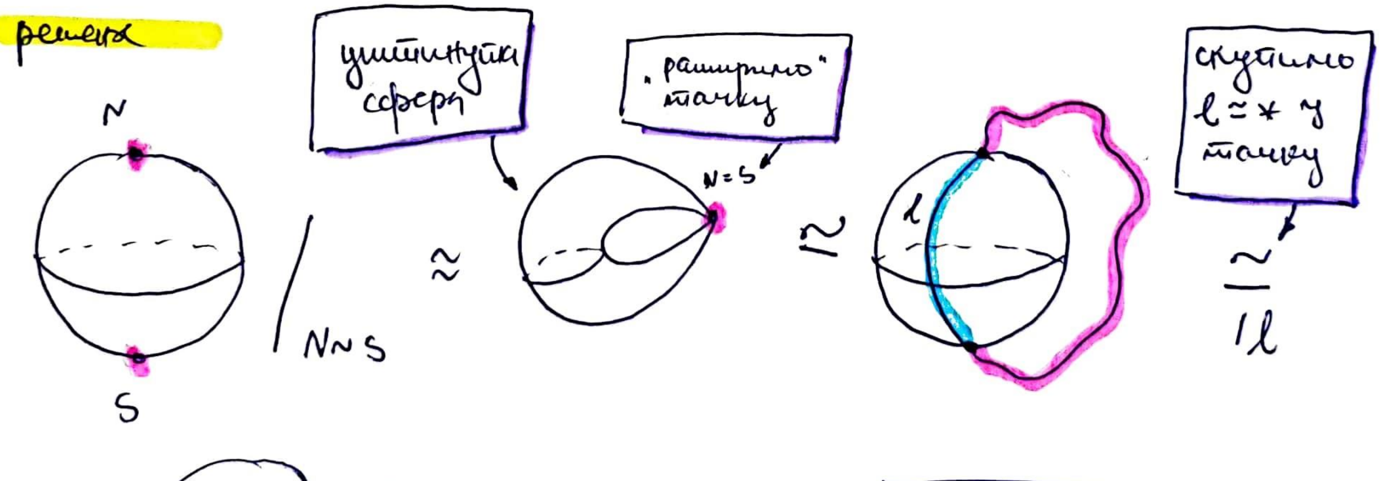
(Нисмо дефинисали шта је тачно СПХ, али сви парови (X,A) са којима се сусрећемо су довољно „лепи", тј. имају ово својство па можемо користити,

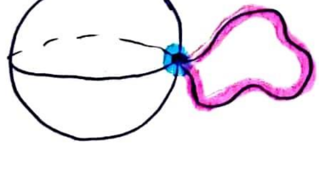
$$A \simeq * \Rightarrow X \simeq X/A.)$$

Претходна теорема нам каже да контрактибилне скупове (нпр. дужи, дискове) можемо скупити у тачку, а по потреби можемо урадити и обрнуто да тачку „раширимо" у дуж, диск, итд.

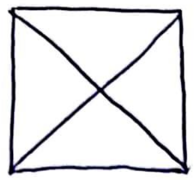
5. Одредити чему је $S^2/_{N\sim S}$ хомотопски еквивалентно (N = северни пол, S = јужни пол)

решење



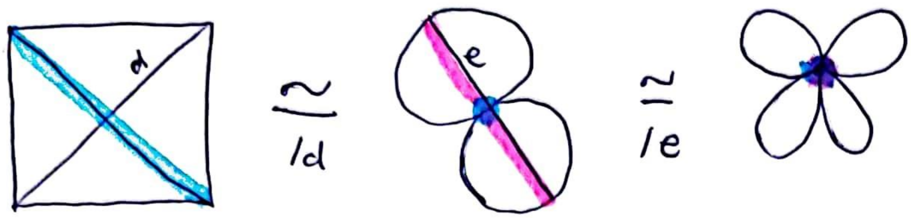
$\simeq$  $\simeq S^1 \vee S^2$ ← букет S^1 и S^2 ■

6.



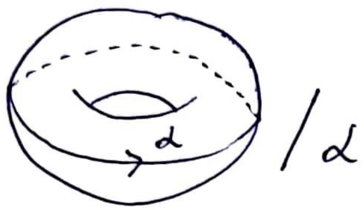
$\simeq$?

решење



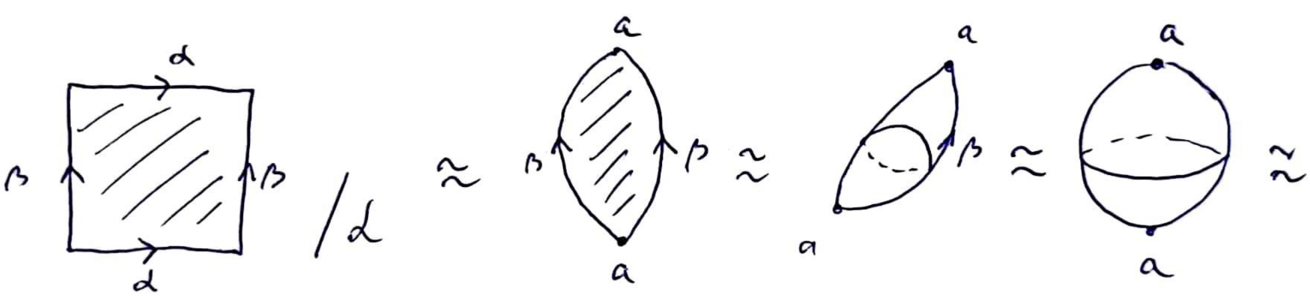
$\simeq S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1$ ■

7.



$\simeq$?

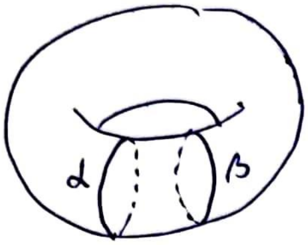
решење



$\simeq S^1 \vee S^2$ ■

Надаље исто као зад. 5

$\boxed{8.}$ На торусу T^2 уочимо кружнице α и β:

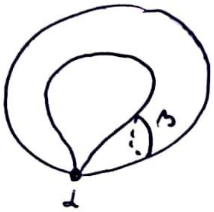


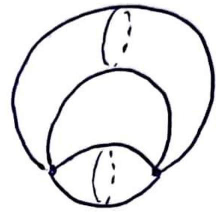
(а) $\left(T^2/\alpha\right)/_{\beta} \simeq ?$

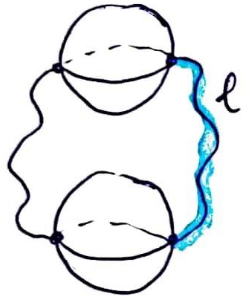
(б) $T^2/_{(\alpha\cup\beta)} \simeq ?$

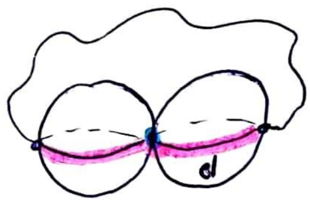
решење

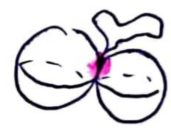
(а)

$\left(T^2/\alpha\right)/\beta \approx$ 

$/\beta \approx$  $\simeq$

$\simeq$ 

$\underset{/\ell}{\simeq}$ 

$\underset{/d}{\simeq}$  $\simeq S^1\vee S^2\vee S^2$

(б) $T^2/(\alpha\cup\beta) \approx$  $\simeq \underbrace{S^1\vee S^2}\vee\underbrace{S^1\vee S^2}$

Одатле две уштинуте сфере (из зад 5)

Фундаментална група

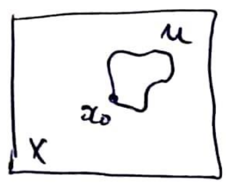
Нека је X тополошки простор и $x_0 \in X$ базна тачка.

Дефиниција Фундаментална група простора X са базном тачком $x_0 \in X$ је

$$\pi_1(X, x_0) \overset{def}{=} \{ u : I \to X \mid u(0) = u(1) = x_0 \} / \simeq$$

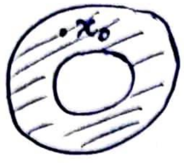
Мало детаљније:

$u : I \to X$ т.д. $u(0) = u(1)$ је у ствари петља у x_0:



То што делимо по релацији $\simeq$ значи да идентификујемо хомотопне петље. Елементи од $\pi_1(X, x_0)$ су класе петљи: $[u] \in \pi_1(X, x_0)$.

$[u] = \{$скуп свих петљи хомотопних са $u\}$

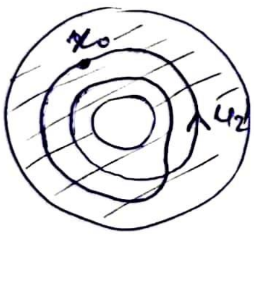
пример **ПР** $X =$ 

← кружни прстен

$u_0 \simeq c_{x_0}$ (можемо ову петљу скупити у x_0)

u_1 не можемо скупити до x_0 јер иде „око рупе"

u_{-1} је исто што и u_1 само у супротном смеру



u_2 – 2 пута петља обиђе око рупе

u_k – k пута обиђе

u_{-k} – k пута обиђе у супротном смеру

Закључак: ако је $k \neq l$ онда $u_k \not\simeq u_l$, тј. $[u_k]$ и $[u_l]$ су различити елементи у $\pi_1(X,x_0)$.

Како $k,l \in \mathbb{Z}$, то је

$$\pi_1(X,x_0) \cong \mathbb{Z}. \quad \square$$

Кад год је X путно повезан онда

$$\pi_1(X,x_0) \cong \pi_1(X,x_1)$$

за свако $x_0, x_1 \in X$, тј. фундаментална група онда не зависи од базне тачке, па ћемо писати само $\pi_1(X)$.

ПР пример (1) $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ (слично као претходни пример)

(2) $\pi_1(S^2) = 0$

Овде је 0 ознака за тривијалну групу, тј. групу која садржи само неутрал $0 = \{e\}$

(3) $X \simeq * \Rightarrow \pi_1(X) = 0$ (обрнуто не важи! $\pi_1(X) = 0 \not\Rightarrow X \simeq *$)

На $\pi_1(X)$ се дефинише операција надовезивања петљи и са том операцијом, π_1 заиста буде група (мада не мора бити Абелова).

Представљање групе преко генератора и релација

Кренућемо од специјалног случаја који ћемо проширити до општег.

1. $\langle \alpha \mid - \rangle \overset{\text{def}}{=}$ скуп свих речи од симбола α и α^{-1}.

нпр. $\alpha\alpha\alpha^{-1}\alpha$, $\alpha^{-1}\alpha^{-1}\alpha\alpha\alpha^{-1}$, $\alpha\alpha$, ...

уводимо ознаке: $\underbrace{\alpha\alpha\ldots\alpha}_{k} =: \alpha^k$

$$\underbrace{\alpha^{-1}\alpha^{-1}\ldots\alpha^{-1}}_{k} =: \alpha^{-k}$$

и релацију еквиваленције: $\alpha\alpha^{-1} \sim 1$ = празна реч

Дакле, елементи од $\langle \alpha \mid - \rangle$ су нпр.

$$\alpha\alpha\underbrace{\alpha^{-1}\alpha}_{1} = \alpha^2$$

$$\alpha^{-1}\underbrace{\alpha^{-1}\alpha}_{1}\underbrace{\alpha\alpha^{-1}}_{1} = \alpha^{-1}$$

Видимо $\langle \alpha \mid - \rangle = \{\alpha^k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$

$$\alpha^k \in \langle \alpha \mid - \rangle \xleftrightarrow{\text{бијекција}} k \in \mathbb{Z}$$

(2) $\langle \alpha, \beta \mid - \rangle$ = скуп свих речи од симбола $\alpha, \beta, \alpha^{-1}, \beta^{-1}$

нпр. $\alpha\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}\beta\alpha\beta^{-1}$, $\alpha\beta\beta$, $\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}, \dots$

Поново исте ознаке $\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{k} = \alpha^k$ итд.

Релације: $\alpha\alpha^{-1} = 1$, $\beta\beta^{-1} = 1$

Дакле, елементи из $\langle \alpha, \beta \mid - \rangle$ су нпр.

$$\alpha^2\beta^{-5}\alpha^{-2}, \quad \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-5}\beta^{-2}, \dots$$

Не важи комутативност! $\alpha\beta \neq \beta\alpha$

(3) Можемо додати и релације

$\langle \alpha \mid \alpha^2 = 1 \rangle$ = све речи од α, α^{-1}, али $\alpha^2 = 1$

нпр. $\alpha^2\alpha^{-7}\alpha^3\alpha^{11} = \alpha^9 = \underbrace{\alpha^2}_{1}\underbrace{\alpha^2}_{1}\underbrace{\alpha^2}_{1}\underbrace{\alpha^2}_{1}\alpha = \alpha$

$$\alpha^4\alpha^{-4}\alpha^2 = \alpha^2 = 1$$

Закључак: $\langle \alpha \mid \alpha^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$

Слично, $\langle \alpha \mid \alpha^k = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_k$.

Најопштији случај: $G = \langle \underset{\text{генератори}}{S} \mid \underset{\text{релације}}{R} \rangle$

Формално: $\langle S \mid - \rangle \overset{\text{def}}{=}$ слободна група са генераторима из S

$$\langle S \mid R \rangle \overset{\text{def}}{=} \langle S \mid - \rangle \big/ \underset{\substack{\text{нормална подгрупа} \\ \text{генерисана релацијама}}}{N(R)}$$

Т теорема За сваку групу G постоје S и R т.д.
$$G \cong \langle S \mid R \rangle.$$

Напомена: ова репрезентација није јединствена

$$\left.\begin{array}{l} S_1 \neq S_2 \\ R_1 \neq R_2 \end{array}\right\} \not\Longrightarrow \langle S_1 \mid R_1 \rangle \not\cong \langle S_2 \mid R_2 \rangle.$$

Тицеове трансформације

Ако из неке релације можемо да изразимо неки елемент преко осталих, онда:

(1) бришемо тај елемент;

(2) бришемо ту релацију;

(3) у осталим релацијама га заменимо.

ПР пример

(1) $\langle \alpha, \boxed{\beta}, \gamma, \delta \mid \alpha \underbrace{\beta}_{\beta = \alpha^{-1}\delta\gamma^2} = \delta\gamma^2, \quad \underbrace{\beta}\gamma^2 = \alpha^3 \underbrace{\beta} \rangle \cong$

$\cong \langle \alpha, \gamma, \delta \mid \underbrace{\alpha^{-1}\delta\gamma^2}\gamma^2 = \alpha^3 \underbrace{\alpha^{-1}\delta\gamma^2} \rangle$

(2)
можемо по потреби и додати генератор и релацију

$\langle \alpha, \beta, \gamma \mid \alpha^2 = \beta^3, \alpha\gamma = \gamma\alpha \rangle \cong$

$\cong \langle \alpha, \beta, \gamma, \boxed{\delta} \mid \alpha^2 = \beta^3, \alpha\gamma = \gamma\alpha, \underbrace{\delta = \alpha\beta\gamma^2} \rangle$

Абелизација групе

$$G = \langle S \mid R \rangle$$

$$G^{ab} \overset{\text{def}}{=} \langle S \mid R \cup \{\text{сви из } S \text{ комутирају}\} \rangle$$

Нпр. $\langle \alpha, \beta, \gamma \mid \alpha^3 = \beta^2 \rangle^{ab} \cong$

$$\cong \langle \alpha, \beta, \gamma \mid \alpha^3 = \beta^2,\ \alpha\beta = \beta\alpha,\ \alpha\gamma = \gamma\alpha,\ \beta\gamma = \gamma\beta \rangle$$

Слободни производ група

$$G_1 = \langle S_1 \mid R_1 \rangle, \quad G_2 = \langle S_2 \mid R_2 \rangle$$

$$G_1 * G_2 \overset{\text{def}}{=} \langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \rangle$$

Нпр. $\langle \alpha \mid \alpha^2 = 1 \rangle * \langle \beta \mid \beta^3 = 1 \rangle = \langle \alpha, \beta \mid \alpha^2 = 1, \beta^3 = 1 \rangle$

Директни производ група

$$G_1 \oplus G_2 \cong G_1 \times G_2 \cong \langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \cup \{\text{сви из } S_1 \text{ комутирају са свима из } S_2\} \rangle$$

Нпр.

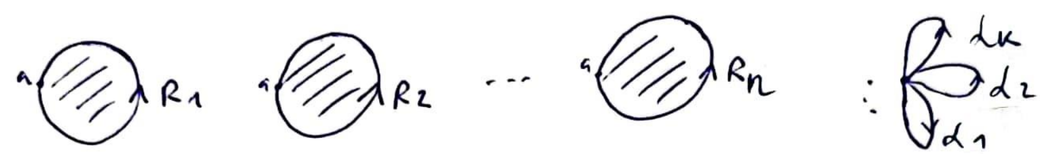
$$\langle \alpha \mid \alpha^2 = 1 \rangle \oplus \langle \beta \mid \beta^3 = 1 \rangle \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha^2 = 1,\ \beta^3 = 1,\ \alpha\beta = \beta\alpha \rangle$$

Теорема $\pi_1(X\times Y)\cong\pi_1(X)\oplus\pi_1(Y)$.

Кад је простор $X\vee Y$ „довољно леп" (а код нас ће увек бити) онда је

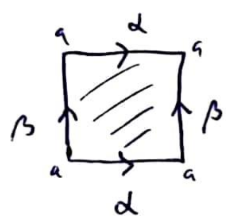
$$\pi_1(X\vee Y)\cong\pi_1(X)*\pi_1(Y).$$

Лема Ако је X дат комплексним моделом

$X\approx$ 

т.д. се у свим R_i појављује само једно теме

онда је $\pi_1(X)\cong\langle\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k \mid R_1=1, R_2=1,\dots,R_n=1\rangle$

Пример $T^2=$ 

$$\pi_1(T^2)\cong\langle\alpha,\beta \mid \underbrace{\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}}_{R_1}=1\rangle\cong$$

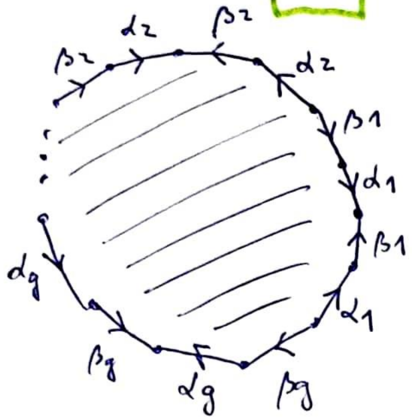
$$\cong\langle\alpha,\beta\mid\alpha\beta=\beta\alpha\rangle\cong$$

$$\cong\langle\alpha\mid -\rangle\oplus\langle\beta\mid-\rangle\cong$$

$$\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$$

1. Одредити фундаменталне групе и њихове абелизације за површи M_g и N_h, $g \in \mathbb{N}_0$, $h \in \mathbb{N}$.

решење $\boxed{M_g}$



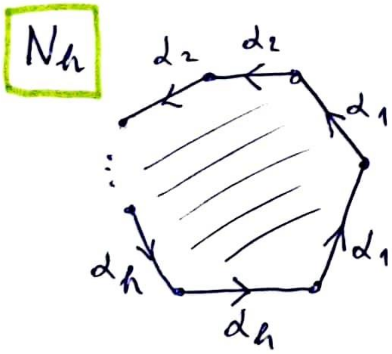
$$\pi_1(M_g) \cong \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_g \mid \alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1} \cdot \alpha_2\beta_2\alpha_2^{-1}\beta_2^{-1} \cdots \alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1} = 1 \rangle$$

$$\pi_1^{ab}(M_g) = Ab\langle \alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g \mid \alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1} \cdots \alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1} = 1 \rangle \cong$$

сви се скрате јер сада комутирају

$$\cong Ab\langle \underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g}_{2g \text{ генератора}} \mid - \rangle \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{2g} \cong \mathbb{Z}^{2g}$$

$\boxed{N_h}$



$$\pi_1(N_h) \cong \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h \mid \alpha_1^2\alpha_2^2 \cdots \alpha_h^2 = 1 \rangle$$

$$\pi_1^{ab}(N_h) \cong Ab\langle \alpha_1, \dots, \alpha_h \mid \alpha_1^2\alpha_2^2 \cdots \alpha_h^2 = 1 \rangle \cong$$

додано β

$$\cong Ab\langle \alpha_1, \dots, \alpha_h \mid (\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_h)^2 = 1 \rangle \cong$$

избацимо α_h

$$\cong Ab\langle \alpha_1, \dots, \alpha_h, \beta \mid (\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_h)^2 = 1, \beta = \alpha_1 \cdots \alpha_h \rangle \cong$$

$$\cong \mathrm{Ab}\langle \alpha_1,\dots,\alpha_{n-1},\beta \mid \beta^2=1\rangle \cong$$

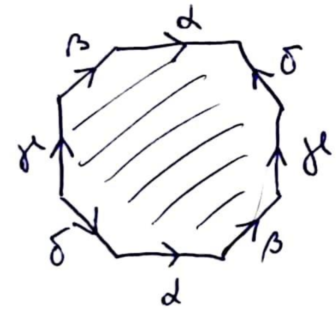
$$\cong \langle\alpha_1\mid-\rangle\oplus\cdots\oplus\langle\alpha_{n-1}\mid-\rangle\oplus\langle\beta\mid\beta^2=1\rangle\cong$$

$$\cong \underbrace{\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}}_{n-1}\oplus\mathbb{Z}_2\cong\mathbb{Z}^{n-1}\oplus\mathbb{Z}_2 \qquad \blacksquare$$

Специјално, из претходног задатка имамо

$$\pi_1(\mathbb{RP}^2)\cong\pi_1(N_1)\cong\langle\alpha\mid\alpha^2=1\rangle\cong\mathbb{Z}_2.$$

Приметимо да никоје две од површи M_g и N_n нису хомотопски еквивалентне (а ни хомеоморфне) јер су им абелизације фунд. гр. различите.

2. X: 

Доказати да је X површ и одредити која.

решење Лако се провери да X јесте површ (свака тачка има околину хомеоморфну отвореном диску).

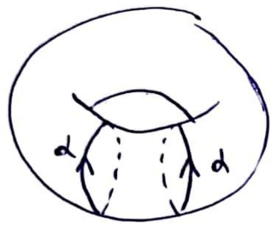
$$\pi_1(X)\cong\langle\alpha,\beta,\gamma,\delta\mid\alpha\beta\gamma\delta\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma^{-1}\delta=1\rangle \leftarrow$$

одавде не знамо шта је X

$$\pi_1^{ab}(X) \cong Ab\langle \alpha, \beta, \gamma, \delta \mid \alpha\beta\gamma\delta\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma^{-1}\delta = 1 \rangle \cong$$

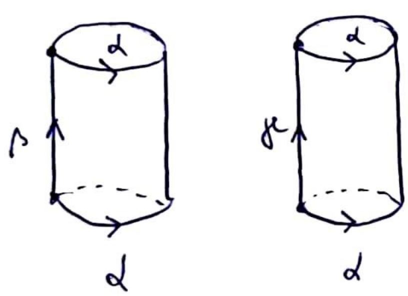
$$\cong Ab\langle \alpha, \beta, \gamma, \delta \mid \delta^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}_2$$

$\Rightarrow \quad X \cong N_4 \quad \blacksquare$

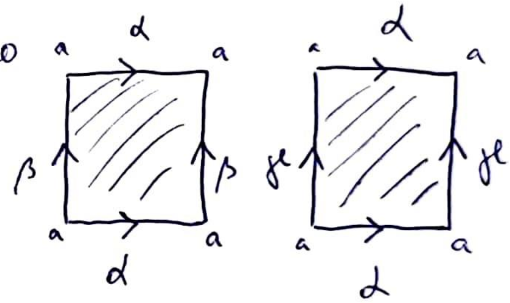
$\boxed{3.}$ X: 

Одредити $\pi_1(X)$.

решење

$X \cong$ 

сечено β, γ

$\cong$ 

$$\pi_1(X) \cong \langle \alpha, \beta, \gamma \mid \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = 1,\ \alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma^{-1} = 1 \rangle \cong$$

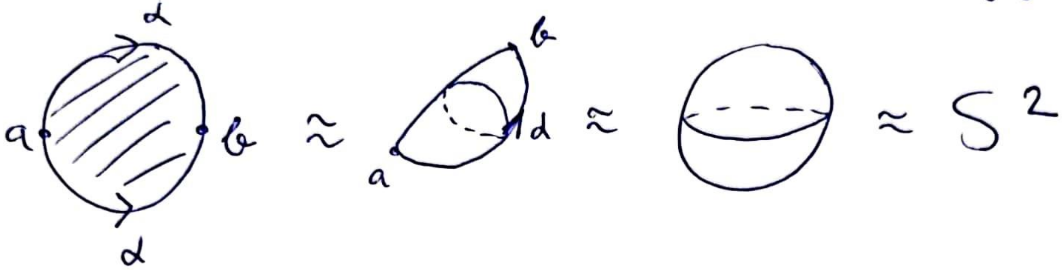
$$\cong \langle \alpha, \beta, \gamma \mid \alpha\beta = \beta\alpha,\ \alpha\gamma = \gamma\alpha \rangle \cong$$

$$\cong \langle \alpha \mid - \rangle \oplus \langle \beta, \gamma \mid - \rangle \cong$$

$$\cong \langle \alpha \mid - \rangle \oplus \left(\langle \beta \mid - \rangle * \langle \gamma \mid - \rangle \right) \cong$$

$$\cong \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z} * \mathbb{Z}) \quad \blacksquare$$

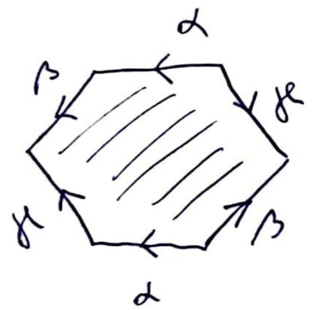
ПР пример: Кад рачунамо π_1 помоћу комшичних модела битно је да сва темена буду иста.



$$\pi_1(S^2)=0 \neq \langle \alpha \mid \alpha\alpha^{-1}=1\rangle \cong \langle \alpha \mid - \rangle \cong \mathbb{Z}$$

Проблем различитих темена лако решавамо што ћемо видети у следећем задатку.

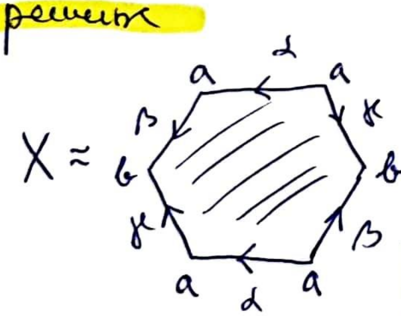
$\boxed{4.}$ X:



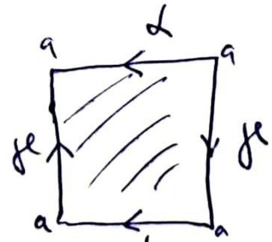
$\pi_1(X) = ?$

решење

$X \cong$



$\overset{/\beta}{\cong}$



$\cong K = N_2$

β је дуж јер иде од а до в па можемо да је скупимо у тачку јер $\beta \simeq *$

могли смо и то γ да сечемо јер је и γ дуж, али то α нисмо јер је α кружница

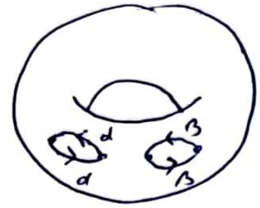
$$\pi_1(X) \cong \pi_1(K) \cong \langle \alpha, \gamma \mid \alpha^{-1}\gamma^{-1}\alpha\gamma^{-1}=1 \rangle \quad \blacksquare$$

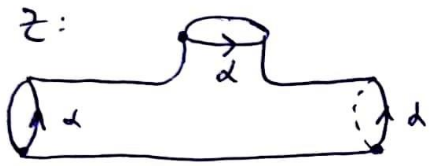
У претходном задатку смо користили:

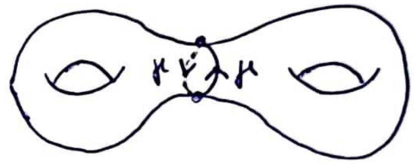
теорема $X \simeq Y \Rightarrow \pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$.

5. Одредити фундаменталне групе простора:

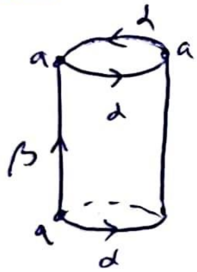
(а) X : 

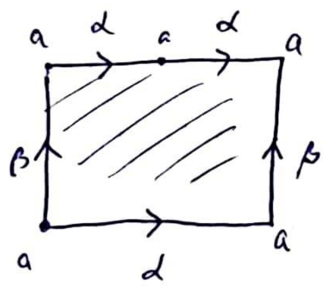
(б) Y : 

(в) Z : 

(г) T : 

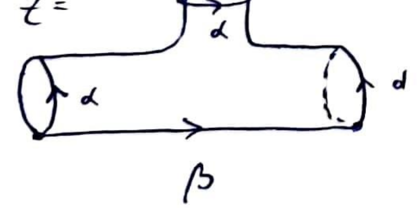
решење

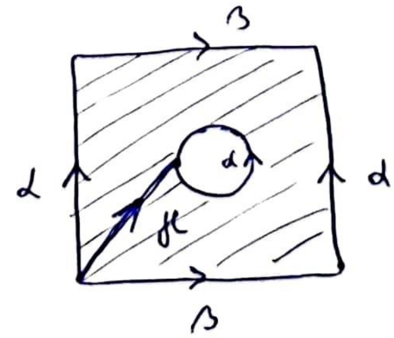
(а) $X \approx$ 

$\approx$ 

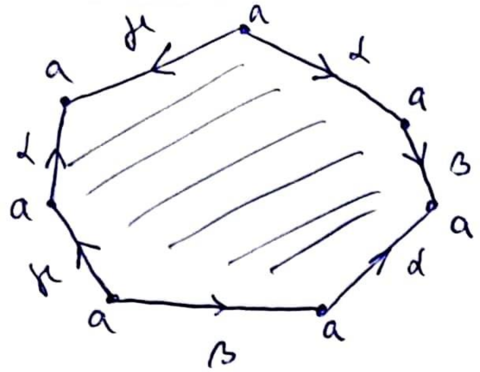
$\pi_1(X) \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta\alpha^{-2}\beta^{-1} = 1 \rangle$

(б) $Y \approx H_{1,2} \approx N_{2\cdot 1+2} \approx N_4 \Rightarrow \pi_1(Y) \cong \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \mid \alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_4^2 = 1 \rangle$

(в) Z = 

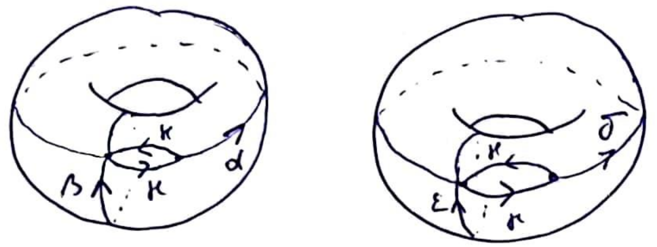
$\approx$ 

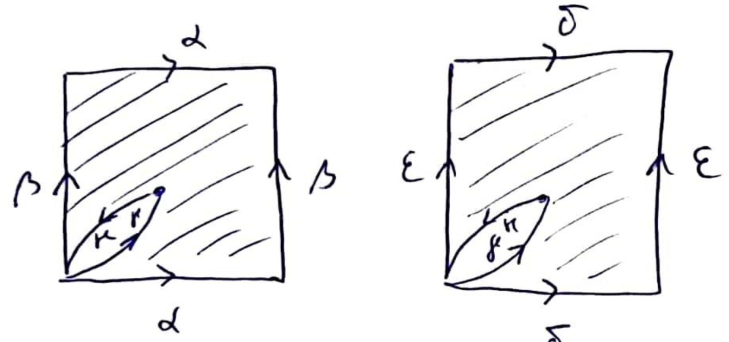
$\approx$

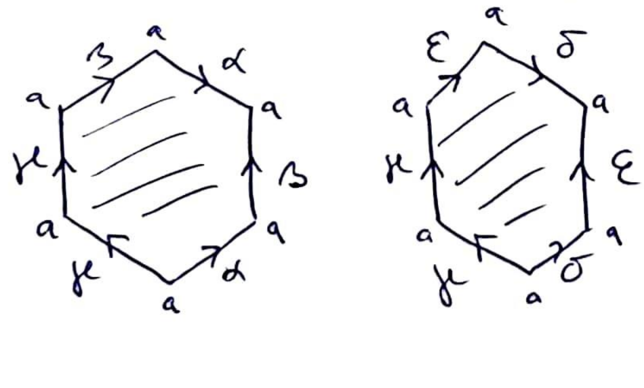
$\approx$ 

$$\Rightarrow \quad \pi_1(Z) \cong \langle \alpha, \beta, \mu \mid \alpha \beta^{-1} \alpha^{-1} \mu \alpha^{-1} \mu^{-1} \beta = 1 \rangle$$

(ii)

$T \approx$ 

$\approx$ 

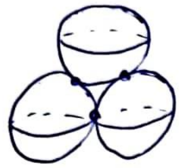
$\approx$ 

$$\Rightarrow \quad \pi_1(T) \cong \langle \alpha, \beta, \mu, \delta, \varepsilon \mid \alpha \beta \alpha^{-1} \beta^{-1} \mu^{-2} = 1 \,,\ \delta \varepsilon \delta^{-1} \varepsilon^{-1} \mu^{-2} = 1 \rangle$$

$\blacksquare$

6. Одредити фундаменталне групе простора

(а) $S^1 \vee S^1$; (б) $X = S^2/_{N\sim S}$; (в) $Y =$ 

(г) Z : 

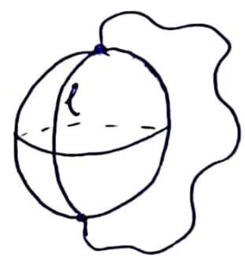
решење

Корисно:

$$\boxed{\begin{array}{l} \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \\ \pi_1(S^n) = 0 \ , \ n \geq 2 \end{array}}$$

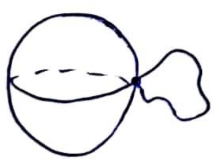
(а) $\pi_1(S^1 \vee S^1) \cong \pi_1(S^1) * \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

(б) $X =$ 

$/_{N\sim S} \simeq$  $\cong$ 

$\simeq$

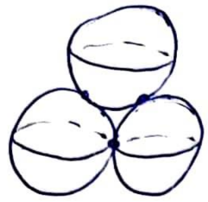
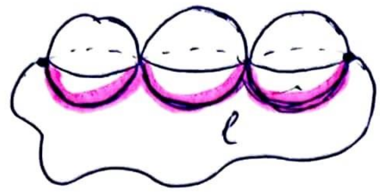
пригњечена сфера

$\cong$  $\simeq S^1 \vee S^2 \Rightarrow \pi_1(X) \cong \underbrace{\pi_1(S^1)}_{\mathbb{Z}} * \underbrace{\pi_1(S^2)}_{0} \cong \mathbb{Z}$

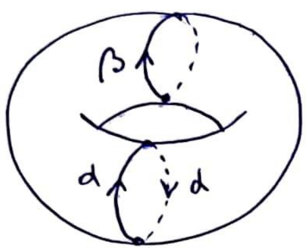
(в) $Y \simeq$ 

$\cong$  $\simeq S^1 \vee S^2 \vee S^2$

$\Rightarrow \pi_1(Y) \cong \underbrace{\pi_1(S^1)}_{\mathbb{Z}} * \underbrace{\pi_1(S^2)}_{0} * \underbrace{\pi_1(S^2)}_{0} \cong \mathbb{Z}$

(г) $Z \simeq$  $\simeq$  $\overset{h}{\simeq}$  $\simeq$

$$\simeq S^1 \vee S^2 \vee S^2 \vee S^2 \Rightarrow \pi_1(Z) \cong \mathbb{Z} \quad \blacksquare$$

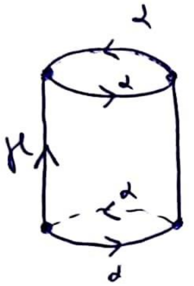
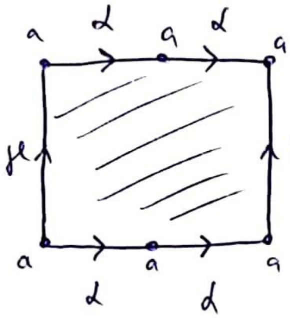
$\boxed{8.}$ X: 

(а) $\pi_1(X) = ?$

(б) $\pi_1(X/\alpha) = ?$

(в) $\pi_1(X/(\alpha \cup \beta)) = ?$

решение

(а) $X \simeq$  $\simeq$  $\Rightarrow \pi_1(X) \cong \langle \alpha, \mu \mid \alpha^2 \mu \alpha^{-2} \mu^{-1} = 1 \rangle$

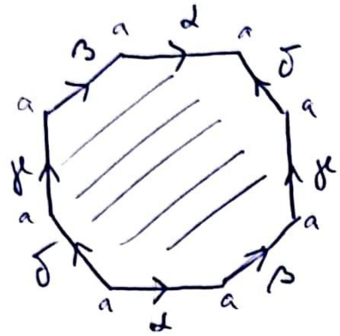
(б) $X/\alpha \simeq$  $\simeq S^1 \vee S^2 \Rightarrow \pi_1(X/\alpha) \cong \mathbb{Z}$

ущипнута сфера

(в) $X/(\alpha \cup \beta) \simeq$  $\simeq$  $\vee$  $\simeq$

$$\simeq S^1 \vee S^2 \vee S^1 \vee S^2 \Rightarrow \pi_1(X/(\alpha \cup \beta)) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \quad \blacksquare$$

9. Испитати да ли су површи X и Y хомеоморфне:

X: 

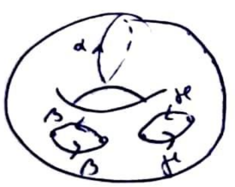
Y: 

решење

$$\pi_1(X) \cong \langle \alpha,\beta,\gamma,\delta \mid \alpha\beta\gamma\delta\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma^{-1}\delta^{-1}=1 \rangle$$

$$\pi_1^{ab}(X) \cong Ab\langle \alpha,\beta,\gamma,\delta \mid \alpha\beta\gamma\delta\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma^{-1}\delta^{-1}=1 \rangle \cong$$

$$\cong Ab\langle \alpha,\beta,\gamma,\delta \mid - \rangle \cong \mathbb{Z}^4 \Rightarrow X \approx M_2$$

$Y \approx$  $\approx H_{1,2} = N_4$

$\Rightarrow X \not\approx Y.$ □

10. Наћи простор X т.д.

(а) $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5$; (б) $\pi_1(X) \cong (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4) * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_3$

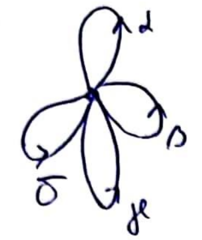
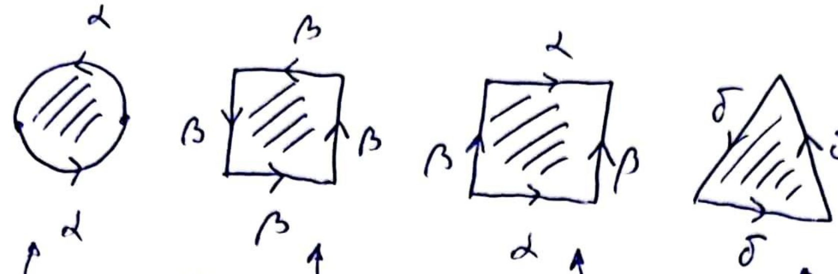
решење

(а) X: 

да би сва темена била иста

због $\mathbb{Z}_3$

због $\mathbb{Z}_5$

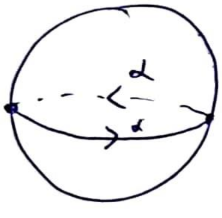
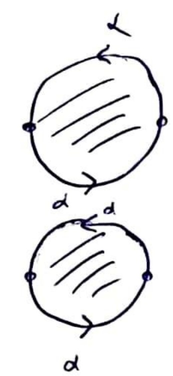
због $\oplus$ јер α и β комутирају (б) X:  

због $\mathbb{Z}_2$ | због $\mathbb{Z}_4$ | због $\oplus$ код $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$ | због $\mathbb{Z}_3$

11. $X = S^2 / _{(x,y,0) \sim (-x,-y,0)}$

(а) $\pi_1(X) = ?$ (б) Да ли је $X \approx \mathbb{R}P^2$?

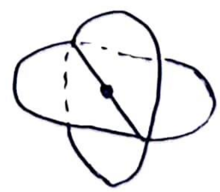
решење

(а) $X =$  $\approx$  $\Rightarrow \pi_1(X) \cong \langle \alpha \mid \alpha^2 = 1, \alpha^2 = 1 \rangle \cong$

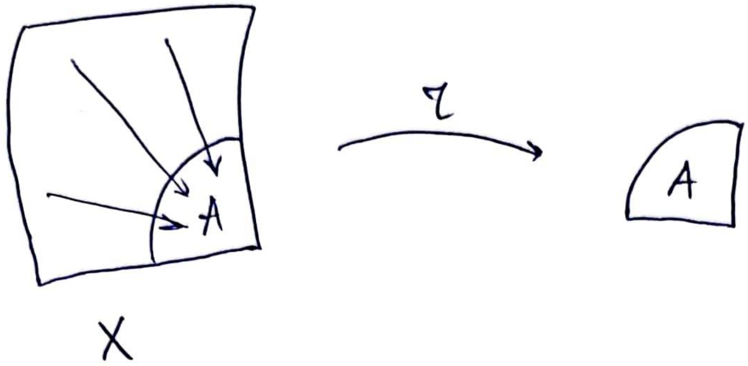
$\cong \langle \alpha \mid \alpha^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$

(б) $\pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}_2 \cong \pi_1(X)$ – ово нам не даје одговор.

$X \not\approx \mathbb{R}P^2$ јер X није површ, а $\mathbb{R}P^2$ јесте.

тачке са α имају околину:  $\not\approx \operatorname{int} D^2$ $\square$

дефиниција Кажемо да је $A \subseteq X$ ретракт простора X ако постоји непрекидно пресликавање $r: X \to A$ т.д. $r|_A = \mathbb{1}_A$.



Дакле, имамо да комутира дијаграм:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "1_A"'] & X \arrow[d, "r"] \\ & A \end{tikzcd}$$

тј. $r \circ i = 1_A$.

Деф дефиниција Кажемо да X има својство фиксне тачке (СФТ) ако свако непрекидно $f: X \to X$ има фиксну тачку, тј. $(\exists x \in X)\ f(x) = x$.

Т теорема Ако X има СФТ и A је ретракт од X, онда и A има СФТ.

Т теорема [Брауер 1] D^n има СФТ за свако $n \in \mathbb{N}_0$.

Т теорема [Брауер 2] S^{n-1} није ретракт од D^n, за свако $n \in \mathbb{N}$.

Т теорема S^n нема СФТ, за свако $n \in \mathbb{N}$.

Ако су X и Y тополошки простори, онда

непр. пресликавање $f: X \to Y$ индукује пресликавање

$$\boxed{f_*: \pi_1(X) \to \pi_1(Y)}$$

дато са $f_*([u]) = [f \circ u]$.

Особине:

(1) $(\mathbb{1}_X)_* = \mathbb{1}_{\pi_1(X)}$

(2) $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$

Слично, ако су G и H групе и $f: G \to H$ хомоморфизам, онда f индукује

$$\boxed{f^{ab}: G^{ab} \longrightarrow H^{ab}}$$

дато са $f^{ab}([x]) = [f(x)]$

Особине:

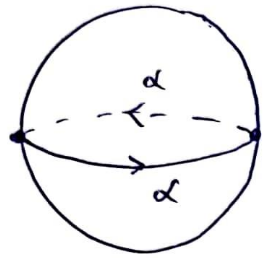
(1) $(\mathbb{1}_G)^{ab} = \mathbb{1}_{G^{ab}}$

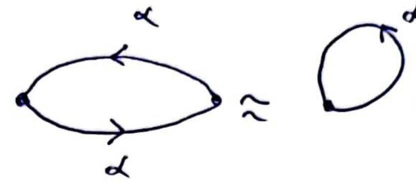
(2) $(g \circ f)^{ab} = g^{ab} \circ f^{ab}$

12. Нека је $X = S^2/_{(x,y,0)\sim(-x,-y,0)}$.

Ако је A екватор, да ли је $A/_\sim$ ретракт од X?

решење

$X =$ 

$A/_\sim =$  $\approx S^1$

X је исти простор из зад. 11 па већ знамо да је $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}_2$.

Показаћемо да $A/_\sim$ није ретракт од X.

Птс. да постоји ретракција $r : X \to A/_\sim$, тј.

$$\begin{tikzcd}
A/_\sim \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\mathbf{1}_{A/\sim}"'] & X \arrow[d, "r"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\
& A/_\sim
\end{tikzcd}
\rightsquigarrow
\begin{tikzcd}
\pi_1(A/_\sim) \arrow[r, "i_*"] \arrow[dr, "\mathbf{1}_{\pi_1(A/\sim)}"'] & \pi_1(X) \arrow[d, "r_*"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\
& \pi_1(A/_\sim)
\end{tikzcd}$$

Дијаграм са фундаменталним групама је заправо:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "i_*"] \arrow[dr, "\mathbf{1}"'] & \mathbb{Z}_2 \arrow[d, "r_*"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\
& \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

Ово је контрадикција, јер смо добили да је

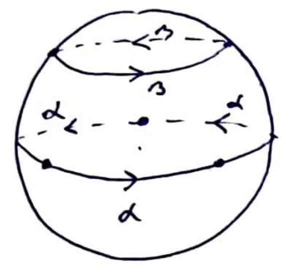
$$1_{\mathbb{Z}} = r_* \circ i_*,$$

али r_* не може бити „на" јер слика $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}$,

па ни $1_{\mathbb{Z}}$ није „на" ↯.

Дакле, не постоји r. ■

13. X:

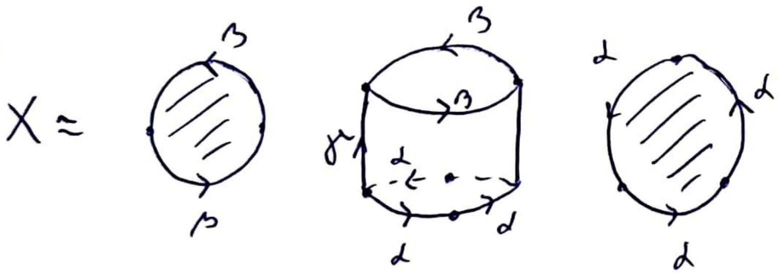


(а) $\pi_1(X) = ?$

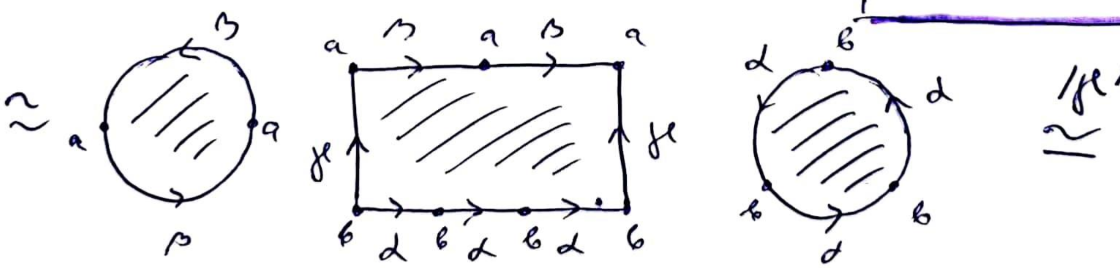
(б) Да ли је $A/\sim$ ретракт од X? (A = екватор)

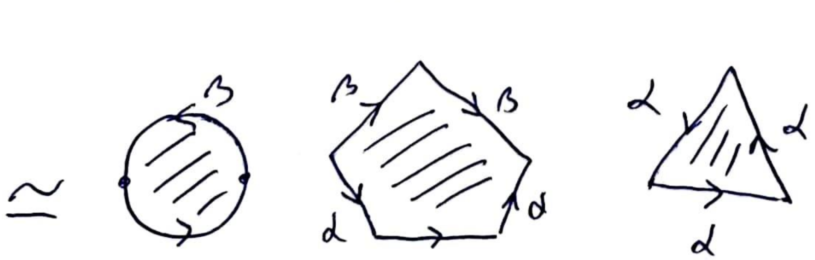
решење

(а)



је скупимо у тачку да би решили проблем $a \neq b$





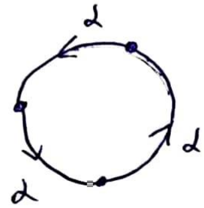
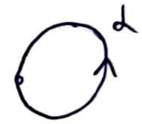
$$\pi_1(X) \cong \langle \alpha, \beta \mid \beta^2 = 1, \underbrace{\alpha^3 = \beta^2}, \alpha^3 = 1 \rangle \cong$$

сувишно јер следи из осталих релација

$$\cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha^3 = 1, \beta^2 = 1 \rangle \cong$$

$$\cong \langle \alpha \mid \alpha^3 = 1 \rangle * \langle \beta \mid \beta^2 = 1 \rangle \cong$$

$$\cong \mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_2$$

Са друге стране, $A/\sim \; =$  $\approx$  $\approx S^1$,

па је $\pi_1(A/\sim) \cong \mathbb{Z}$.

пп. $A/\sim$ јесте ретракт од X.

$$\begin{tikzcd} A/\sim \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\mathbb{1}_{A/\sim}"'] & X \arrow[d, "q"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ & A/\sim \end{tikzcd} \quad \overset{\pi_1}{\rightsquigarrow} \quad \begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "i_*"] \arrow[dr, "\mathbb{1}"'] & \mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_2 \arrow[d, "q_*"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

Немамо контрадикцију јер је $\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_2$ бесконачна група па радимо ab

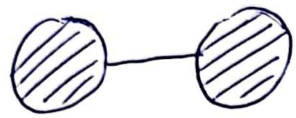
$$\overset{ab}{\rightsquigarrow} \quad \begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "i_*^{ab}"] \arrow[dr, "\mathbb{1}"'] & \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2 \arrow[d, "q_*^{ab}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

Ово је немогуће јер је $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2$ коначна гр., па q_*^{ab} није „на", па $\mathbb{1}$ није „на" ↯

$\Rightarrow$ $A/\sim$ није ретракт. $\square$

14. Испитати СФТ следећих простора

(а) X:

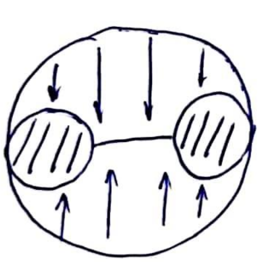


(б) Y:

(в) Z:

решење

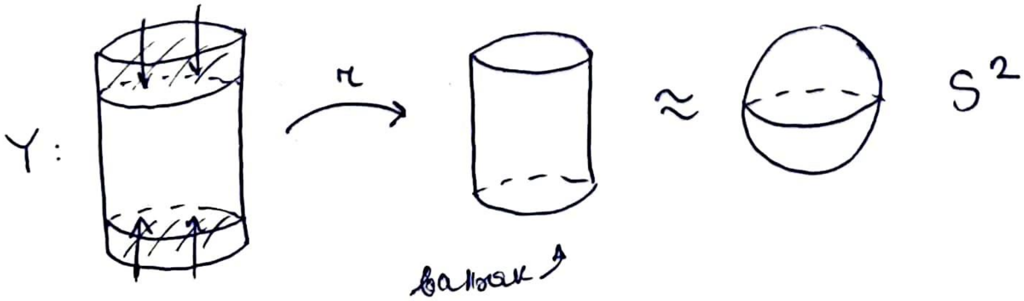
(а) Знамо D^n има СФТ, $\forall n$ (Брауер).



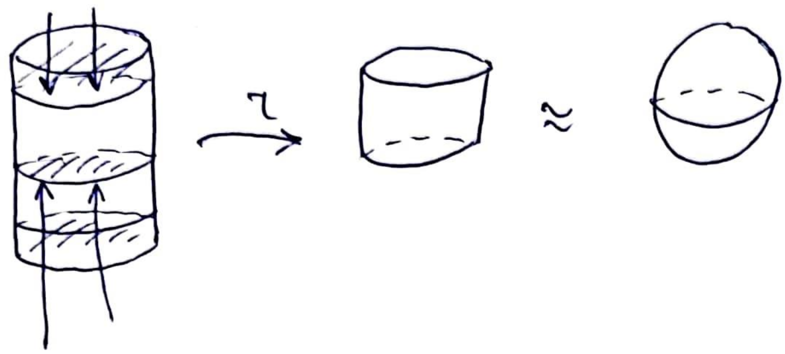
D^2

X је ретракт од D^2 и D^2 има СФТ, па и X има СФТ.

(б) Знамо S^n нема СФТ, $\forall n$.

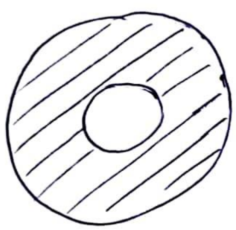


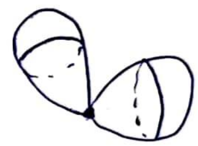
S^2 је ретракт од Y и S^2 нема СФТ $\Rightarrow$ Y нема СФТ (в) Слично као (б)

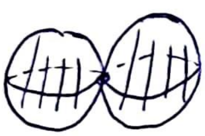
$Z =$  $= S^2$

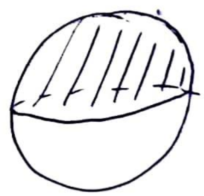
S^2 нема СФТ и ретракт је од $Z \Rightarrow Z$ нема СФТ. ■

15. Испитати СФТ следећих простора:

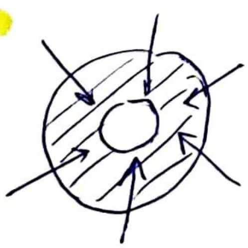
(а) X: 

(б) $Y = S^2 \vee S^2 =$ 

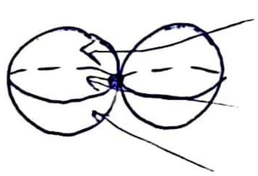
(в) Z:  $= D^3 \vee D^3$

(г) $T =$  до пола пуна сфера

решење

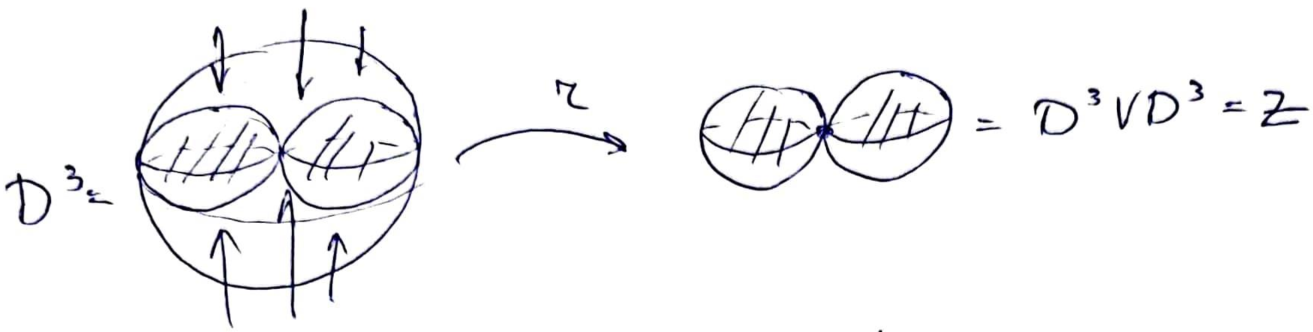
(а) $X =$  $\xrightarrow{r}$  $= S^1$

S^1 нема СФТ и ретракт је од $X \Rightarrow X$ нема СФТ

(б) $Y =$  $\xrightarrow{r}$  $= S^2$ нема СФТ

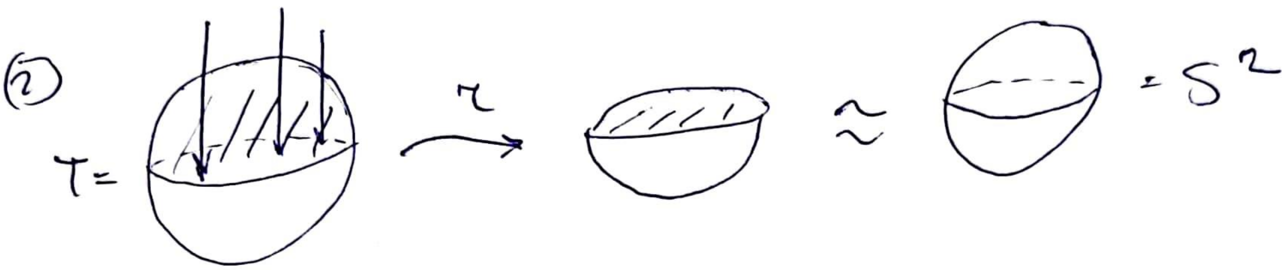
$\Rightarrow Y$ нема СФТ

(б) имамо ретракцију $D^3 \to Z$



D^3 има СФТ $\Rightarrow$ Z има СФТ

(г)



S^2 нема СФТ $\Rightarrow$ T нема СФТ. $\square$

Наткривања

дефиниција Пресликавање $p: E \to B$ је наткривање ако је непрекидно, „на" и

$$(\forall b \in B)(\exists V_b \in \mathcal{T}_B \cap \mathcal{O}(b))\ p^{-1}(V_b) = \bigsqcup_{\alpha \in A_b} U_b^\alpha,$$

где је $U_b^\alpha \in \mathcal{T}_E$ и $U_b^\alpha \approx V_b$, за свако $\alpha \in A_b$.

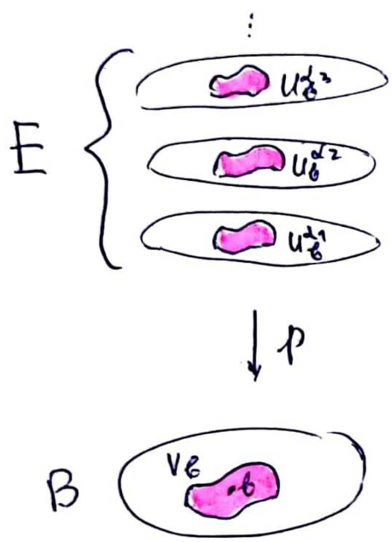
B зовемо базни простор, а E тотални простор.

Пишемо :

$E \to B$ (E наткрива B)

$E \not\to B$ (E не наткрива B)

илустрација :

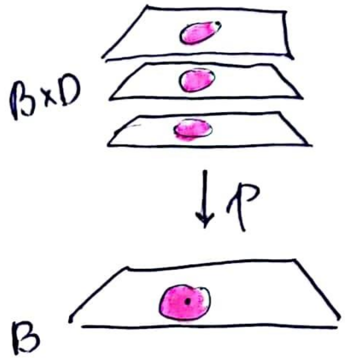


ПР пример (1) дискретно наткривање

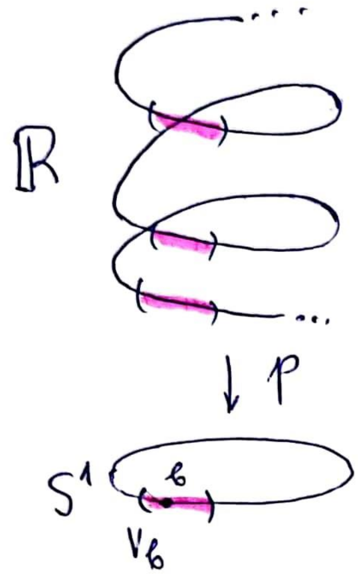
$E = B \times D$, D - дискретан простор

(нпр. D коначан или пребројив)

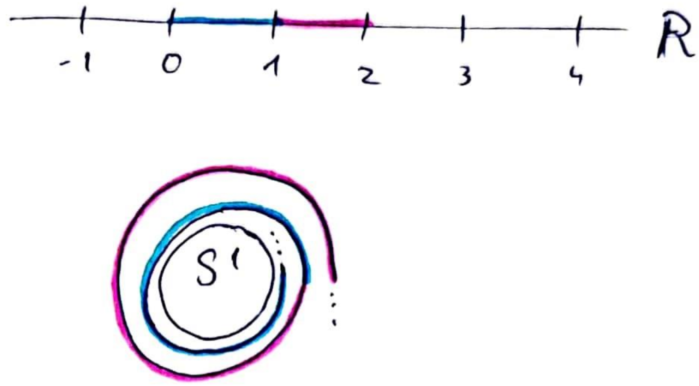
$p : B \times D \to B$ - пројекција на 1. коорд.



(2) $p: \mathbb{R} \to S^1$, $p(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$



$\mathbb{R}$ се „намота" на S^1

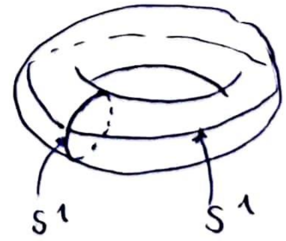


Теорема Ако су $p_1: E_1 \to B_1$ и $p_2: E_2 \to B_2$ наткривања, онда је и $p_1 \times p_2 : E_1 \times E_2 \to B_1 \times B_2$ наткривање $\big((p_1 \times p_2)(e_1, e_2) = (p_1(e_1), p_2(e_2)) \big)$.

1. Показати да $\mathbb{R}^2$ наткрива T^2.

решење

Приметимо да је $T^2 = S^1 \times S^1$



Из примера (2) знамо $\mathbb{R} \to S^1$, па из теореме следи да $\mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1 = T^2$.

Дакле, $\mathbb{R}^2$ наткрива T^2. ∎

деф

дефиниција Дејство групе G на X је пресликавање

$$\mu : G \times X \to X$$

такво да је

(1) $(\forall g_1, g_2 \in G)(\forall x \in X)\ \mu(g_2, \mu(g_1, x)) = \mu(g_2 g_1, x)$

(2) $(\forall x \in X)\ \mu(e, x) = x$ (e = неутрал у G)

Пишемо: $g \cdot x \overset{def}{=} \mu(g, x)$.

Нека је $\sim$ релација на X дата са

$$x \sim y \overset{def}{\iff} (\exists g \in G)\ y = g \cdot x$$

$\sim$ је релација еквиваленције.

$\Omega_x \overset{def}{=} \{ g \cdot x \mid g \in G \}$ је орбита од x

(тј. то је класа еквиваленције $\sim$).

деф

дефиниција Дејство је слободно ако за све $g \in G \setminus \{e\}$ пресликавање $\mu(g, \cdot)$ нема фиксних тачака, тј.

$$(\forall x \in X)\ \mu(g, x) \neq x$$

(тј. $g \cdot x \neq x$.)

Дефиниција: $X/G \overset{\text{def}}{=} X/\sim$ је простор орбита.

Напомена: Генерално X може бити било који скуп, али нама је битан случај кад је X тополошки пр. Тада се подразумева да је за свако $g \in G$ preslikavanje

$$\mu(g, \cdot) : X \to X$$

заправо хомеоморфизам. Кад је X топ. пр. и на $X/\sim$ се може дефинисати топологија, па је и X/G топ. пр.

$\boxed{2.}$ Доказати да је са $\mu(k, z) = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \cdot z$ дато дејство групе $\mathbb{Z}_n$ на

(а) S^1; (б) D^2;

и одредити да ли су та дејства слободна и њихове просторе орбита.

решење (а) $\mu : \mathbb{Z}_n \times S^1 \longrightarrow S^1$

Треба проверити (1) и (2) из деф.

(1) $\mu(k, \mu(l, z)) = \mu(k, e^{i\frac{2l\pi}{n}} \cdot z) =$

$$= e^{i\frac{2k\pi}{n}} e^{i\frac{2l\pi}{n}} \cdot z = e^{i\frac{2(k+l)\pi}{n}} \cdot z =$$

$$= e^{i\frac{2(k+_n l)\pi}{n}} \cdot z = \mu(k+_n l, z).$$

$+_n$ је сабирање у $\mathbb{Z}_n$ тј. то је сабирање mod n.

Како је $e^{i2\pi}=1$, зато $e^{i\frac{2(k+l)\pi}{n}} = e^{i\frac{2(k+_n l)\pi}{n}}$.

(2) неутрал у $\mathbb{Z}_n$ је 0:

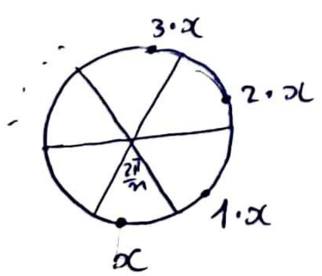
$$\mu(0,z) = e^{i\frac{2\cdot 0\cdot\pi}{n}} \cdot z = z$$

(1) + (2) $\Rightarrow$ μ јесте дејство.

Да ли је слободно?

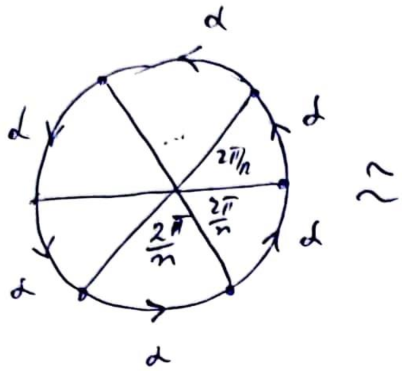
За $k \in \mathbb{Z}_n\setminus\{0\}$, $\mu(k,\cdot)$ је ротација круга S^1 за угао $\frac{2k\pi}{n}$. Ротација нема фиксних тачака па дејство јесте слободно.

Шта је $S^1/\mathbb{Z}_n$?



Дакле,

Дакле,

$S^1/\mathbb{Z}_n \approx$ 

$\approx$ 

$\approx S^1$

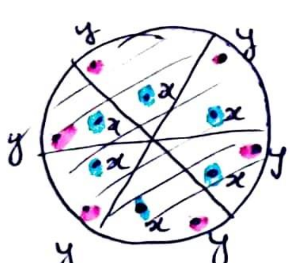
Закључак: $S^1/\mathbb{Z}_n \approx S^1$.

(б) μ јесте дејство (исто као у (а))

Да ли је слободно?

За $k \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$, $\mu(k,\cdot)$ је ротација диска D^2 за угао $\frac{2k\pi}{n}$, а свака ротација фиксира центар диска, па дејство није слободно.

Шта је $D^2/\mathbb{Z}_n$?



Дакле, $D^2/\mathbb{Z}_n \approx$ 

$\approx$ 

$= D^2$

Закључак: $D^2/\mathbb{Z}_n \approx D^2$. □

Т теорема Ако је X Хаусдорфов тополошки простор, G коначна група, $G \neq 0$ и G слободно дејствује на X, онда је $\pi : X \longrightarrow X/G$ наткривање.

ПР пример $\mathbb{Z}_2$ слободно дејствује на S^2

$$\mu : \mathbb{Z}_2 \times S^2 \longrightarrow S^2 \quad \text{је дато са:}$$

$$\mu(0, x) := x$$
$$\mu(1, x) := -x$$

Шта је простор орбита $S^2/\mathbb{Z}_2$?

Имамо наткривање $\pi : S^2 \rightarrow S^2/\mathbb{Z}_2$, тј.

$\pi : S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$. ■

Ако је B повезан, $p : E \rightarrow B$ наткривање, онда

$$(\forall b_1, b_2 \in B) \quad |p^{-1}(\{b_1\})| = |p^{-1}(\{b_2\})|$$

број тачака које се сликају у b_1

број тачака које се сликају у b_2

Претходно запажање мотивише следећу дефиницију.

ДЕФ ~~дефиниција~~ Ако је B повезан, $p: E \to B$ наткривање, онда је број листова овог наткривања дефинисан као $n = |p^{-1}(\{b\})|$, за било које $b \in B$. Кажемо да је ово наткривање n-лисно.

ПР ~~пример~~ (1) $S^2 \longrightarrow \mathbb{R}P^2$ је дволисно наткривање;

(2) свако једнолисно наткривање је хомеоморфизам.

СТАВ ~~став~~ Ако је $p: E \to B$ наткривање, E и B путно повезани, онда је $\pi_1(E) \leq \pi_1(B)$. ($\leq$ значи подгрупа)

Индекс $[\pi_1(B) : \pi_1(E)]$ је број листова наткривања.

(Ако су групе G и H коначне, онда $[G:H] = \dfrac{|G|}{|H|}$)

$\boxed{3.}$ Да ли постоје наткривања

(а) $T^2 \to \mathbb{R}P^2$; (б) $\mathbb{R}^2 \to S^2$; (в) $\mathbb{R}P^2 \to T^2$;

(г) $C \to M$; (д) $S^2 \to \mathbb{R}^2$?

решење

(а) Ако би постојало натктивање $T^2 \to \mathbb{R}P^2$, онда

$$\underset{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}{\underset{\shortparallel}{\pi_1(T^2)}} \leq \underset{\mathbb{Z}_2}{\underset{\shortparallel}{\pi_1(\mathbb{R}P^2)}}$$ што је немогуће

јер је $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ бесконачна, а $\mathbb{Z}_2$ коначна гр.

$\Rightarrow$ $\boxed{T^2 \not\to \mathbb{R}P^2.}$

(б) $\pi_1(\mathbb{R}^2) = \pi_1(S^2) = 0$, па је $[\pi_1(S^2) : \pi_1(\mathbb{R}^2)] = 1$,

тј. ако постоји натктивање $\mathbb{R}^2 \to S^2$, оно мора бити једнолисно, тј. хомеоморфизам, а знамо $\mathbb{R}^2 \not\cong S^2$.

$\Rightarrow$ $\boxed{\mathbb{R}^2 \not\to S^2}$

(в) Ако би постојало $\mathbb{R}P^2 \to T^2$, онда

$$\underset{\mathbb{Z}_2}{\underset{\shortparallel}{\pi_1(\mathbb{R}P^2)}} \leq \underset{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}{\underset{\shortparallel}{\pi_1(T^2)}}$$ што је немогуће

јер $\mathbb{Z}_2$ има елементе коначног реда, а $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ нема

$\Rightarrow$ $\boxed{\mathbb{R}P^2 \not\to T^2}$

(г) Имамо дејство $\mathbb{Z}_2$ на C, $\mu : \mathbb{Z}_2 \times C \to C$

$$\mu(0,x) := x, \quad \mu(1,x) := -x,$$

па $C \to C/\mathbb{Z}_2$.

Шта је $C/\mathbb{Z}_2$?

$\Rightarrow \boxed{C \to M}$

(д) 1. начин: исто као (б)

2. начин: ако је $p : S^2 \to \mathbb{R}^2$ наткривање, оно је непрекидно и „на", тј. $p(S^2) = \mathbb{R}^2$. Сфера S^2 је компактна па би морала и слика $p(S^2)$ да буде компактна, али $\mathbb{R}^2$ није.

$\Rightarrow \boxed{S^2 \not\to \mathbb{R}^2.}$ ■

Напомена: у делу (г) потребно би било урадити следеће

$\pi_1(C) = \mathbb{Z}, \ \pi_1(M) = \mathbb{Z}$

$\Rightarrow [\pi_1(M) : \pi_1(C)] = \dfrac{|\mathbb{Z}|}{|\mathbb{Z}|} = 1$

$\Rightarrow$ свако наткривање је једнолисно па и хомеоморфизам,

али $M \not\cong C$, па $C \not\to M$.

Ово је погрешно јер индекс $[\pi_1(M) : \pi_1(C)]$ не мора бити 1!

Атр. $\pi_1(C) = 2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}, \quad \pi_1(M) = \mathbb{Z}$

$$[\underbrace{\mathbb{Z}}_{\text{сви цели}} : \underbrace{2\mathbb{Z}}_{\text{само парни}}] = 2 \quad \blacksquare$$

теорема Свако наткривање је локални хомеоморфизам.

$\boxed{4.}$ Да ли постоје наткривања $X \to Y$ и $Y \to X$

(а) X:  Y: 

(б) X:  Y: 

решење (а) У X имамо тачку са околином $\times$, а тога нема у Y, па $\boxed{X \not\to Y}$. Слично у

У имамо тачку са околином , а тога нема у X, па $\boxed{Y \not\to X}$

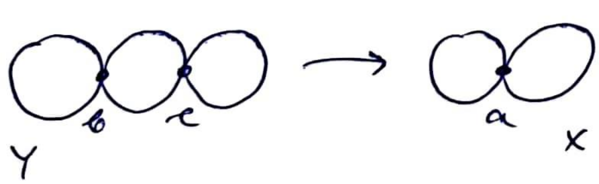
(б) и у X и у Y све тачке имају или околину облика или па је то у реду.

Ако би постојало наткривање $X \to Y$, онда

а мора да се слика у b или c, али онда нема ништа из X да се слика у другу тачку (проблем је што у X само једна тачка има околину , а у Y две.)

$\Rightarrow$ $\boxed{X \not\to Y.}$

Ако тражимо наткривање $Y \to X$, онда морају

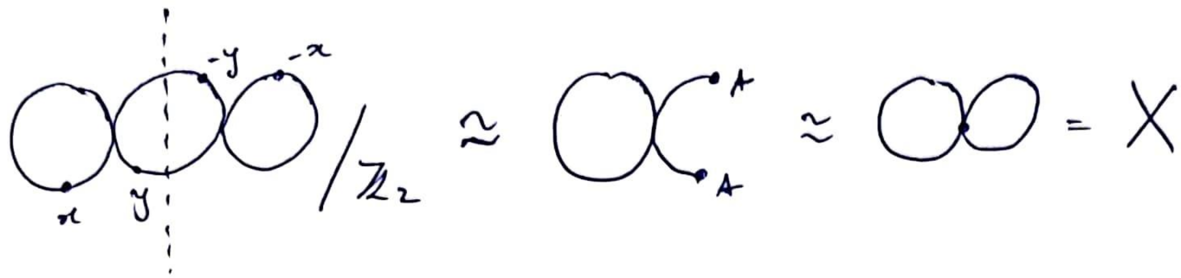


и b и c да се сликају у a. То нам даје идеју.

Имамо дејство $\mathbb{Z}_2 \to Y$, $\mu : \mathbb{Z}_2 \times Y \to Y$

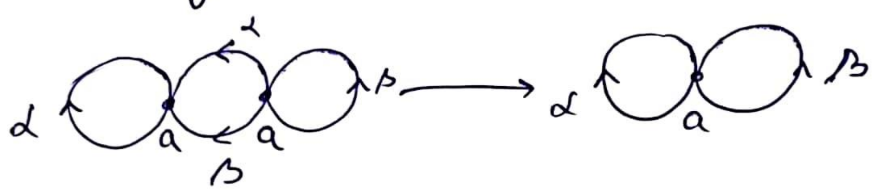
$\mu(0,x) := x$, $\mu(1,x) := -x$, па $Y \to Y/\mathbb{Z}_2$

Шта је $Y/\mathbb{Z}_2$?

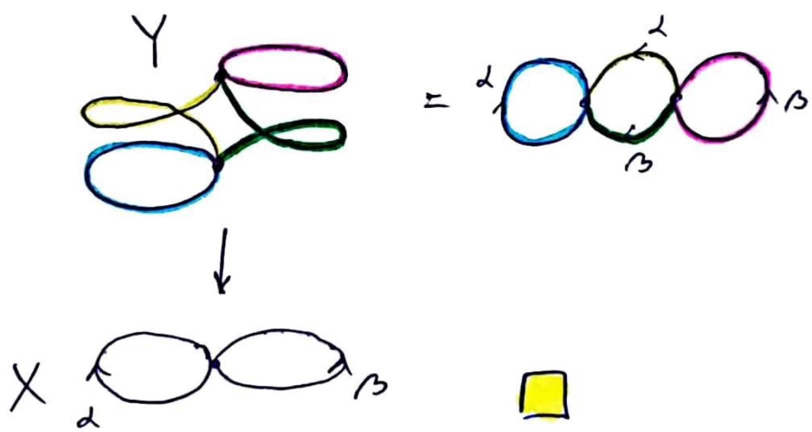


Дакле, $\boxed{Y \to X.}$

2. начин (без дејства): да експлицитно опишемо шта се у шта слика

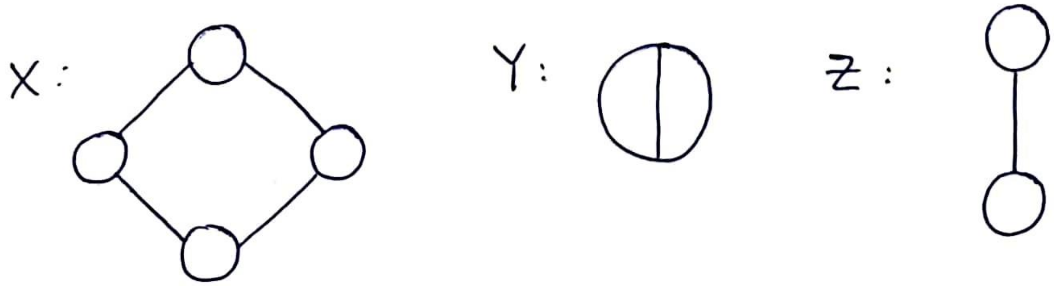


Илустрација



∎

5. Да ли постоји неко од могућих 6 наткривања између просторима



решење: У сва три простора тачке имају околину

 или  па то није проблем.

Ако у неком простору W имамо k тачака са неком специфичном околином (нпр. ), а у T имамо l таквих тачака и ако је $W \to T$, онда мора бити $k = n \cdot l$, где је n број листова овог наткривања, тј. $\underline{\underline{l \mid k}}$.

(1) $Y \to X$?

У Y имамо 2 тачке са околином , а у X их има 8, тј. $l=8$, $k=2$, па како $8 \nmid 2$, то $\boxed{Y \not\to X}$

(2) $Y \to Z$?

слично: у Y је $k=2$ у Z је $l=2$

$k = n \cdot l \Rightarrow n=1 \Rightarrow$ наткривање мора бити једнолисно, тј. хомеоморфизам, али $Y \not\cong Z$

$\Rightarrow \boxed{Y \not\to Z}$

(3) $Z \to Y$? исто као (2) $\Rightarrow \boxed{Z \not\to Y}$

(4) $Z \to X$?

у Z је $k=2$, у X је $l=8$

$8 \nmid 2 \Rightarrow \boxed{Z \not\to X}$

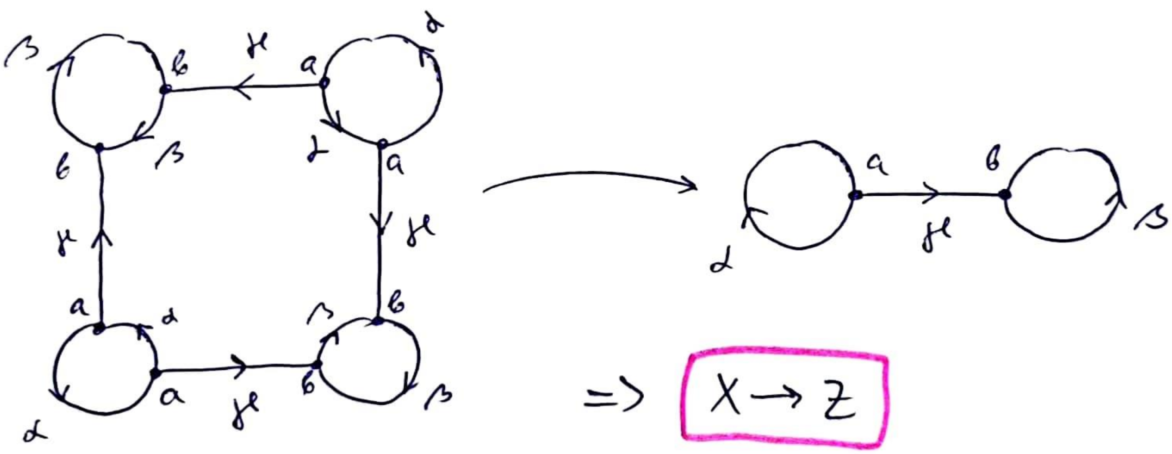
(5) $X \to Z$?

у X је $k=8$, у Z је $l=2$

$2 \mid 8$ ✓, $\quad k = n \cdot l \Rightarrow n = 4$

Ако постоји наткривање оно је 4-лисно.

Експлицитно дефинисано наткривање:



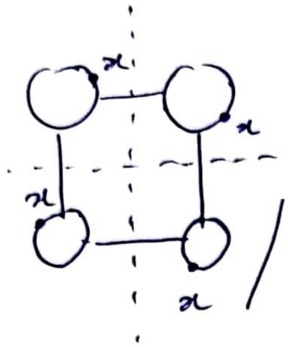
$\Rightarrow \boxed{X \to Z}$

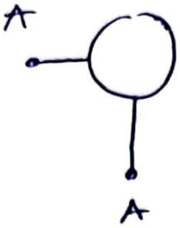
(6) $X \to Y$? слично као у (5): $n=4$.

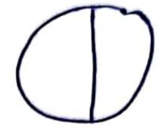
Имамо дејство $\mu : \mathbb{Z}_4 \times X \to X$

$$\mu(k, x) = \text{ротација за угао } \frac{k\pi}{2},$$

$k \in \{0,1,2,3\}$. Имамо наткривање $X \to X/\mathbb{Z}_4$

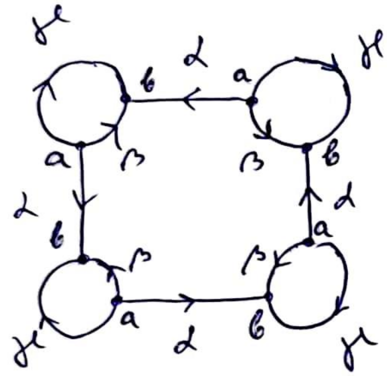
$X/\mathbb{Z}_4 =$ 

$/\mathbb{Z}_4 \;\simeq$ 

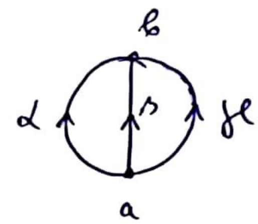
$\simeq$  $= Y$

$\Rightarrow \boxed{X \to Y}$

2. начин: експлицитно дефинисање



$\longrightarrow$



$\blacksquare$

Став Ако је $p: E \to B$ n-лисно наткривање, E и B површи, онда је $\chi(E) = n \cdot \chi(B)$.

6. Да ли постоје наткривања

(а) $N_3 \to N_5$; (б) $N_5 \to N_3$?

решење

(а) $\chi(N_3) = 2-3 = -1$, $\chi(N_5) = 2-5 = -3$

$-1 = n \cdot (-3) \Rightarrow n = \frac{1}{3}$ ↯ $\Rightarrow \boxed{N_3 \not\to N_5}$

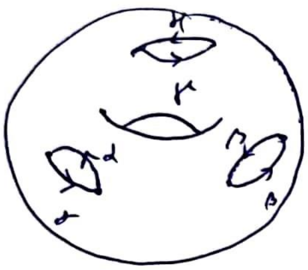
(O) $-3 = n\cdot(-1) \Rightarrow n=3$

Ако постоји наткривање оно је 3-лисно.

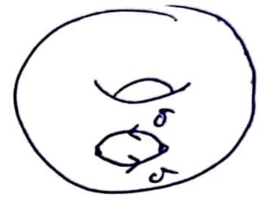
Сетимо се: $N_5 \approx M_1 \# N_1 \# N_1 \# N_1$

$$N_3 \approx M_1 \# N_1$$

N_5 :



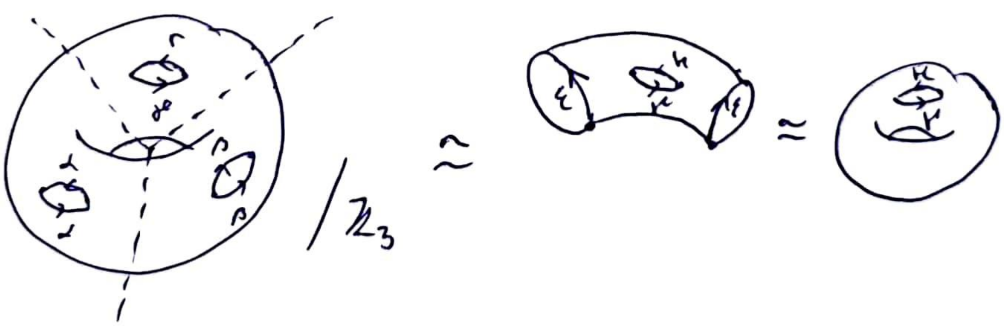
N_3 :



Посматрајмо дејство $\mathbb{Z}_3$ на N_5, $\mu: \mathbb{Z}_3 \times N_5 \to N_5$

$\mu(k, x)$ = ротација за $\frac{2k\pi}{3}$, $k \in \{0,1,2\}$

$N_5/\mathbb{Z}_3 =$



$= N_3$

$\Rightarrow \boxed{N_5 \longrightarrow N_3}$ ■

7. Да ли постоји наткривање

(а) $M_3 \to M_9$? (б) $M_9 \to M_3$?

решење

(а) $\chi(M_3) = 2-2\cdot 3 = -4$, $\chi(M_9) = 2-2\cdot 9 = -16$

Ако $M_3 \to M_9$, онда $-4 = n\cdot(-16) \Rightarrow n = \frac{1}{4}$ ↯

$\Rightarrow M_3 \not\to M_9$

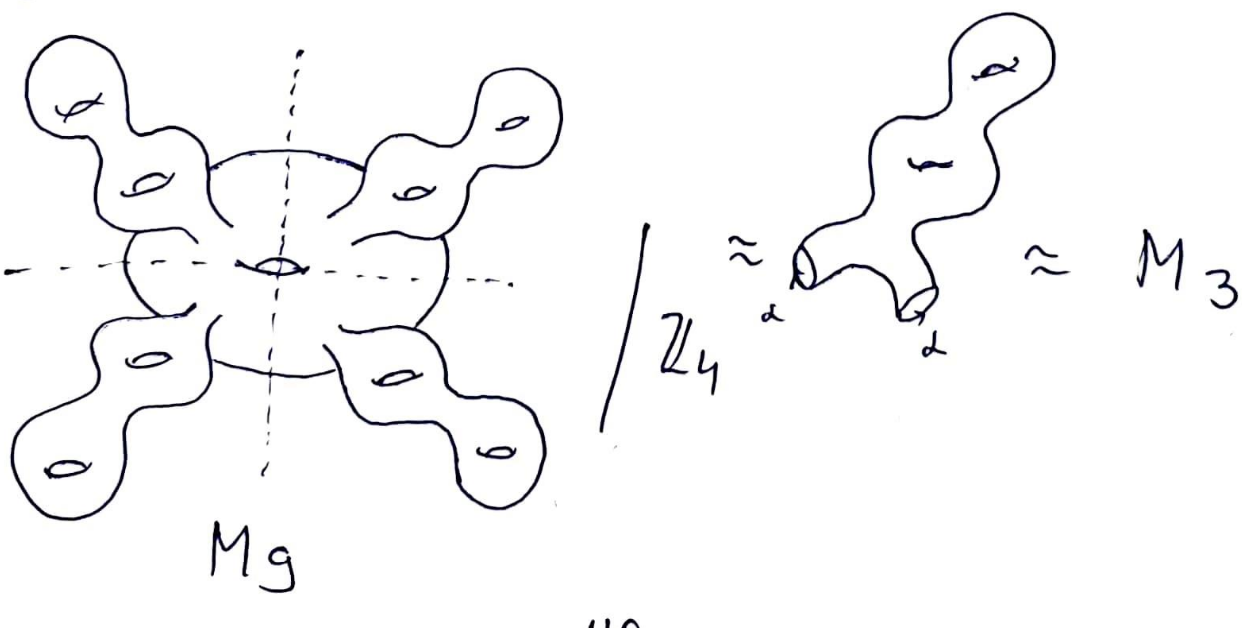
(б) Ако $M_9 \to M_3$, онда $-16 = n\cdot(-4) \Rightarrow n = 4$ тј.

наткривање је 4-лисно.

$M_9 =$ 

$M_3 =$ 

Имамо дејство $\mathbb{Z}_4$ на M_9, али треба M_9 да мало преобликујемо:



Дакле, $M_9 \to M_9/\mathbb{Z}_4$, тј. $\boxed{M_9 \to M_3}$ ■

Брауерова и Борсук-Уламова теорема

теорема [Брауер] Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $f: D^n \to D^n$ непрекидно. Тада f има фиксну тачку, тј. $(\exists x_0 \in D^n)\, f(x_0) = x_0$.

теорема [Борсук-Улам] Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $f: S^n \to \mathbb{R}^n$ непрекидно. Тада постоји $x_0 \in S^n$ т.д. $f(x_0) = f(-x_0)$.

$\boxed{1.}$ Доказати да је БУТ еквивалентна са следећим исказом:

(БУТ1) Ако је $f: S^n \to \mathbb{R}^n$ непрекидно и непарно, онда $(\exists x_0 \in S^n)\, f(x_0) = 0$.

решење

(БУТ) => (БУТ1) Нека је $f: S^n \to \mathbb{R}^n$ непр. и непарно. Из БУТ) следи да $(\exists x_0 \in S^n)\, f(x_0) = f(-x_0)$, али f је и непарно, па

$$f(x_0) = f(-x_0) = -f(x_0) \Rightarrow 2f(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = 0.$$

(БУТ1) $\Rightarrow$ (БУТ) Нека је $f: S^n \to \mathbb{R}^n$ непрекидно.

Дефинишимо $g: S^n \to \mathbb{R}^n$ са $g(x) \overset{\text{def}}{=} f(x) - f(-x)$.

g је непр. и непарно:

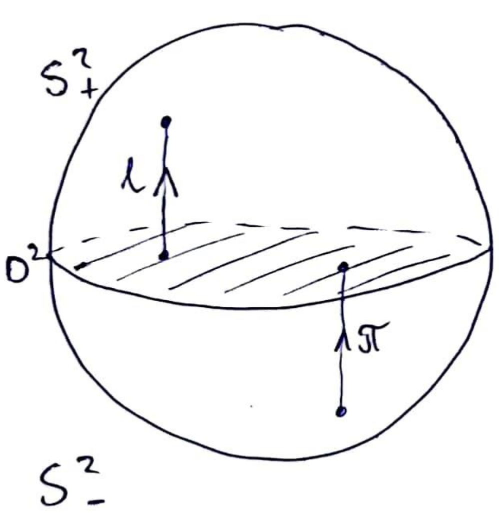
$$g(-x) = f(-x) - f(x) = -(f(x) - f(-x)) = -g(x)$$

па на основу (БУТ1) $(\exists x_0 \in S^n)\ g(x_0) = 0$, тј.

$$0 = g(x_0) = f(x_0) - f(-x_0) \Rightarrow f(x_0) = f(-x_0). \ \square$$

2. Нека је $f: S^2_+ \to S^2_-$ непрекидно. Доказати да постоји $x = (x_1, x_2, x_3) \in S^2_+$ т.д. $f(x) = (x_1, x_2, -x_3)$.
(S^2_+ = горња полусфера, S^2_- = доња полусфера)

решење



Нека је $l: D^2 \to S^2_+$ „подизање"

тј. $l(x_1, x_2, 0) = (x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2})$,

а $\pi: S^2_- \to D^2$ „пројекција", тј.

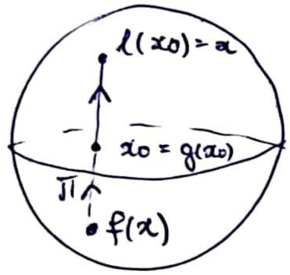
$$\pi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 0)$$

Нека је $g: D^2 \to D^2$ дато са $g = \pi \circ f \circ l$.

$$\begin{tikzcd} D^2 \arrow[r, "l"] \arrow[rrr, bend right, "g"'] & S^2_+ \arrow[r, "f"] & S^2_- \arrow[r, "\pi"] & D^2 \end{tikzcd}$$

g је непр. па на основу Брауерове теореме има фиксну тачку, тј. $(\exists x_0 \in D^2)\ g(x_0) = x_0$.

Нека је $x := l(x_0)$. Тада је x тражена тачка.



Формално: $x_0 = (x_1, x_2, 0)$

$$x = l(x_0) = (x_1, x_2, \sqrt{1-x_1^2-x_2^2})$$

$$\pi(f(l(x_0))) = x_0 \Rightarrow \pi(f(x)) = (x_1, x_2, 0)$$

$$\Rightarrow f(x) = (x_1, x_2, -\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}).$$ ■

3. Нека су F_1, F_2 и F_3 затворени скупови на S^2 који је покривају, тј. $S^2 = F_1 \cup F_2 \cup F_3$. Показати да бар један од ова три скупа садржи пар антиподалних тачака.

решење Нека су $d_1, d_2 : S^2 \to \mathbb{R}$ дате са

$d_1(x) \overset{\text{def}}{=} d(x, F_1)$ - растојање x и F_1

$d_2(x) \overset{\text{def}}{=} d(x, F_2)$ - растојање x и F_2

и нека је $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ дато са $f(x) \overset{\text{def}}{=} (d_1(x), d_2(x))$.

f је непр. $\xRightarrow{\text{БУТ}}$ $(\exists x_0 \in S^2)\ f(x_0) = f(-x_0)$.

тј. $d_1(x_0) = d_1(-x_0)$ и $d_2(x_0) = d_2(-x_0)$.

1° Ако $x_0 \in F_1$: $d_1(x_0) = 0 \Rightarrow d_1(-x_0) = d_1(x_0) = 0$

$\Rightarrow -x_0 \in F_1 \Rightarrow \underline{x_0, -x_0 \in F_1}$

2° Ако $x_0 \in F_2$: слично као 1° $\underline{x_0, -x_0 \in F_2}$

3° Ако $x_0 \notin F_1$ и $x_0 \notin F_2 \Rightarrow x_0 \in F_3$

$$\left.\begin{array}{l} x_0 \notin F_1 \Rightarrow d_1(x_0) > 0 \Rightarrow d_1(-x_0) > 0 \Rightarrow -x_0 \notin F_1 \\ x_0 \notin F_2 \Rightarrow d_2(x_0) > 0 \Rightarrow d_2(-x_0) > 0 \Rightarrow -x_0 \notin F_2 \end{array}\right\} \Rightarrow -x_0 \in F_3$$

$\Rightarrow \underline{x_0, -x_0 \in F_3}$. ■

$\boxed{4.}$ Нека је $f: S^1 \to S^1$ непрекидно и „1-1". Тада је f „на".

решење Пус. f није „на", тј. $\exists y \in S^1 \setminus f(S^1)$. Имамо

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right] & S^1 \setminus \{y\} \arrow[r, "h", "\approx"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$h \circ f: S^1 \to \mathbb{R}$ непр. $\xRightarrow{\text{БУТ}}$ $(\exists x_0 \in S^1)\ (h \circ f)(x_0) = (h \circ f)(-x_0)$

Како је h хомео то

$$h^{-1}(h(f(x_0))) = h^{-1}(h(f(-x_0)))$$

$$\Rightarrow \quad f(x_0) = f(-x_0) \quad \Rightarrow \quad f \text{ није „1-1"} \ \lightning$$

Дакле, f мора бити „На" $\square$

$\boxed{5.}$ Показати да је БУТ еквивалентна са следећим исказом:

(БУТ2) Не постоји непрекидно непарно пресликавање

$$g: S^n \to S^{n-1}.$$

Решење (БУТ) ⇒ (БУТ2) пдс. Нека је g непр. и непарно.

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "i \circ g"'] & S^{n-1} \arrow[r, hook, "i"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

$i \circ g: S^n \to \mathbb{R}^n$ непр.

$\overset{(БУТ)}{\Longrightarrow}$ $(\exists x_0 \in S^n)\ i(g(x_0)) = i(g(-x_0)) \Rightarrow g(x_0) = g(-x_0) = -g(x_0)$

$\Rightarrow 2g(x_0) = 0 \Rightarrow g(x_0) = 0 \notin S^{n-1}$ ↯

(БУТ2) ⇒ (БУТ) Нека је $f: S^n \to \mathbb{R}^n$ и пдс.

$(\forall x \in S^n)\ f(x) \neq f(-x)$.

Дефинишимо $g: S^n \to S^{n-1}$ са

$$g(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}$$

g је непр. и непарно и слика $S^n \to S^{n-1}$ ↯ $\square$

Крај :)