Став Ако су A и B квадратне матрице истог реда, онда

$$\det(A\cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Пример $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $\det(A\cdot B) = ?$

1. начин: $A\cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 5\cdot(-1) & 2\cdot 0 + 5\cdot(-2) \\ (-3)\cdot 1 + 8\cdot(-1) & (-3)\cdot 0 + 8\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -10 \\ -11 & -16 \end{pmatrix}$

$$\det(A\cdot B) = \begin{vmatrix} -3 & -10 \\ -11 & -16 \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-16) - (-11)\cdot(-10) = 48 - 110 = -62$$

2. начин: $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} = 2\cdot 8 - (-3)\cdot 5 = 31$

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-2) - (-1)\cdot 0 = -2$$

$$\det(A\cdot B) = \det A \cdot \det B = 31\cdot(-2) = -62$$

Задаци

1. Израчунати детерминанте

(а) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}$, (б) $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$, (в) $\begin{vmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (г) $\begin{vmatrix} -5 & -6 & -1 \\ 7 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

решење

(а) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 1 - 8\cdot 2 = -13$, (б) $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 0\cdot 6 - 5\cdot 1 = -5$

(в) $\begin{vmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 7 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{matrix} = 7\cdot 3\cdot 1 + 1\cdot 5\cdot 4 + 2\cdot 2\cdot 1 - 4\cdot 3\cdot 2 - 1\cdot 5\cdot 7 - 1\cdot 2\cdot 1 = -16$

(г) $\begin{vmatrix} -5 & -6 & -1 \\ 7 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} -5 & -6 \\ 7 & 0 \\ 3 & 2 \end{matrix} = (-5)\cdot 0\cdot 1 + (-6)\cdot 0\cdot 3 + (-1)\cdot 7\cdot 2 - 3\cdot 0\cdot(-1) - 2\cdot 0\cdot(-5) - 1\cdot 7\cdot(-6) = 28$

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \\ 6 & -7 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $\det A = ?$

решење Користимо формулу

$$\det A = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} + a_{14}M_{14}$$
$$= 0 \cdot M_{11} - (-1)M_{12} + 1 \cdot M_{13} + 2 \cdot M_{14}$$
$$= M_{12} + M_{13} + 2M_{14}$$

$$M_{12} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 1 & 5 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right| = 3\cdot1\cdot3 + 1\cdot1\cdot2 + 5\cdot6\cdot3 - 2\cdot1\cdot5 - 3\cdot1\cdot3 - 3\cdot6\cdot1 = 64$$

$$M_{13} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 4 & 5 & 3 & 4 \\ 6 & -7 & 1 & 6 & -7 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 5 \end{array}\right| = 3\cdot(-7)\cdot3 + 4\cdot1\cdot2 + 5\cdot6\cdot5 - 2\cdot(-7)\cdot5 - 5\cdot1\cdot3 - 3\cdot6\cdot4 = 78$$

$$M_{14} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 6 & -7 & 1 & 6 & -7 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 5 \end{array}\right| = 3\cdot(-7)\cdot3 + 4\cdot1\cdot2 + 1\cdot6\cdot5 - 2\cdot(-7)\cdot1 - 5\cdot1\cdot3 - 3\cdot6\cdot4 = -98$$

Коначно, $\det A = M_{12} + M_{13} + 2M_{14} = 64 + 78 - 2\cdot98 = -54$ ☒

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 8 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $\det(A\cdot B) = ?$

решење Користимо формулу $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

$$\det A = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 1 & 7 & 6 \end{array}\right| = 2\cdot0\cdot1 + 3\cdot8\cdot7 + (-1)\cdot0\cdot6 - 7\cdot0\cdot(-1) - 6\cdot8\cdot2 - 1\cdot0\cdot3 = 72$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \\ 5 & 0 \end{matrix} = 1\cdot 2\cdot 8 + 2\cdot 3\cdot 5 + 3\cdot 4\cdot 0 - 5\cdot 2\cdot 3 - 0\cdot 3\cdot 1 - 8\cdot 4\cdot 2 = -48$$

Коначно, $\det(AB) = \det A \cdot \det B = 72\cdot(-48) = -3456$ ▨

Крај задатака

Инверзна матрица

деф. Матрица B је инверзна матрица матрице A ако је

$$A\cdot B = B\cdot A = I_n$$

Инверзну матрицу од A означавамо са A^{-1}.

Из деф. видимо да се појам инверзне матрице дефинише само за квадратне матрице!

Став Ако је $\det A = 0$, онда не постоји A^{-1}.

доказ: Претпоставимо супротно да постоји A^{-1}, тј.

$$A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I_n,$$

Тада је $\det(A\cdot A^{-1}) = \det I_n$, али

$$\det(A\cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det(A^{-1}) = 0\cdot \det(A^{-1}) = 0$$

$$\det I_n = 1,$$

па добијамо $0 = 1$, што је немогуће, па A^{-1} не може постојати. ▨

Ако је $\det A \neq 0$, онда постоји A^{-1} и сада ћемо видети како се рачуна.

деф. Нека је A матрица реда $n \times n$. Адјунгована матрица од A је матрица $A^* = (b_{ij})_{n\times n}$ реда $n\times n$, где је

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}, \qquad 1 \le i,j \le n,$$

а M_{ij} су минори матрице A.

Пример $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad A^* = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$

Сад рачунамо b_{ij}.

$M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 0\cdot 1 - 3\cdot 7 = -21$, $\quad b_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = -21$

$M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 1 - 4\cdot 3 = -9$, $\quad b_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = 9$

$M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3\cdot 7 - 4\cdot 0 = 21$, $\quad b_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = 21$

$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1 - 7\cdot(-1) = 9$, $\quad b_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -9$

$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1 - 4\cdot(-1) = 5$, $\quad b_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = 5$

$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 1\cdot 7 - 4\cdot 2 = -1$, $\quad b_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = 1$

$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 - 0\cdot(-1) = 6$, $\quad b_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = 6$

$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 3 - 3\cdot(-1) = 6$, $\quad b_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -6$

$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot 0 - 3\cdot 2 = -6$, $\quad b_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = -6$

Коначно, $A^* = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & 9 & 21 \\ -9 & 5 & 1 \\ 6 & -6 & -6 \end{pmatrix}$

деф. Транспонована матрица матрице A је матрица чије су колоне управо врсте матрице A, тј. ако је

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

онда

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{n \times m}$$

Пример $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Теорема Нека је A квадратна матрица и $\det A \neq 0$. Тада постоји A^{-1} и важи

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \left(A^T \right)^*$$

Став Матрица A^{-1} је јединствена, ако постоји.

доказ: Нека су B и C две инверзне матрице од A, тј.

$$AB = BA = I_n \quad \text{и} \quad AC = CA = I_n$$

$$BA = I_n \Big/ \cdot C \implies B\underbrace{AC}_{I_n} = I_n \cdot C = C \implies B = C \quad \boxtimes$$

Став Ако постоји A^{-1}, онда је $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

Задаци

1. Одредити инверзне матрица

(а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$, (б) $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, (в) $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, (г) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

решење (а) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 5 - 7\cdot 3 = -16 \neq 0$, па постоји A^{-1} и рачунамо га по формули $A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A^T)^*$

Најпре, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $(A^T)^* = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

$M_{11} = 5$, $b_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 5$

$M_{12} = 3$, $b_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -3$

$M_{21} = 7$, $b_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -7$

$M_{22} = 1$, $b_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = 1$

Даље, $A^{-1} = \frac{1}{-16}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{16} & \frac{3}{16} \\ \frac{7}{16} & -\frac{1}{16} \end{pmatrix}$

(б) $\det B = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 - 2\cdot 3 = 0$, па не постоји B^{-1}.

(в) $\det C = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0\cdot 2 - 1\cdot(-1) = 1 \neq 0$, па постоји ${}^{-1}$ и

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C}(C^T)^*.$$

$C^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $(C^T)^* = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

$M_{11} = 2, \quad b_{11} = 2$

$M_{12} = -1, \quad b_{12} = 1$

$M_{21} = 1, \quad b_{21} = -1$

$M_{22} = 0, \quad b_{22} = 0$

Коначно, $\quad C^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

(г) D није квадратна матрица, па не постоји D^{-1}. ▨

2. Одредити инверз матрице $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ за $ad - bc \neq 0$.

решење $\det A = ad - bc \neq 0$, па постоји A^{-1} и

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \left(A^T\right)^*$$

$A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \quad \left(A^T\right)^* = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

$M_{11} = d \quad b_{11} = d$

$M_{12} = b \quad b_{12} = -b$

$M_{21} = c \quad b_{21} = -c$

$M_{22} = a \quad b_{22} = -a$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad ▨$$

ову формулу можемо памтити и користити на испиту.

3. Одредити инверз матрице

(а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 6 \\ 7 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, (б) $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 7 \end{pmatrix}$

решење

(а) $\det A = \left|\begin{matrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 6 \\ 7 & 1 & -2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & 0 \\ 5 & 0 \\ 7 & 1 \end{matrix} = 2\cdot0\cdot(-2)+0\cdot6\cdot7+1\cdot5\cdot1-7\cdot0\cdot1-1\cdot6\cdot2-(-2)\cdot5\cdot0 = -7 \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left(A^{T}\right)^{*}$$

$A^{T} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ $\left(A^{T}\right)^{*} = \left(b_{ij}\right)_{3\times3}$

$M_{11} = \left|\begin{matrix} 0 & 1 \\ 6 & -2 \end{matrix}\right| = 0\cdot(-2) - 6\cdot1 = -6$, $b_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = -6$

$M_{12} = \left|\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{matrix}\right| = 0\cdot(-2) - 1\cdot1 = -1$, $b_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = 1$

$M_{13} = \left|\begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 6 \end{matrix}\right| = 0\cdot6 - 1\cdot0 = 0$, $b_{13} = 0$

$M_{21} = \left|\begin{matrix} 5 & 7 \\ 6 & -2 \end{matrix}\right| = -52$, $b_{21} = 52$

$M_{22} = \left|\begin{matrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{matrix}\right| = -11$, $b_{22} = -11$

$M_{23} = \left|\begin{matrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{matrix}\right| = 7$, $b_{23} = -7$

$M_{31} = \left|\begin{matrix} 5 & 7 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right| = 5$, $b_{31} = 5$

$M_{32} = \left|\begin{matrix} 2 & 7 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right| = 2$, $b_{32} = -2$

$M_{33} = \left|\begin{matrix} 2 & 5 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right| = 0$, $b_{33} = 0$

Дакле, $A^{-1} = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} -6 & 1 & 0 \\ 52 & -11 & -7 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \\ -\frac{52}{7} & \frac{11}{7} & 1 \\ -\frac{5}{7} & \frac{2}{7} & 0 \end{pmatrix}$

(б) $\det B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \\ 2 & -5 \end{matrix} = -45 - 18 = -63 \neq 0$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \left(B^T\right)^*$$

$B^T = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $\quad \left(B^T\right)^* = \left(b_{ij}\right)_{3\times 3}$

$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 21$, $\quad b_{11} = 21$

$M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 15$, $\quad b_{12} = -15$

$M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9$, $\quad b_{13} = -9$

$M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 21$, $\quad b_{21} = -21$

$M_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -6$, $\quad b_{22} = -6$

$M_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9$, $\quad b_{23} = 9$

$M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -21$, $\quad b_{31} = -21$

$M_{32} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = 0$, $\quad b_{32} = 0$

$M_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$, $\quad b_{33} = 0$

$$B^{-1} = \frac{1}{-63}\begin{pmatrix} 21 & -15 & -9 \\ -21 & -6 & 9 \\ -21 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{21} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{21} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ▨$$

Крај задатака

Системи линеарних једначина

Пример Наћи најмање $a, b, c \in \mathbb{N}$ у реакцији

$$a H_2 + b O_2 \to c H_2O$$

$$\left.\begin{aligned} H &: 2a = 2c \Rightarrow a = c = 2b \\ O &: 2b = c \end{aligned}\right\}$$ систем 2 једначине са 3 непознате

a и c смо изразили преко b, па узмемо најмању вредност $b=1$ и имамо $a = c = 2b = 2$, тј.

$$2H_2 + O_2 \to 2H_2O$$

деф. Линеарна једначина са n непознатих је једначина облика

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$, а $x_1, \ldots, x_n$ су непознате

деф. Систем m линеарних једначина са n непознатих је

$$\left.\begin{aligned} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + \cdots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n &= b_m \end{aligned}\right\} (*)$$

где су $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$, а $x_1, \ldots, x_n$ су непознате

Коментар Углавном ћемо имати случај $m = n = 3$.

деф. Систем $(*)$ је хомоген ако је $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$.

деф. Решење система $(*)$ је свака n-торка $(x_1, \ldots, x_n)$ која задовољава све једначине у $(*)$

Скуп решења система (*) је

$$R = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m\}$$

Скуп R може бити: празан, једночлан или бесконачан.

Пример (1) $\begin{rcases} x+y=2 \\ x-y=0 \end{rcases}$ овај систем има 1 решење: $x=1, y=1$

(2) $\begin{rcases} x+y=3 \\ x+y=2 \end{rcases}$ овај систем нема решења (тј. $R=\emptyset$)

(3) $\begin{rcases} x+y=1 \\ x+y=1 \end{rcases}$ овај систем има бесконачно много решења:

$$x=a, \ y=1-a, \ a \in \mathbb{R}$$

деф. Матрица система (*) је $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$.

Матрица слободних коефицијената је $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m \times 1}$.

Матрица непознатих је $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n \times 1}$

Систем (*) краће пишемо: $A \cdot X = B$

Пример Дат је систем: $\begin{matrix} x+y=3 \\ 2x-3y=1 \end{matrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Шта значи $A \cdot X = B$?

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-3y \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B \iff \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} x+y=3 \\ 2x-3y=1 \end{matrix}$$

деф. Ако је $m=n$ у систему (*), онда дефинишемо **детерминанту система** (*) као $D \overset{def}{=} \det A$.

Пример Детерминанта система $\begin{array}{l} x+y=3 \\ 2x-3y=1 \end{array}$ је

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot(-3)-2\cdot 1=-5$$

Методе за решавање система

① **Метода замене** - из једне једначине изразимо једну непознату па заменимо у осталим

Пример

$$\begin{aligned} x+y+z&=12 \\ 2x-y+z&=-6 \\ x-2y-3z&=1 \end{aligned} \Rightarrow \boxed{x=2y+3z+1}$$

изразимо x из 3. једн. и убацимо у 1. и 2.

$$\left.\begin{aligned} (2y+3z+1)+y+z&=12 \\ 2(2y+3z+1)-y+z&=-6 \end{aligned}\right\} \text{средимо}$$

$$\begin{aligned} 3y+4z&=11 \\ 3y+7z&=-8 \end{aligned} \Rightarrow \boxed{y=\frac{-7z-8}{3}}$$

изразимо y из друге и убацимо у трећу

$$\left. 3\cdot\frac{-7z-8}{3}+4z=11 \right\} \text{средимо}$$

$$-3z=19$$

$$\boxed{z=-\frac{19}{3}}$$ - убацимо у y па у x

$$y=\frac{-7z-8}{3}=\frac{-7\cdot\left(-\frac{19}{3}\right)-8}{3}=\frac{109}{9}$$

$$x=2y+3z+1=2\cdot\frac{109}{9}+3\cdot\left(-\frac{19}{3}\right)+1=\frac{56}{9}$$

Систем има јединствено решење $(x, y, z) = \left(\frac{56}{9}, \frac{109}{9}, -\frac{19}{3}\right)$.

② Матрично решавање система

Овај метод користимо само у случају $m=n$ и $D \neq 0$.

$$A \cdot X = B \;/\; \cdot A^{-1} \text{ (са леве стране множимо)}$$

$$\underbrace{A^{-1} A}_{I_n} X = A^{-1} B$$

$$I_n \cdot X = A^{-1} B$$

$$\boxed{X = A^{-1} B}$$ - решење система

Пример Имамо исти систем од малопре:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 12 \\ 2x - y + z &= -6 \\ x - 2y - 3z &= 1 \end{aligned}$$

$m = n = 3$ ✓

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{matrix} = 3 + 1 - 4 + 1 + 2 + 6 = 9$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \det A = D$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \left(A^T\right)^* = \frac{1}{9} \cdot \left(A^T\right)^*$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad \left(A^T\right)^* = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 5$ $\quad b_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 5 = 5$

$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -1$ $\quad b_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-1) = 1$

$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$ $\quad b_{13} = 2$

$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -7$ $\quad b_{21} = 7$

$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -4$ $\quad b_{22} = -4$

$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$ $\quad b_{23} = 1$

$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -3$ $\quad b_{31} = -3$

$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3$ $\quad b_{32} = 3$

$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$ $\quad b_{33} = -3$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 7 & -4 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{7}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{7}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} \cdot 12 - \frac{1}{9} \cdot 6 + \frac{2}{9} \cdot 1 \\ \frac{7}{9} \cdot 12 + \frac{4}{9} \cdot 6 + \frac{1}{9} \cdot 1 \\ \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 12 - \frac{1}{3} \cdot 6 - \frac{1}{3} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{56}{9} \\ \frac{109}{9} \\ -\frac{19}{3} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ решење система је $(x, y, z) = \left(\frac{56}{9}, \frac{109}{9}, -\frac{19}{3}\right)$.

③ Крамерово правило

Овај метод такође користимо само у случају $m=n$ и $D \neq 0$.

Метод ћемо описати у случају $m=n=3$.

Дат је систем:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad D = \det A$$

дефинишемо још 3 детерминанте:

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ ← у A смо заменили прву колону са $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ ← замењена 2. колона

$$D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$ ← замењена 3. колона

Тада је решење система дато са:

$$\boxed{x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad z = \frac{D_z}{D}}$$

Пример

$$\begin{aligned} x + y + z &= 12 \\ 2x - y + z &= -6 \\ x - 2y - 3z &= 1 \end{aligned}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{matrix} = 3 + 1 - 4 + 1 + 2 + 6 = 9$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 12 & 1 & 1 \\ -6 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 12 & 1 \\ -6 & -1 \\ 1 & -2 \end{matrix} = 36 + 1 + 12 + 1 + 24 - 18 = 56$$

$$D_y = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 12 & 1 & 1 & 12 \\ 2 & -6 & 1 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right| = 18 + 12 + 2 + 6 - 1 + 72 = 109$$

$$D_z = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 12 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -6 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right| = -1 - 6 - 48 + 12 - 12 - 2 = -57$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{56}{9}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{109}{9}, \quad z = \frac{D_z}{D} = -\frac{57}{9} = -\frac{19}{3}$$

$\Rightarrow$ решење система је $(x, y, z) = \left(\frac{56}{9}, \frac{109}{9}, -\frac{19}{3}\right)$.