$$D_y = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 12 & 1 & 1 & 12 \\ 2 & -6 & 1 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right| = 18 + 12 + 2 + 6 - 1 + 72 = 109$$

$$D_z = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 12 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -6 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right| = -1 - 6 - 48 + 12 - 12 - 2 = -57$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{56}{9}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{109}{9}, \quad z = \frac{D_z}{D} = -\frac{57}{9} = -\frac{19}{3}$$

$\Rightarrow$ решење система је $(x, y, z) = \left(\frac{56}{9}, \frac{109}{9}, -\frac{19}{3}\right)$.

Пример Решити систем:

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 3 \\ 2y - 4z &= 6 \\ -3y + 6z &= -9 \end{aligned}$$

$$D = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & -3 \end{array}\right| = 24 - 24 = 0,$$ та морамо користити метод замене

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 3 \\ 2y - 4z &= 6 \\ -3y + 6z &= -9 \end{aligned} \Rightarrow \boxed{y = \frac{-9 - 6z}{-3} = 3 + 2z}$$ ← убацимо у 1. и 2.

$$\left.\begin{aligned} 2x + (3 + 2z) - z &= 3 \\ 2(3 + 2z) - 4z &= 6 \end{aligned}\right\} \text{ средимо}$$

$$2x + z = 0 \Rightarrow \boxed{z = -2x}$$

$6 = 6$ – увек тачно

Систем има бесконачно много решења:

$x = a \in \mathbb{R}$, $z = -2a$, $y = 3 - 4a$, тј.

$R = \{(a, 3 - 4a, -2a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ – скуп решења

Пример Решити систем:
$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 3 \\ 2y - 4z &= 6 \\ -3y + 6z &= 0 \end{aligned}$$

$$D = \left|\begin{matrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 6 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & -3 \end{matrix} = 24 - 24 = 0,$$ па морамо користити метод замене

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 3 \\ 2y - 4z &= 6 \\ -3y + 6z &= 0 \end{aligned} \Rightarrow y = 2z$$

$$\left.\begin{aligned} 2x + 2z - z &= 3 \\ 2 \cdot 2z - 4z &= 6 \end{aligned}\right\} \text{сводимо}$$

$$2x + z = 3$$

$$0 = 6 \text{ – немогуће}$$

$\Rightarrow$ дати систем нема решење

Задаци

1. Решити системе

(а) $$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

(б) $$\begin{aligned} -x - y + z &= 1 \\ 3x - 12z &= 0 \\ 4y + z &= 3 \end{aligned}$$

решење (а)
$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ x + y &= 2 \Rightarrow \boxed{y = 2 - x} \end{aligned}$$

$$2x + 3(2 - x) + z = 1$$

$$-x + z = -5 \Rightarrow \boxed{x = z + 5}$$

$z = t \in \mathbb{R}$ – произвољно

$x = t + 5, \quad y = 2 - (t + 5) = -t - 3$

Систем има бесконачно много решења:

$(x, y, z) = (t + 5, -t - 3, t), \quad t \in \mathbb{R}$

(б) $-x-y+z=1$
$3x \quad -12z=0$
$4y+z=3$

$$D=\left|\begin{array}{ccc|cc} -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -12 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right| = 12-48+3=-33 \neq 0$$

Користимо Крамерово правило

$$D_x=\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right| = 36+48=84$$

$$D_y=\left|\begin{array}{ccc|cc} -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -12 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right| = 9-36-3=-30$$

$$D_z=\left|\begin{array}{ccc|cc} -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 4 \end{array}\right| = 12+9=21$$

$\Rightarrow$ Имамо јединствено решење

$$x=\frac{D_x}{D}=-\frac{84}{33}=-\frac{28}{11}, \quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{30}{33}=\frac{10}{11}, \quad z=\frac{D_z}{D}=-\frac{21}{33}=-\frac{7}{11}$$

2. У зависности од параметра $a \in \mathbb{R}$ решити систем

(а) $ax+y=1$
$4x+ay=2$

(б) $x+y=1$
$x+2y=3$
$ax+y=1$

(в) $x+2y+az=1$
$x-y-z=0$
$x+y+z=a$

решење (а) $ax+y=1 \Rightarrow \boxed{y=1-ax}$

$4x+ay=2$

$4x+a(1-ax)=2$ } средимо

$x(4-a^2)=2-a$

$x(2-a)(2+a)=2-a$

Ако је $(2-a)(2+a)\neq 0$, онда можемо да поделимо све са тим, а ако је $(2-a)(2+a)=0$ не можемо, па имамо 3 случаја

$1^\circ \quad a=2$

$x(2-a)(2+a)=2-a$ постаје $x\cdot 0\cdot 4=0$, тј. $0=0$ ✓

$\Rightarrow$ x може бити било шта, тј. $x=t\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow y=1-ax=1-2t$

Добили смо бесконачно много решења:

$$(x,y)=(t,1-2t),\quad t\in\mathbb{R}.$$

$2^\circ \quad a=-2$

$x(2-a)(2+a)=2-a$ постаје $x\cdot 4\cdot 0=4$, тј. $0=4$ што је немогуће па систем у овом случају нема решења

$3^\circ \quad a\neq 2$ и $a\neq -2$

$$x(2-a)(2+a)=2-a \quad /:(2-a)(2+a)$$

$$x=\frac{2-a}{(2-a)(2+a)}=\frac{1}{2+a}$$

$$y=1-ax=1-a\cdot\frac{1}{2+a}=\frac{2+a-a}{2+a}=\frac{2}{2+a}$$

Систем има јединствено решење:

$$(x,y)=\left(\frac{1}{2+a},\frac{2}{2+a}\right).$$

(б)

$$x+y=1 \Rightarrow \boxed{x=1-y}$$
$$x+2y=3$$
$$ax+y=1$$

$$\left.\begin{aligned}(1-y)+2y&=3\\ a(1-y)+y&=1\end{aligned}\right\}\ \text{средимо}$$

$$\boxed{y=2}$$
$$(1-a)y=1-a$$

ако је $1-a\neq 0$ можемо да делимо са $1-a$, а ако није не можемо

1° $1-a \neq 0$, тј. $a \neq 1$

$(1-a)y = 1-a \quad /:(1-a)$

$y = \frac{1-a}{1-a} = 1$, али добили смо $y=2$

$\Rightarrow$ систем нема решења

2° $1-a=0$, тј. $a=1$

$(1-a)y = 1-a$ постаје $0\cdot y = 0$, тј. $0=0$ W

Дакле, $y=2$ и $x = 1-y = -1$, па имамо јединствено решење $(x,y) = (-1,2)$

(b)
$$x+2y+az=1$$
$$x-y-z=0 \Rightarrow \boxed{x=y+z}$$
$$x+y+z=a$$

$$\left.\begin{aligned}(y+z)+2y+az&=1\\(y+z)+y+z&=a\end{aligned}\right\}\text{ средимо}$$

$$3y+(a+1)z=1$$
$$2y+2z=a \Rightarrow \boxed{y=\frac{a-2z}{2}=\frac{a}{2}-z}$$

$$3\left(\frac{a}{2}-z\right)+(a+1)z=1$$

$$(a-2)z = 1-\frac{3a}{2}$$

1° $a=2$

$(a-2)z = 1-\frac{3a}{2}$ постаје $0\cdot z = -2$, тј. $0=-2$, па у овом случају нема решења

2° $a \neq 2$

$(a-2)z = 1-\frac{3a}{2} \quad /:(a-2)$

$$z = \frac{1-\frac{3a}{2}}{a-2} = \frac{\frac{2-3a}{2}}{a-2} = \frac{2-3a}{2(a-2)}$$

$$y = \frac{a}{2} - z = \frac{a}{2} - \frac{2-3a}{2(a-2)} = \frac{a(a-2)}{2(a-2)} - \frac{2-3a}{2(a-2)} = \frac{a^2+a-2}{2(a-2)}$$

$$x = y+z = \frac{a^2+a-2}{2(a-2)} + \frac{2-3a}{2(a-2)} = \frac{a^2-2a}{2(a-2)} = \frac{a(a-2)}{2(a-2)} = \frac{a}{2}$$

Добили смо јединствено решење:

$$(x, y, z) = \left(\frac{a}{2}, \frac{a^2+a-2}{2(a-2)}, \frac{2-3a}{2(a-2)}\right)$$

3. Одредити непознате коефицијенте у реакцијама:

(а) $x\,NH_3 + 10\,O_2 \rightarrow y\,NO + z\,H_2O$

(б) $x\,H_2O_2 \rightarrow 3\,H_2O + y\,O_2$

(в) $2\,C_{18}H_{38} + x\,O_2 \rightarrow y\,CO_2 + z\,H_2O$

решење (а)

$N: \quad x = y$

$H: \quad 3x = 2z$

$O: \quad 20 = y + z$

Дакле имамо систем:

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \Rightarrow \boxed{x = y} \\ 3x - 2z &= 0 \\ y + z &= 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3y - 2z &= 0 \\ y + z &= 20 \Rightarrow \boxed{y = 20 - z} \end{aligned}$$

$$3(20 - z) - 2z = 0$$

$$-5z = -60$$

$$\boxed{z = 12}$$

$y = 20 - z = 8, \quad x = y = 8$

Коначно: $8\,NH_3 + 10\,O_2 \rightarrow 8\,NO + 12\,H_2O$

(б) $x\,H_2O_2 \rightarrow 3\,H_2O + y\,O_2$

H: $2x = 6 \Rightarrow \boxed{x=3}$

O: $2x = 3 + 2y \Rightarrow 2y = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$ - није цео број

$\Rightarrow$ нема решења

(в) $2\,C_{18}H_{38} + x\,O_2 \rightarrow y\,CO_2 + z\,H_2O$

C: $\boxed{36 = y}$

H: $76 = 2z \Rightarrow \boxed{z = 38}$

O: $2x = 2y + z \Rightarrow x = \dfrac{2 \cdot 36 + 38}{2} = 55$

Коначно: $2\,C_{18}H_{38} + 55O_2 \rightarrow 36\,CO_2 + 38\,H_2O$

4. Решити систем
$$\begin{aligned} x+y+z&=6\\ 2x-y+z&=3\\ x+2y-z&=2 \end{aligned}$$

(а) методом замене;

(б) матричном методом;

(в) Крамеровим правилом.

решење (а)
$$\begin{aligned} x+y+z&=6 \Rightarrow \boxed{z = 6-x-y}\\ 2x-y+z&=3\\ x+2y-z&=2 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x-y+(6-x-y)&=3\\ x+2y-(6-x-y)&=2 \end{aligned}\right\}\ \text{средимо}$$

$$\begin{aligned} x-2y&=-3 \Rightarrow \boxed{x=2y-3}\\ 2x+3y&=8 \end{aligned}$$

$$2(2y-3)+3y=8$$

$$7y=14 \Rightarrow \boxed{y=2}$$

$x = 2y - 3 = 2\cdot 2 - 3 = 1$

$z = 6 - x - y = 6 - 1 - 2 = 3$

Систем има јединствено решење:

$(x, y, z) = (1, 2, 3)$

(б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Тражимо A^{-1}.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{matrix} = 1 + 1 + 4 + 1 - 2 + 2 = 7 \neq 0 \checkmark$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (A^T)^* = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$b_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$

$b_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-3) = 3$

$b_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$

$b_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-3) = 3$

$b_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$

$b_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(-1) = 1$

$b_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5$

$b_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(-1) = 1$

$b_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$

$$(A^T)^* = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A^T)^* = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{5}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{5}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{7} + \frac{9}{7} + \frac{4}{7} \\ \frac{18}{7} - \frac{6}{7} + \frac{2}{7} \\ \frac{30}{7} + \frac{3}{7} - \frac{6}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad (x, y, z) = (1, 2, 3)$$

(b) $$D = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 7$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 6 + 2 + 6 + 2 - 12 + 3 = 7$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 6 + 4 - 3 - 2 + 12 = 14$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 3 + 24 + 6 - 6 - 4 = 21$$

$$x = \frac{D_x}{D} = 1, \qquad y = \frac{D_y}{D} = 2, \qquad z = \frac{D_z}{D} = 3$$

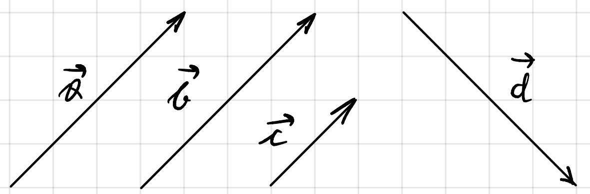
Крај задатака

АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

Вектори

деф. Вектор у $\mathbb{R}^3$ је оријентисана дуж. Сваки вектор одређен је својим правцем, смером и интензитетом (дужином). Векторе означавамо са $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$ или помоћу почетне и крајње тачке, нпр. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \dots$ Интензитет вектора $\vec{a}$ означавамо са $|\vec{a}|$. Два вектора су једнака ако су паралелни, истог смера и дужине.

Пример



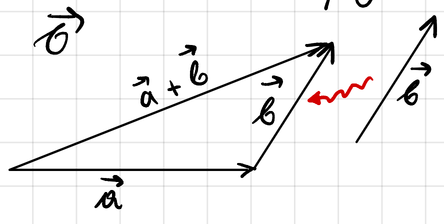
$$\vec{a} = \vec{b}$$
$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{d}|$$
$$\vec{a} \neq \vec{c}$$
$$\vec{a} \neq \vec{d}$$
$$\vec{c} \neq \vec{d}$$

деф. Нула вектор је вектор произвољног правца и смера и интензитета 0. Означава се са $\vec{0}$.

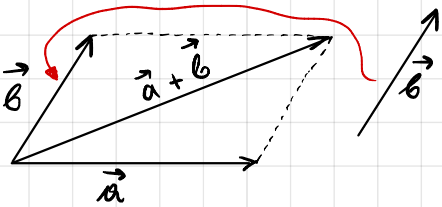
Операције са векторима

① Сабирање вектора

Векторе $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сабирамо тако што транслирамо вектор $\vec{b}$ тд. се почетак од $\vec{b}$ и крај од $\vec{a}$ поклапају. Тада је збир $\vec{a} + \vec{b}$ једнак вектору који спаја почетак од $\vec{a}$ и крај од $\vec{b}$.

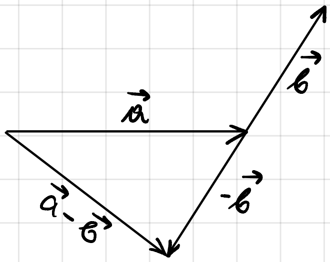


Алтернативно, транслирамо $\vec{b}$ тако да се почеци од $\vec{a}$ и $\vec{b}$ поклапају и онда је $\vec{a}+\vec{b}$ дијагонала паралелограма који одређују $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и која има исти почетак као $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



② Одузимање вектора

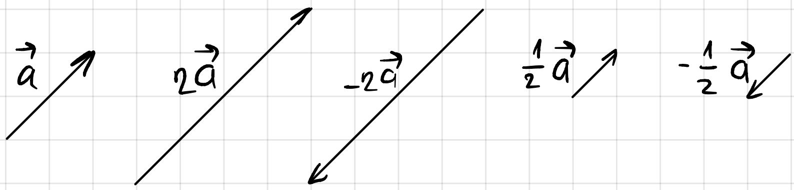
Вектор $-\vec{b}$ има исти правац и интензитет, али супротан смер од $\vec{b}$, па $\vec{a}-\vec{b}$ дефинишемо као $\vec{a}+(-\vec{b})$.



③ Множење вектора скаларом (бројем) $k\in\mathbb{R}$

Вектор $k\cdot\vec{a}$ је вектор који има исти правац као $\vec{a}$, интензитет му је $k\cdot|\vec{a}|$ и има исти смер као $\vec{a}$ ако је $k>0$, а супротан ако је $k<0$.

нпр.



Став За произвољне векторе $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ важи

(1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (комутативност)

(2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (асоцијативност)

Став Нека су $\vec{a}, \vec{b}$ вектори и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Тада

(1) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

(2) $-\vec{a} = (-1) \cdot \vec{a}$

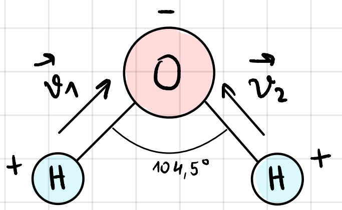
(3) $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$

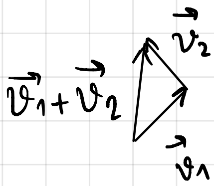
(4) $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{a}$

(5) $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$

(6) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$

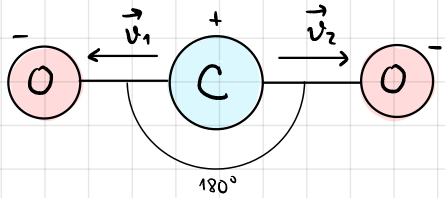
Пример (1)





Како је $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \neq \vec{0}$, молекул H_2O је поларан

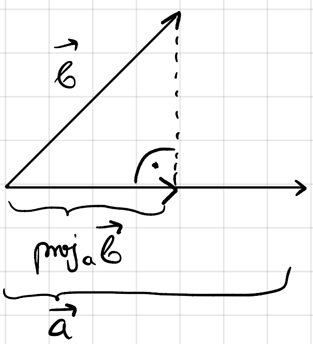
(2)



Овде је $\vec{v}_2 = -\vec{v}_1$, па је
$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_1 - \vec{v}_1 = \vec{0},$$
па CO_2 није поларан

Разлагање вектора

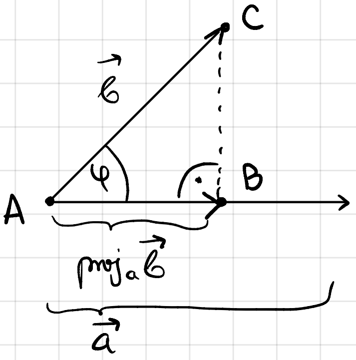
Ортогонална пројекција вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$ је вектор $proj_a \vec{b}$:



- доведемо $\vec{a}$ и $\vec{b}$ у исти почетак
- спустимо нормалу из краја од $\vec{b}$ на $\vec{a}$
- подножје нормале је крај вектора $proj_a \vec{b}$, а почетак је исти као почетак од $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Став Нека су $\vec{a}, \vec{b}$ вектори и φ угао између $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
Тада је интензитет од $proj_a \vec{b}$ једнак $|\vec{b}| \cdot \cos\varphi$.

доказ:



Посматрамо троугао ABC.
По дефиницији косинуса је

$$\cos\varphi = \frac{|proj_a \vec{b}|}{|\vec{b}|} = \frac{\text{налегла катета}}{\text{хипотенуза}}$$

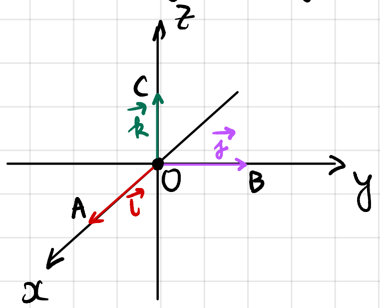
је $|proj_a \vec{b}| = |\vec{b}| \cos\varphi$. ▨

Став Нека су $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ вектори и $\lambda \in \mathbb{R}$. Тада

(1) $proj_c(\vec{a}+\vec{b}) = proj_c \vec{a} + proj_c \vec{b}$,

(2) $proj_a(\lambda \vec{b}) = \lambda \, proj_a \vec{b}$.

деф. Нека су $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ јединични вектори на x, y одн. z оси:



тј. ако означимо тачке

$A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$, $O(0,0,0)$,

онда $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{k} = \overrightarrow{OC}$

Нека је $M(x,y,z)$ произвољна тачка у $\mathbb{R}^3$.
Вектор $\overrightarrow{OM}$ разложимо на компоненте на следећи начин:

$$\overrightarrow{OM} = |proj_{\vec{i}} \overrightarrow{OM}| \cdot \vec{i} + |proj_{\vec{j}} \overrightarrow{OM}| \cdot \vec{j} + |proj_{\vec{k}} \overrightarrow{OM}| \cdot \vec{k}$$

Испоставља се да је

$$\left.\begin{array}{l} |proj_{\vec{i}} \overrightarrow{OM}| = x \\ |proj_{\vec{j}} \overrightarrow{OM}| = y \\ |proj_{\vec{k}} \overrightarrow{OM}| = z \end{array}\right\}$$

добију се баш координате тачке M

тј. $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ што краће пишемо:

$$\overrightarrow{OM} = (x, y, z).$$

Дакле, на овај начин идентификујемо вектор $\overrightarrow{OM}$ са тачком M (која је крај тог вектора).

Операције са векторима:

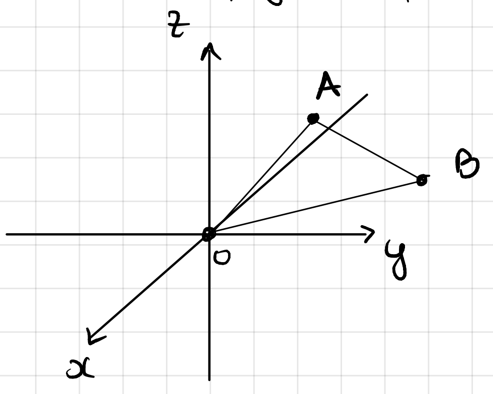
- сабирање $(a,b,c) + (d,e,f) = (a+d,\ b+e,\ c+f)$
- одузимање $(a,b,c) - (d,e,f) = (a-d,\ b-e,\ c-f)$
- множење скаларом $k(a,b,c) = (ka,\ kb,\ kc)$

Став Ако је $\vec{v} = (x,y,z)$, онда је $|\vec{v}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Пример За $\vec{a} = (1,2,3)$, $\vec{b} = (-2,-1,7)$ израчунати:
$\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $2\vec{a}$, $2\vec{a}-3\vec{b}$, $|2\vec{a}-3\vec{b}|$

$$\vec{a}+\vec{b} = (1,2,3)+(-2,-1,7) = (1-2,\ 2-1,\ 3+7) = (-1,1,10)$$
$$\vec{a}-\vec{b} = (1,2,3)-(-2,-1,7) = (1-(-2),\ 2-(-1),\ 3-7) = (3,3,-4)$$
$$2\vec{a} = 2(1,2,3) = (2,4,6)$$
$$2\vec{a}-3\vec{b} = 2(1,2,3)-3(-2,-1,7) = (2,4,6)-(-6,-3,21) = (8,7,-15)$$
$$|2\vec{a}-3\vec{b}| = \sqrt{8^2+7^2+(-15)^2} = \sqrt{338} = 13\sqrt{2}$$

Пример Одредити растојање тачака $A(-1,3,4)$ и $B(0,6,2)$



Растојање је $|\overrightarrow{AB}|$, а са слике видимо да је $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (0,6,2)-(-1,3,4) = (1,3,-2)$, па је $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2+3^2+(-2)^2} = \sqrt{14}$

Скаларни, векторски и мешовити производ

деф. Нека су $\vec{a}, \vec{b}$ ненула вектори и φ угао између њих.
Скаларни производ $\vec{a}$ и $\vec{b}$ је

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \overset{def}{=} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$$

(резултат је број, тј. скалар).

Пример $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$, $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$

Ова три вектора су на x, y и z-оси па су углови између њих 90°.

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \cos 90^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$\vec{j} \cdot \vec{k} = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$\vec{k} \cdot \vec{i} = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}| \cdot |\vec{i}| \cdot \cos 0^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$\vec{j} \cdot \vec{j} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$\vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$