Слично,

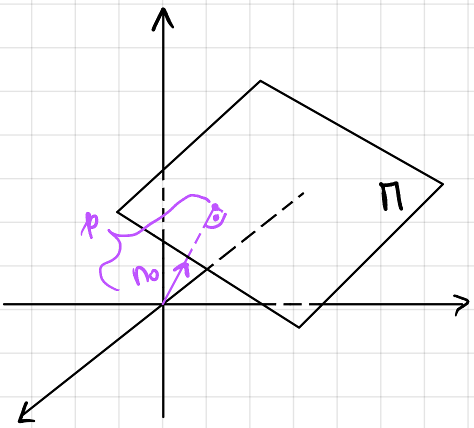
$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{AD} = \vec{OA} + \frac{2}{3}\left(\vec{AO} + \vec{OD}\right) =$$

$$= \vec{OA} + \frac{2}{3}\left(\vec{OD} - \vec{OA}\right) = \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{OD} = \frac{1}{3}(1,0,1) + \frac{2}{3}(3,3,7) =$$

$$= \left(\frac{1}{3}+2,\ 0+2,\ \frac{1}{3}+\frac{14}{3}\right) = \left(\frac{7}{3}, 2, 5\right) \quad \blacksquare$$

Крај задатака

Раван



Раван Π јединствено је одређена дужином нормале из O на Π (означимо ту дужину са p) и јединичним вектором $n_0 = (a, b, c)$ те нормале.

Нормални облик једначине равни Π је:

$$ax + by + cz - p = 0,$$

Општи облик једначине равни Π је

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где је $(A,B,C) = \alpha \cdot \vec{n_0}$, за неко $\alpha \neq 0$ и $D = -\frac{p}{\alpha}$ (тј. општи облик је кад помножимо нормални облик са α).

Ако је $M(x,y,z)$ произвољна тачка на Π и $\vec{r} = (x,y,z)$ њен вектор положаја, добијамо и векторски облик једначине равни:

$$\vec{r} \cdot \vec{n_0} - p = 0.$$

Пример Одредити раван Π чији је јединични вектор нормале дат са $\vec{n_0} = \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right)$ и која је на растојању 10 од O.

$$\Pi: \quad \vec{r} \cdot \vec{n_0} - 10 = 0$$

$$(x, y, z) \cdot \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right) - 10 = 0$$

$$\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y + \frac{6}{7}z - 10 = 0 \leftarrow \text{нормални облик}$$

Пример Једначину равни $3x + 6y - 2z + 21 = 0$ записати у нормалном облику.

$$\vec{n} = (3, 6, -2)$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{3^2 + 6^2 + (-2)^2} = 7$$

Зато једначину делимо са -7

$$3x + 6y - 2z + 21 = 0 \quad / : (-7)$$

$$-\frac{3}{7}x - \frac{6}{7}y + \frac{2}{7}z - 3 = 0 \quad - \text{нормални облик}$$

Дакле $\vec{n_0} = \left(-\frac{3}{7}, -\frac{6}{7}, \frac{2}{7}\right)$, $p = 3$

Векторски облик: $\vec{r} \cdot \vec{n_0} - p = 0$, тј.

$$(x, y, z) \cdot \left(-\frac{3}{7}, -\frac{6}{7}, \frac{2}{7}\right) - 3 = 0$$

Раван можемо задати и нормалом $\vec{n}$ и тачком $M(x_0, y_0, z_0) \in \Pi$. Означимо $\vec{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$. Тада је једначине равни дате са:

$$(\vec{r} - \vec{r_0}) \cdot \vec{n} = 0$$

Пример Одредити нормални облик једначине равни које садржи тачку $M(2,17,3)$ и нормални је на вектор $\vec{n} = (2,2,5)$.

$$\Pi: \quad (\vec{r} - \vec{r_0}) \cdot \vec{n} = 0$$

$$((x,y,z) - (2,17,3)) \cdot (2,2,5) = 0$$

$$(x-2, y-17, z-3) \cdot (2,2,5) = 0$$

$$2(x-2) + 2(y-17) + 5(z-3) = 0$$

$$2x + 2y + 5z - 53 = 0$$

$|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{33}$ па делимо са $\sqrt{33}$

$\Pi: \dfrac{2}{\sqrt{33}} x + \dfrac{2}{\sqrt{33}} y + \dfrac{5}{\sqrt{33}} z - \dfrac{53}{\sqrt{33}} = 0$ - нормални облик

Пример Одредити раван Π које је паралелне равни $\Gamma: 2x - 3y + 4z - 1 = 0$ и садржи тачку $M(-1,-2,3)$.

$\Gamma \parallel \Pi \Rightarrow$ вектори нормала су им исти $\vec{n} = (2,-3,4)$

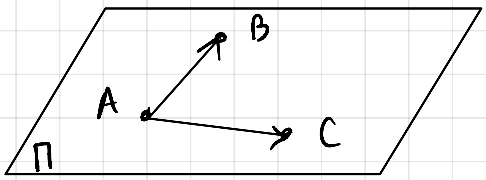
$$\Pi: \quad (\vec{r} - \vec{r_0}) \cdot \vec{n} = 0$$

$$((x,y,z) - (-1,-2,3)) \cdot (2,-3,4) = 0$$

$$(x+1, y+2, z-3)\cdot(2,-3,4)=0$$

$$2x-3y+4z-16=0$$ — општи облик

Пример Одредити једначину равни Π одређену тачкама $A(1,2,3)$, $B(4,-1,-2)$, $C(4,0,3)$.



знамо да је $\vec{AB}\times\vec{AC}$ нормалан на $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$, па је то вектор нормале од Π.

$$\vec{AB}=\vec{AO}+\vec{OB}=\vec{OB}-\vec{OA}=(4,-1,-2)-(1,2,3)=(3,-3,-5)$$

$$\vec{AC}=\vec{AO}+\vec{OC}=\vec{OC}-\vec{OA}=(4,0,3)-(1,2,3)=(3,-2,0)$$

$$\vec{n}=\vec{AB}\times\vec{AC}=\left|\begin{array}{ccc|cc}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j}\\ 3 & -3 & -5 & 3 & -3\\ 3 & -2 & 0 & 3 & -2\end{array}\right|=-15\vec{j}-6\vec{k}+9\vec{k}-10\vec{i}=(-10,-15,3)$$

Нека је $\vec{r_0}=\vec{OA}$

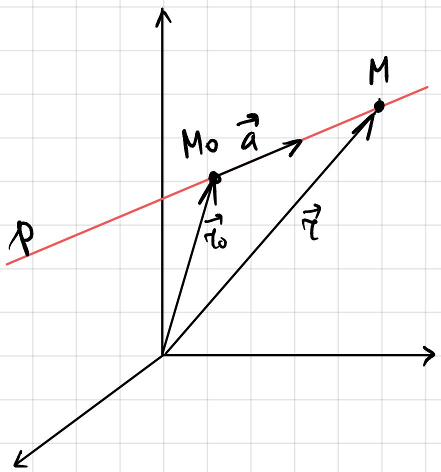
$$\Pi:\ (\vec{r}-\vec{r_0})\cdot\vec{n}=0$$

$$\big((x,y,z)-(1,2,3)\big)\cdot(-10,-15,3)=0$$

$$(x-1,y-2,z-3)\cdot(-10,-15,3)=0$$

$$-10x-15y+3z+31=0$$ — општи облик.

Праве



Права p одређена је једном својом тачком $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектором $\vec{a} = (l, m, n)$ коме је паралелна. Нека је $\vec{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$ вектор положаја тачке M_0, а $\vec{r} = (x, y, z)$ вектор положаја произвољне тачке $M \in p$.

Вектор $\overrightarrow{M_0M}$ је паралелан са $\vec{a}$, па је $\overrightarrow{M_0M} = t \cdot \vec{a}$ за неко $t \in \mathbb{R}$. Са слике имамо:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M}$$

одакле добијамо векторску једначину праве:

$$\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{a}$$

Скаларне једначине добијемо када векторе представимо координатама:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(l, m, n),$$

тј. параметарске једначине праве су:

$$x = x_0 + tl$$

$$y = y_0 + tm$$

$$z = z_0 + tn$$

Канонска једначина праве је:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

(само за $l, m, n \neq 0$)

Пример Нека је p права која пролази кроз $M_0(1,2,3)$ и има вектор правца $\vec{a}=(1,4,-2)$. Одредити векторску, канонску и параметарске једначине праве p.

векторска: $\vec{r_0}=(1,2,3)$, $\vec{r}=(x,y,z)$

$$\vec{r}=\vec{r_0}+t\vec{a},\quad t\in\mathbb{R}$$

$$(x,y,z)=(1,2,3)+t(1,4,-2)$$

параметарске:

$$x=1+t$$
$$y=2+4t$$
$$z=3-2t$$

канонска: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{-2}$

Пример Одредити три облика једначине праве p која пролази кроз тачке $A(2,7,0)$ и $B(3,5,-1)$.

Узмимо $\vec{r_0}=\vec{OA}=(2,7,0)$ и $\vec{a}=\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=(1,-2,-1)$

векторски: $\vec{r}=\vec{r_0}+t\vec{a}$

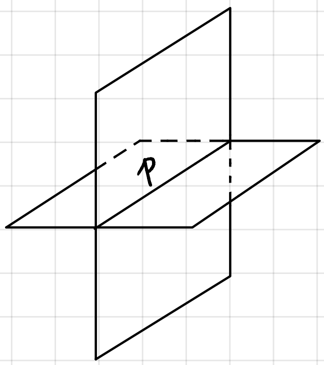
$$(x,y,z)=(2,7,0)+t(1,-2,-1)$$

параметарски:

$$x=2+t$$
$$y=7-2t$$
$$z=-t$$

канонски: $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-7}{-2}=\dfrac{z}{-1}$

Пример Одредити једначину праве p која је у пресеку равни $3x-y+2z-7=0$ и $x+3y-2z+3=0$.



Означимо ове равни са Π и Γ и њихове векторе нормала са $\vec{n}_\Pi=(3,-1,2)$ и $\vec{n}_\Gamma=(1,3,-2)$.

Права p је нормална и на $\vec{n}_\Pi$ и на $\vec{n}_\Gamma$, па је њен правац

$$\vec{a}=\vec{n}_\Pi\times\vec{n}_\Gamma=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 2\\ 1 & 3 & -2\end{vmatrix}\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j}\\ 3 & -1\\ 1 & 3\end{matrix}=2\vec{i}+2\vec{j}+9\vec{k}+\vec{k}-6\vec{i}+6\vec{j}=$$

$$=-4\vec{i}+8\vec{j}+10\vec{k}=(-4,8,10)$$

Треба нам још произвољна тачка са $p=\Pi\cap\Gamma$, па решавамо систем

$$3x-y+2z-7=0 \Rightarrow y=3x+2z-7$$
$$x+3y-2z+3=0$$

$$x+3(3x+2z-7)-2z+3=0$$

$$10x+4z=18 \Rightarrow z=\frac{18-10x}{4}$$

Овај систем има бесконачно много решења:

$$x=\alpha\in\mathbb{R}$$
$$z=\frac{18-10\alpha}{4}$$
$$y=3\alpha+\frac{18-10\alpha}{2}-7$$

па узмемо произвољно α да добијемо једну тачку са p.
Нпр. $\alpha=1$.

$$x=1,\quad y=3\cdot 1+\frac{18-10}{2}-7=0,\quad z=\frac{18-10}{4}=2$$

Дакле, $M_0(1,0,2)\in p$ и правац од p је $\vec{a}=(-4,8,10)$, па је

$$p:\ \frac{x-1}{-4}=\frac{y}{8}=\frac{z-2}{10}.$$

II начин: одредимо 2 тачке $A,B\in p$ и онда као у претходном примеру.

Задаци

1. Дата су темена тетраедра $A(2,1,0)$, $B(1,3,5)$, $C(6,3,4)$, $D(0,-7,8)$. Одредити једначину праве која садржи ивицу AB и средину ивице CD.

решење Нека је E средиште од CD, тј.

$$\vec{OE}=\vec{OC}+\frac{1}{2}\cdot\vec{CD}=\vec{OC}+\frac{1}{2}(\vec{OD}-\vec{OC})=$$
$$=\frac{1}{2}\vec{OD}+\frac{1}{2}\vec{OC}=\frac{1}{2}(0,-7,8)+\frac{1}{2}(6,3,4)=(3,-2,6)$$

Дакле, $E(3,-2,6)$.

Како вектори $\vec{AB}$ и $\vec{AE}$ припадају равни, њен вектор нормале је $\vec{n}=\vec{AB}\times\vec{AE}$.

$$\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=(1,3,5)-(2,1,0)=(-1,2,5)$$
$$\vec{AE}=\vec{OE}-\vec{OA}=(3,-2,6)-(2,1,0)=(1,-3,6)$$

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-1&2&5\\1&-3&6\end{vmatrix}\begin{matrix}\vec{i}&\vec{j}\\-1&2\\1&-3\end{matrix}=27\vec{i}+11\vec{j}=(27,11,0).$$

Нека је $\vec{r}_0 = \vec{OA} = (2,1,0)$.

$$\Pi: \ (\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{n} = 0$$

$$\big((x,y,z)-(2,1,0)\big)\cdot(27,11,0)=0$$

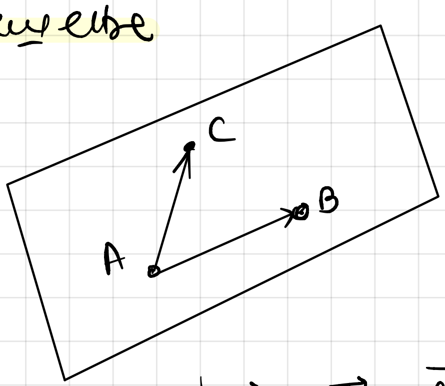
$$(x-2,\ y-1,\ z)\cdot(27,11,0)=0$$

$$27(x-2)+11(y-1)=0$$

$$27x+11y-65=0$$ − општи облик. $\blacksquare$

2. Одредити раван која садржи тачке $A(1,1,0)$, $B(0,0,1)$, $C(-1,3,-1)$.

решење



$$\vec{n} = \vec{AB}\times\vec{AC}$$

$$\vec{AB} = \vec{OB}-\vec{OA} = (0,0,1)-(1,1,0) = (-1,-1,1)$$

$$\vec{AC} = \vec{OC}-\vec{OA} = (-1,3,-1)-(1,1,0) = (-2,2,-1)$$

$$\vec{n} = \left|\begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right| = (-1,-3,-4)$$

Нека је $\vec{r}_0 = \vec{OA} = (1,1,0)$.

$$\Pi: \ (\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{n} = 0$$

$$\big((x,y,z)-(1,1,0)\big)\cdot(-1,-3,-4)=0$$

$$(x-1,\ y-1,\ z)\cdot(-1,-3,-4)=0$$

$$-(x-1)-3(y-1)-4z=0$$

$$-x-3y-4z+4=0$$ − општи облик $\blacksquare$

3. Одредити праву у пресеку равни $\Pi: x+y+z-1=0$
$\Gamma: 2x-y-3z+14=0$.

решење $p = \Pi \cap \Gamma$

$$\vec{n}_\Pi = (1,1,1), \quad \vec{n}_\Gamma = (2,-1,-3)$$

$$\vec{a} = \vec{n}_\Pi \times \vec{n}_\Gamma = \left|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{matrix} = (-2,5,-3)$$

правац од p

Одредимо једну тачку на $p = \Pi \cap \Gamma$:

$$\begin{aligned} x+y+z-1&=0 \\ 2x-y-3z+14&=0 \Rightarrow y = 2x-3z+14 \\ \hline 3x-2z+13&=0 \Rightarrow z = \frac{3x+13}{2} \end{aligned}$$

решење система: $(x,y,z) = \left(\alpha,\ 2\alpha - 3\cdot\frac{3\alpha+13}{2}+14,\ \frac{3\cdot\alpha+13}{2}\right)$

Нека је M_0 тачка за $\alpha = 1$:

$$\left(1,\ 2\cdot 1 - 3\cdot\frac{3\cdot 1+13}{2}+14,\ \frac{3\cdot 1+13}{2}\right) = (1,-8,8)$$

Дакле, $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0} = (1,-8,8)$, па је

$$p: \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + t\,\vec{a}$$

$$(x,y,z) = (1,-8,8) + t(-2,5,-3). \quad \blacksquare$$

ФУНКЦИЈЕ ВИШЕ ПРОМЕНЉИВИХ

Основне дефиниције и особине

До сада смо се сретали само са функцијама једне променљиве (нпр. $f(x)=x^2$, $f(x)=\sin x, \dots$), али функција може имати и више променљивих

Пример (1) $f(x,y)=x^2+y^2$

нпр. $f(0,1)=0^2+1^2=1$, $f(3,5)=3^2+5^2=34$

(2) $2NO+O_2 \to 2NO_2$

Експериментално је добијен закон брзине реакције:

$$r = k\cdot[NO]^2\cdot[O_2]$$

r је функција 2 променљиве – њене вредности зависе и од количине NO и од количине O_2.

„Математички" запис би био $r(x,y)=kx^2y$, где је x количина NO, а y O_2.

Пример Постоје и функције више од 2 променљиве, нпр.

$$f(x,y,z,t) = xy - z^2 + \sqrt{t}\cdot\sin x.$$

деф. Реална функција две променљиве је пресликавање $f: D\to\mathbb{R}$, где је $D\subseteq\mathbb{R}^2$.

деф. Нека је $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ и $M_0(x_0,y_0) \in D$. Гранична вредност (лимес) функције $f(x,y)$ у M_0 је $a \in \mathbb{R}$ ако

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall (x,y)\in D)\ \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y)-a| < \varepsilon.$$

Пишемо:
$$\lim_{(x,y)\to M_0} f(x,y) = a$$

деф. Функција $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ је непрекидна у $M_0(x_0,y_0) \in D$ ако је
$$\lim_{(x,y)\to M_0} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

Парцијални изводи

Ако у функцији $f(x,y)$ фиксирамо променљиву y, тј. узмемо $y=y_0$ = константа, онда је функција $g(x)=f(x,y_0)$ функција 1 променљиве и можемо јој одредити извод.

нпр. $f(x,y)=x^2+y^2$, $\quad g(x)=x^2+\underbrace{y_0^2}_{\text{неки број}} \Rightarrow g'(x)=2x$

Слично, можемо фиксирати $x=x_0$ и добити функцију по y: $h(y)=f(x_0,y) \Rightarrow h'(y)=2y$.

Ово су управо парцијални изводи.

деф. Парцијални извод функције $f(x,y)$ по x у тачки (x_0,y_0) је

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}.$$

Парцијални извод функције $f(x,y)$ по y у тачки

(x_0, y_0) је

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Пример (1) $f(x,y) = x^2 - 3xy + 8y - 5$

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{\text{замислимо да је } y \text{ константа}} = 2x - 3y, \quad \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{\text{замислимо да је } x \text{ константа}} = -3x + 8$$

(2) $f(x,y) = \ln(x^2 - xy)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x^2 - xy} \cdot (2x - y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2 - xy} \cdot (-x)$$

(3) $f(x,y) = \ln x - 2\sqrt{x-y} + \frac{1}{y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x} - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-y}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-y}} \cdot (-1) - \frac{1}{y^2}$$

Можемо рачунати и изводе вишег реда:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Користимо и ознаке: $f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f'_y = \frac{\partial f}{\partial y}$, $f''_{xy} = \frac{\partial f^2}{\partial x \partial y}$, итд.

Пример Одредити $f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{yy}$ за $f(x,y) = x^5 + xy - \ln(x+y)$

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 5x^4 + y - \frac{1}{x+y} \quad , \quad f'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = x - \frac{1}{x+y}$$

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(f'_x\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(5x^4 + y - \frac{1}{x+y}\right) = 20x^3 + \frac{1}{(x+y)^2}$$

$$f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(f'_y\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x - \frac{1}{x+y}\right) = 1 + \frac{1}{(x+y)^2}$$

$$f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(f'_x\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(5x^4 + y - \frac{1}{x+y}\right) = 1 + \frac{1}{(x+y)^2}$$

$$f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(f'_y\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x - \frac{1}{x+y}\right) = \frac{1}{(x+y)^2}$$

Пример За $f(x,y) = \sqrt{x^2+y} - \ln y$ одредити $f'_x(1,3)$ и $f''_{xy}(0,4)$.

Прво одредимо f'_x и f''_{xy}, па онда убацимо вредности.

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y}} \Rightarrow f'_x(1,3) = \frac{1}{\sqrt{1^2+3}} = \frac{1}{2}$$

$$f'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y}} - \frac{1}{y}$$

$$f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(f'_y\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x^2+y}}}_{\frac{1}{2}\cdot(x^2+y)^{-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(x^2+y)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x =$$

$$= \frac{-x}{2\sqrt{(x^2+y)^3}} \Rightarrow f''_{xy}(0,4) = \frac{-0}{2\sqrt{(0^2+4)^3}} = 0$$

Пример За $f(x,y,z) = xy + yz - z^3$ одредити све парцијалне изводе 2. реда.

$$f'_x = y, \quad f'_y = x + z, \quad f'_z = y - 3z^2$$

$$f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(f'_x) = 0, \quad f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}(f'_y) = 1, \quad f''_{xz} = \frac{\partial}{\partial x}(f'_z) = 0$$

$$f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial y}(f'_x) = 1, \quad f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(f'_y) = 0, \quad f''_{yz} = \frac{\partial}{\partial y}(f'_z) = 1$$

$$f''_{zx} = \frac{\partial}{\partial z}(f'_x) = 0, \quad f''_{zy} = \frac{\partial}{\partial z}(f'_y) = 1, \quad f''_{zz} = \frac{\partial}{\partial z}(f'_z) = 6z$$

Пример За $f(x,y,z) = \sqrt{xyz}$ одредити $f'''_{zyx}(1,2,8)$

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{yz}{2\sqrt{xyz}},$$

$$f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{yz}{2\sqrt{xyz}}\right) = \frac{z \cdot 2\sqrt{xyz} - yz \cdot \frac{1}{\sqrt{xyz}}}{4xyz} \begin{matrix} \cdot\sqrt{xyz} \\ \cdot\sqrt{xyz} \end{matrix} = \frac{2xyz^2 - yz}{4xyz\sqrt{xyz}} =$$

$$= \frac{\cancel{yz}(2xz-1)}{4x\cancel{yz}\sqrt{xyz}} = \frac{2xz-1}{4x\sqrt{xyz}}$$

$$f'''_{zyx} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2xz-1}{4x\sqrt{xyz}}\right) = \frac{2x \cdot 4x\sqrt{xyz} - (2xz-1)\cdot\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{xyz}}}{16x^3yz} \begin{matrix} \cdot\sqrt{xyz} \\ \cdot\sqrt{xyz} \end{matrix} =$$

$$= \frac{8x^3yz - x(2xz-1)}{16x^3yz\sqrt{xyz}} = \frac{x(8x^2yz - 2xz + 1)}{16x^3yz\sqrt{xyz}} =$$

$$= \frac{8x^2yz - 2xz + 1}{16x^2yz\sqrt{xyz}}$$

$128 - 16 + 1 = 113$

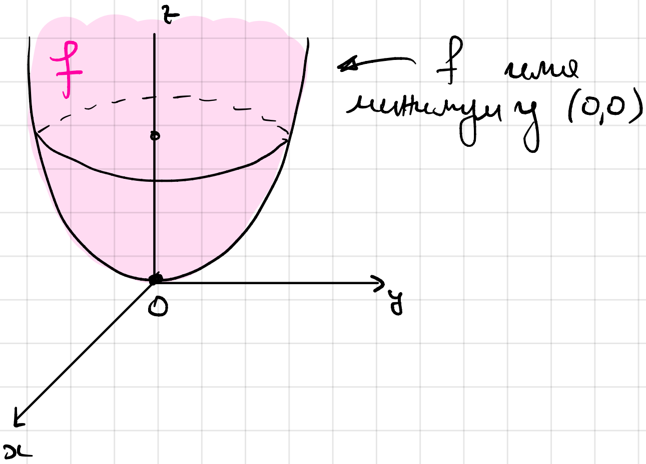
$$f'''_{zyx}(1,2,8) = \frac{8\cdot 1^2 \cdot 2 \cdot 8 - 2\cdot 1\cdot 8 + 1}{16\cdot 1^2\cdot 2\cdot 8\cdot\sqrt{1\cdot 2\cdot 8}} = \frac{113}{1024}$$

Локални екстремуми функције више променљивих

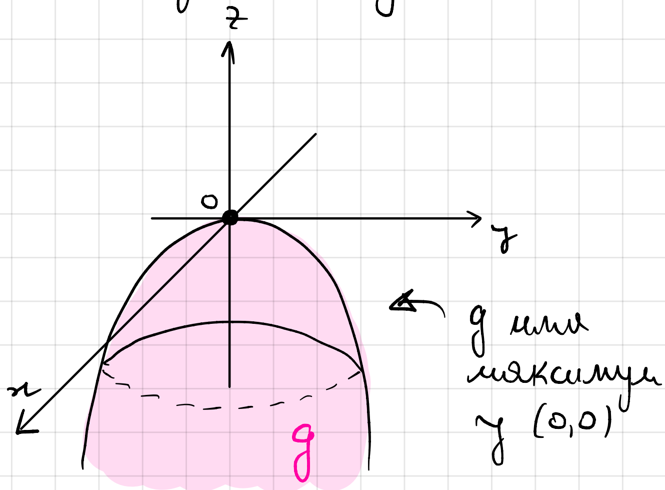
деф. Функција n променљивих $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ има локални максимум (минимум) у тачки $(a_1, \dots, a_n) \in D$ ако постоји околина U тачке $(a_1, \dots, a_n)$ тд. за свако $(x_1, \dots, x_n) \in U \subseteq D$ важи

$$f(x_1, \dots, x_n) \leq f(a_1, \dots, a_n) \quad \left(f(x_1, \dots, x_n) \geq f(a_1, \dots, a_n) \right).$$

Пример $f(x,y) = x^2 + y^2$



$g(x) = -x^2 - y^2$



деф. Нека је $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Тачка $(x_0, y_0) \in D$ тд.

$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{и} \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

зове се стационарна тачка функције f.

Стационарне тачке су кандидати за локалне екстремуме.

Пример $f(x,y) = x \cdot y$, $f'_x = y$, $f'_y = x$

$\Rightarrow$ $(0,0)$ је стационарна тачка.

Пример $f(x,y) = x^2 - y^2 + 3x + 4y + xy$

$$f'_x = 2x + 3 + y, \quad f'_y = -2y + 4 + x$$

Да би смо одредили стационарне тачке, решавамо систем

$$\begin{aligned} 2x + 3 + y &= 0 \Rightarrow y = -2x - 3 \\ -2y + 4 + x &= 0 \end{aligned}$$

$$-2(-2x-3) + 4 + x = 0$$

$$5x + 10 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow y = -7$$

$\Rightarrow (-2,-7)$ је стационарна тачка.

Теорема Нека је $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ и $(x_0,y_0) \in D$ стационарна тачка функције f и нека постоје сви парцијални изводи другог реда. Тада f има локални максимум у (x_0,y_0) ако је

$$f''_{xx}(x_0,y_0) < 0 \quad \text{и} \quad A = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0) \\ f''_{yx}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} > 0,$$

док f има локални минимум у (x_0,y_0) ако је

$$f''_{xx}(x_0,y_0) > 0 \quad \text{и} \quad A = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0) \\ f''_{yx}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} > 0.$$

Ако је $A < 0$, f нема лок. екстр. у (x_0,y_0), а ако је $A = 0$ не знамо да ли је (x_0,y_0) лок. екстремум.

Пример $f(x,y) = x^2 - y^2 + 3x + 4y + xy$

$$f'_x = 2x + 3 + y, \quad f'_y = -2y + 4 + x$$

У претходном примеру смо одредили да је $(-2,-7)$ стац. т.

$$f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(f'_x) = 2, \quad f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}(f'_y) = 1$$

$$f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial y}(f'_x) = 1, \quad f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(f'_y) = -2$$

$\Rightarrow A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 < 0$, па f нема лок. екстремум у $(-2,-7)$

Теорема Нека је $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$ и $(x_0, y_0, z_0) \in D$ стационарна тачка функције f и нека постоје сви парцијални изводи другог реда. Тада f има локални максимум у (x_0, y_0, z_0) ако је

$$f''_{xx}(x_0,y_0,z_0) < 0 \qquad A = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0,z_0) & f''_{xy}(x_0,y_0,z_0) \\ f''_{yx}(x_0,y_0,z_0) & f''_{yy}(x_0,y_0,z_0) \end{vmatrix} > 0$$

$$\text{и} \quad B = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0,z_0) & f''_{xy}(x_0,y_0,z_0) & f''_{xz}(x_0,y_0,z_0) \\ f''_{yx}(x_0,y_0,z_0) & f''_{yy}(x_0,y_0,z_0) & f''_{yz}(x_0,y_0,z_0) \\ f''_{zx}(x_0,y_0,z_0) & f''_{zy}(x_0,y_0,z_0) & f''_{zz}(x_0,y_0,z_0) \end{vmatrix} < 0$$

док f има локални минимум (x_0, y_0, z_0) ако је

$$f''_{xx}(x_0,y_0,z_0) > 0, \quad A > 0 \quad \text{и} \quad B > 0.$$

Ако је $A < 0$, f нема лок. екстр. у (x_0,y_0,z_0), а ако је $A = 0$ не знамо да ли је (x_0,y_0,z_0) лок. екстремум.

Пример $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z$

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2 \\ f'_y &= 2y - 6 = 0 \Rightarrow y = 3 \\ f'_z &= 2z + 2 = 0 \Rightarrow z = -1 \end{aligned}\right\} \quad (-2,3,-1) \text{ је стационарна тачка}$$

$f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(f'_x) = 2, \quad f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}(f'_y) = 0, \quad f''_{xz} = \frac{\partial}{\partial x}(f'_z) = 0$

$f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial y}(f'_x) = 0, \quad f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(f'_y) = 2, \quad f''_{yz} = \frac{\partial}{\partial y}(f'_z) = 0$

$f''_{zx} = \frac{\partial}{\partial z}(f'_x) = 0, \quad f''_{zy} = \frac{\partial}{\partial z}(f'_y) = 0, \quad f''_{zz} = \frac{\partial}{\partial z}(f'_z) = 2$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} A = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \\ B = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0 \\ f''_{xx}(-2,3,1) = 2 > 0 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ $(-2,3,-1)$ је тачка локалног минимума и он је једнак

$f(-2,3,-1) = (-2)^2 + 3^2 + (-1)^2 + 4\cdot(-2) - 6\cdot 3 + 2\cdot(-1) =$

$= -14$

Задаци

1. Испитати локалне екстремуме функције $f(x,y) = x^4 - x^2 - 2xy$

решење $f'_x = 4x^3 - 2x - 2y = 0, \quad f'_y = -2x = 0$

$\Rightarrow$ $(0,0)$ је стационарна тачка

$f''_{xx} = 12x^2 - 2, \quad f''_{xy} = -2, \quad f''_{yx} = -2, \quad f''_{yy} = 0$

$f''_{xx}(0,0) = 12\cdot 0^2 - 2 = -2$

$\Rightarrow A = \begin{vmatrix} f''_{xx}(0,0) & f''_{xy}(0,0) \\ f''_{yx}(0,0) & f''_{yy}(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0$, па

функција нема екстр. у $(0,0)$. ☒

2.) Испитати локалне екстремуме функције $f(x,y) = x \cdot \ln y + x$

решење $f'_x = \ln y + 1 = 0 \Rightarrow \ln y = -1 \Rightarrow y = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$f'_y = \frac{x}{y} = 0 \Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow \left(0, \frac{1}{e}\right)$ је стационарна тачка

$f''_{xx} = 0, \quad f''_{xy} = \frac{1}{y}, \quad f''_{yx} = \frac{1}{y}, \quad f''_{yy} = -\frac{x}{y^2}$

$f''_{xy}\left(0, \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{\frac{1}{e}} = e, \quad f''_{yx}\left(0, \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{\frac{1}{e}} = e, \quad f''_{yy}\left(0, \frac{1}{e}\right) = \frac{0}{\frac{1}{e}} = 0$

$A = \begin{vmatrix} 0 & e \\ e & 0 \end{vmatrix} = -e^2 < 0$ то $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ није екстремум ☒

3.) Испитати локалне екстремуме функције $f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.

решење $f'_x = 3x^2 - 6y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2$

$f'_y = 24y^2 - 6x = 0$

$24 \cdot \left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 - 6x = 0$

$24 \cdot \frac{1}{4}x^4 - 6x = 0$

$6x^4 - 6x = 0 \quad / : 6$

$x^4 - x = 0$

$x(x^3 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ или $x = \sqrt[3]{1} = 1$

$y = \frac{1}{2}x^2 = 0 \qquad y = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Имамо 2 стационарне тачке $(0,0)$ и $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

$f''_{xx} = 6x$, $f''_{xy} = -6$, $f''_{yx} = -6$, $f''_{yy} = 48y$

Прво испитујемо $(0,0)$:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = -36 < 0, \text{ па } (0,0) \text{ није екстремум}$$

Сада $(1, \frac{1}{2})$:

$$\left.\begin{aligned} A = \begin{vmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 24 \end{vmatrix} &= 108 > 0 \\ f''_{xx}\left(1, \tfrac{1}{2}\right) &= 6 > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$(1, \frac{1}{2})$ је тачка локалног минимума и тај мин. је $f(1, \frac{1}{2}) = 4$ ■

4. Испитати локалне екстремуме функције

$$f(x,y) = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$$

решење

$$f'_x = \sqrt{y} - 2x + 6 = 0$$

$$f'_y = \frac{x}{2\sqrt{y}} - 1 = 0 \Rightarrow x = 2\sqrt{y}$$

$$\sqrt{y} - 2 \cdot 2\sqrt{y} + 6 = 0$$

$$-3\sqrt{y} = -6$$

$$\sqrt{y} = 2 \quad /^2$$

$$y = 4 \Rightarrow x = 2\sqrt{y} = 4$$

Дакле, имамо једну стационарну тачку $(4,4)$.

$f''_{xx} = -2, \quad f''_{xy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad f''_{yx} = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad f''_{yy} = -\frac{x}{4y\sqrt{y}}$

$f''_{xy}(4,4) = f''_{yx}(4,4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$

$f''_{yy}(4,4) = -\frac{4}{4 \cdot 4 \cdot \sqrt{4}} = -\frac{1}{8}$

$A = \begin{vmatrix} -2 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{vmatrix} = \frac{3}{16} > 0$

$f''_{xx}(4,4) = -2 < 0$

$\Rightarrow$ $(4,4)$ је тачка лок. макс. и он је једнак $f(4,4) = 15$. ☐

(5.) Испитати локалне екстремуме функције $f(x,y) = \sin x + \sin y$.

решење

$f'_x = \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

$f'_y = \cos y = 0 \Rightarrow y = \frac{\pi}{2} + l\pi, \ l \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ имамо бесконачно много стац. тачака $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + l\pi\right), \ k, l \in \mathbb{Z}$.

$f''_{xx} = -\sin x, \quad f''_{xy} = 0 = f''_{yx}, \quad f''_{yy} = -\sin y$

$f''_{xx}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + l\pi\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = -(-1)^k = (-1)^{k+1}$

$f''_{yy}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + l\pi\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + l\pi\right) = (-1)^{l+1}$

$A = \begin{vmatrix} (-1)^{k+1} & 0 \\ 0 & (-1)^{l+1} \end{vmatrix} = (-1)^{l+k+2}$

1° $l+k$ парно: $A = 1 > 0$

$1^\circ 1'$ k парно: $(-1)^{k+1} < 0 \Rightarrow \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + l\pi\right)$ је лок. макс.

$1^\circ 2'$ k непарно: $(-1)^{k+1} > 0 = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + l\pi\right)$ ј лок. мин.

2° $k+l$ непарно: $A=-1<0 \Rightarrow \left(\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+l\pi\right)$ није лок. екстремум ▨

6. Испитати локалне екстремуме функције

$$f(x,y,z) = -2x^2 - y^2 + z^2 - x - 2y - 6z$$

решење

$$f'_x = -4x-1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{4}$$

$$f'_y = -2y-2=0 \Rightarrow y=-1$$

$$f'_z = 2z-6=0 \Rightarrow z=3$$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{4}, -1, -3\right)$ је стационарна тачка

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 16$$

$\Rightarrow B = 16 > 0$, $A = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 8 > 0$, $f''_x = -4 < 0$, па

је $\left(\frac{1}{4}, -1, -3\right)$ тачка локалног максимума и он је једнак

$$f\left(\frac{1}{4}, -1, -3\right) = -2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 - (-1)^2 + (-3)^2 - \frac{1}{4} - 2\cdot(-1) - 6\cdot(-3) = \frac{221}{8}$$ ▨

7. Испитати локалне екстремуме функције

$$f(x,y,z) = x^3 + y^3 - z^4 + xy - 4z$$

решење

$$f'_x = 3x^2 + y = 0$$

$$f'_y = 3y^2 + x = 0$$

$$f'_z = -4z^3 - 4 = 0 \Rightarrow z^3 = -1 \Rightarrow z = -1$$

$$3x^2 + y = 0 \Rightarrow y = -3x^2$$
$$y^2 + x = 0$$

$$3\cdot(-3x^2)^2 + x = 0$$

$$3\cdot 9x^4 + x = 0$$

$x(27x^3+1) = 0 \Rightarrow x = 0$ или $x^3 = -\frac{1}{27}$ тј. $x = -\frac{1}{3}$

Имамо 2 стац. тачке

$x=0,\ y=-3x^2=0,\ z=-1$ и $x=-\frac{1}{3},\ y=-3x^2=-\frac{1}{3},\ z=-1$

тј. $(0,0,-1)$ и $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -1\right)$.

$f''_{xx} = 6x \qquad f''_{xy} = 1 \qquad f''_{xz} = 0$

$f''_{yx} = 1 \qquad f''_{yy} = 2y \qquad f''_{yz} = 0$

$f''_{zx} = 0 \qquad f''_{zy} = 0 \qquad f''_{zz} = -12z^2$

Прво испитујемо $(0,0,-1)$:

$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$, па тачка није екстрем

Сада $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -1\right)$:

$$A = \begin{vmatrix} 6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) & 1 \\ 1 & 2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) \end{vmatrix} = \frac{1}{3} > 0$$

$-12\left(\frac{1}{3}\right)$

$$B = \begin{vmatrix} 6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) & 1 & 0 \\ 1 & 2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & -12\cdot(-1)^2 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

$f''_{xx}\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -1\right) = 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -2 < 0$

Дакле, $f''_{xx} < 0$, $A > 0$, $B < 0$, то је $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -1\right)$ тачка локалног максимума и он је једнак

$$f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -1\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - (-1)^4 + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - 4 \cdot (-1) = \frac{82}{27}$$