Скаларни, векторски и мешовити производ

деф. Нека су $\vec{a}, \vec{b}$ ненула вектори и φ угао између њих. Скаларни производ $\vec{a}$ и $\vec{b}$ је

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \overset{\text{def}}{=} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$$

(резултат је број, тј. скалар).

Пример $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$, $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$

Ова три вектора су на x, y и z-оси па су углови између њих 90°.

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \cos 90^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$\vec{j} \cdot \vec{k} = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$\vec{k} \cdot \vec{i} = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}| \cdot |\vec{i}| \cdot \cos 0^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$\vec{j} \cdot \vec{j} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$\vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

Став Нека су $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ произвољни вектори. Тада

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (комутативност)

(2) $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$

(3) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (дистрибутивност)

Став Ако је $\vec{a} = (x, y, z)$ и $\vec{b} = (s, t, u)$, онда

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = xs + yt + zu$$

доказ: Запишемо $\vec{a}$ и $\vec{b}$ помоћу $\vec{i}, \vec{j}$ и $\vec{k}$:

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{b} = s\vec{i} + t\vec{j} + u\vec{k}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})\cdot(s\vec{i} + t\vec{j} + u\vec{k}) =$$

$$= xs\underbrace{(\vec{i}\cdot\vec{i})}_{1} + xt\underbrace{(\vec{i}\cdot\vec{j})}_{0} + xu\underbrace{(\vec{i}\cdot\vec{k})}_{0} +$$

$$+ ys\underbrace{(\vec{j}\cdot\vec{i})}_{0} + yt\underbrace{(\vec{j}\cdot\vec{j})}_{1} + yu\underbrace{(\vec{j}\cdot\vec{k})}_{0}$$

$$+ zs\underbrace{(\vec{k}\cdot\vec{i})}_{0} + zt\underbrace{(\vec{k}\cdot\vec{j})}_{0} + zu\underbrace{(\vec{k}\cdot\vec{k})}_{1}$$

$$= xs + yt + zu. \quad \blacksquare$$

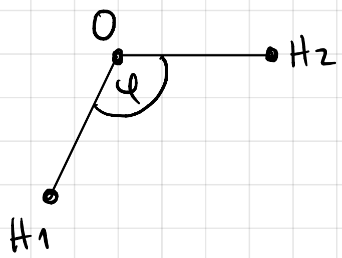
Став Косинус угла φ између вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ је

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

доказ: директно из дефиниције $\vec{a}\cdot\vec{b}$. $\blacksquare$

Пример Измерене су координате атома H и O у H_2O:
$O=(0,0,0)$, $H_1=(0.958,0,0)$, $H_2=(-0.239, 0.927, 0)$.

Одредити угао између атома H.



Означимо $\vec{a} = \overrightarrow{OH_1}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OH_2}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (0.958, 0, 0)\cdot(-0.239, 0.927, 0) =$$

$$= 0.958\cdot(-0.239) + 0\cdot 0.927 + 0\cdot 0 = -0.229$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{0.958^2 + 0^2 + 0^2} = 0.958$$

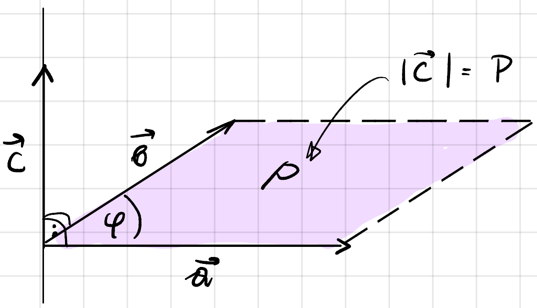
$$|\vec{b}| = \sqrt{(-0.239)^2 + 0.927^2 + 0^2} = 0.957$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{-0.229}{0.958\cdot 0.957} = -0.2498$$

$$\varphi = \arccos(-0.2498) = 104.5^\circ$$

деф. Векторски производ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, у ознаци $\vec{a} \times \vec{b}$ је вектор $\vec{c}$ одређен са:

1. интензитет од $\vec{c}$ једнак је површини паралелограма који $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одређују
2. правац је нормалан на раван коју $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одређују (тј. $\vec{c}$ је нормалан и на $\vec{a}$ и на $\vec{b}$)
3. смер је одређен правилом десне шаке

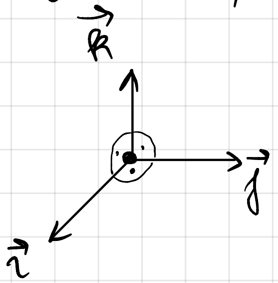


одређивање смера: прстима идемо од $\vec{a}$ ка $\vec{b}$, а палац показује смер од $\vec{c}$

Ако је φ угао између $\vec{a}$ и $\vec{b}$, онда

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$$

Пример За $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ знамо да су интензитета 1 и међусобно ортогонални. Њихови векторски производи су у табели:



$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

Став Нека су $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ произвољни вектори. Тада

(1) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

(2) $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$

(3) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

Став Нека је $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Тада

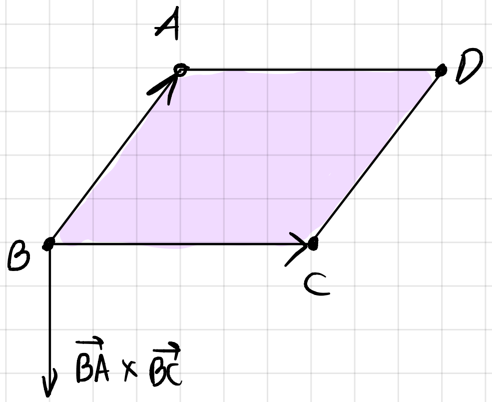
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Пример $\vec{a} = (2,3,1)$, $\vec{b} = (7,0,-1)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 2 & 3 \\ 7 & 0 \end{matrix} = -3\vec{i} + 7\vec{j} - 21\vec{k} + 2\vec{j} =$$

$$= -3\vec{i} + 9\vec{j} - 21\vec{k} = -3(1,0,0) + 9(0,1,0) - 21(0,0,1) = (-3,9,-21)$$

Пример Одредити површину паралелограма $ABCD$ са теменима $A(1,2,0)$, $B(3,0,-3)$, $C(5,2,6)$



$$P = |\vec{BA} \times \vec{BC}|$$

$$\vec{BA} = \vec{BO} + \vec{OA} = \vec{OA} - \vec{OB} =$$
$$= (1,2,0) - (3,0,-3) = (-2,2,3)$$

$$\vec{BC} = \vec{BO} + \vec{OC} = \vec{OC} - \vec{OB} =$$
$$= (5,2,6) - (3,0,-3) = (2,2,9)$$

$$\vec{BA}\times\vec{BC} = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec i & \vec j \\ -2 & 2 \\ 2 & 2 \end{matrix} = 18\vec i + 6\vec j - 4\vec k - 4\vec k - 6\vec i + 18\vec j =$$

$$= 12\vec i + 24\vec j - 8\vec k = (12, 24, -8)$$

$$P = |\vec{BA}\times\vec{BC}| = \sqrt{12^2 + 24^2 + (-8)^2} = 28$$

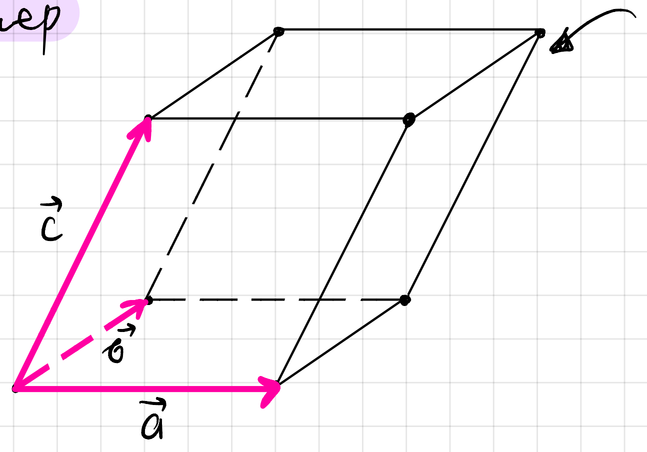
деф. Мешовити производ вектора $\vec a$, $\vec b$ и $\vec c$ је

$$[\vec a, \vec b, \vec c] \overset{def}{=} (\vec a \times \vec b)\cdot \vec c$$

Став Ако је $\vec a = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec b = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec c = (c_1, c_2, c_3)$, онда

$$[\vec a, \vec b, \vec c] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Пример



Паралелепипед одређен векторима $\vec a, \vec b$ и $\vec c$. Његова запремина је управо

$$V = [\vec a, \vec b, \vec c]$$

Задачи

① За векторите $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(0,-3,0)$, $\vec{c}=(1,-1,-1)$

одреди ги: $3\vec{a}$, $\vec{a}+\vec{b}$, $2\vec{b}-\vec{c}$, $|\vec{a}-\vec{b}|$, $|-4\vec{c}|$

решение

$$3\vec{a} = 3\cdot(1,2,3)=(3,6,9)$$
$$\vec{a}+\vec{b}=(1,2,3)+(0,-3,0)=(1,-1,3)$$
$$2\vec{b}-\vec{c}=2(0,-3,0)-(1,-1,-1)=(-1,-5,1)$$
$$\vec{a}-\vec{b}=(1,2,3)-(0,-3,0)=(1,5,3)$$
$$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{1^2+5^2+3^2}=\sqrt{35}$$
$$-4\vec{c}=(-4)(1,-1,-1)=(-4,4,4)$$
$$|-4\vec{c}|=\sqrt{(-4)^2+4^2+4^2}=4\sqrt{3} \quad \blacksquare$$

② За векторите $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(0,-3,0)$, $\vec{c}=(1,-1,-1)$

одреди ги: $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$, $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})$, $(\vec{a}\cdot\vec{c})\,\vec{b}$

решение

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(1,2,3)\cdot(0,-3,0)=1\cdot0+2\cdot(-3)+3\cdot0=-6$$
$$\vec{b}\cdot\vec{c}=(0,-3,0)\cdot(1,-1,-1)=0\cdot1+(-3)\cdot(-1)+0\cdot(-1)=3$$
$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=(1,2,3)\cdot(1,-4,-1)=1\cdot1+2\cdot(-4)+3\cdot(-1)=-10$$
$$(\vec{a}\cdot\vec{c})\,\vec{b}=\big((1,2,3)\cdot(1,-1,-1)\big)\vec{b}=\big(1\cdot1+2\cdot(-1)+3\cdot(-1)\big)\vec{b}=$$
$$=-4\vec{b}=-4(0,-3,0)=(0,12,0) \quad \blacksquare$$

③ За векторите $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(0,-3,0)$, $\vec{c}=(1,-1,-1)$

одреди ги: $\alpha=\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$, $\beta=\measuredangle(\vec{b},\vec{c})$, $\gamma=\measuredangle(\vec{a},\vec{c})$

угао између ...

решење Одредимо прво све скаларне производе и интензитете:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (1,2,3)\cdot(0,-3,0) = 1\cdot 0 + 2\cdot(-3) + 3\cdot 0 = -6$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c} = (0,-3,0)\cdot(1,-1,-1) = 0\cdot 1 + (-3)\cdot(-1) + 0\cdot(-1) = 3$$

$$\vec{a}\cdot\vec{c} = (1,2,3)\cdot(1,-1,-1) = 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 3\cdot(-1) = -4$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{0^2+(-3)^2+0^2} = 3$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{3}$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{-6}{\sqrt{14}\cdot 3} \approx -0{,}535$$

$$\alpha \approx \arccos(-0{,}535) = 122{,}3^\circ$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|} = \frac{3}{3\cdot\sqrt{3}} \approx 0{,}577$$

$$\beta \approx \arccos(0{,}577) = 54{,}67^\circ$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|} = \frac{-4}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{3}} \approx -0{,}617$$

$$\gamma \approx \arccos(-0{,}617) = 128{,}1^\circ \quad \boxtimes$$

4. Одредити пројекцију вектора $\vec{a} = (12,6,8)$ на $\vec{b} = (3,4,0)$, као и пројекцију $\vec{b}$ на $\vec{a}$.

решење

$proj_{\vec{b}}\vec{a}$ је вектор који има исти правац као $\vec{b}$, а интензитет му је $|\vec{a}|\cdot\cos\alpha$, где је $\alpha = \measuredangle(\vec{a},\vec{b})$.

Смер му је исти као $\vec{b}$ ако је $\alpha < 90°$, а супротан од $\vec{b}$ ако је $\alpha > 90°$. Прво рачунамо α.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{(12,6,8)\cdot(3,4,0)}{\sqrt{12^2+6^2+8^2}\cdot\sqrt{3^2+4^2+0^2}} =$$

$$= \frac{12\cdot 3 + 6\cdot 4 + 8\cdot 0}{\sqrt{244}\cdot\sqrt{25}} = \frac{60}{10\sqrt{61}} = \frac{6}{\sqrt{61}} \approx 0{,}768$$

$\alpha = \arccos(0{,}768) \approx 39.83° < 90°$, па $\vec{b}$ и $proj_{\vec{b}}\vec{a}$ имају исти смер.

За правац нам је потребан вектор $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$, тј. јединични вектор истог правца и смера као $\vec{b}$.

$$|\vec{b}| = \sqrt{3^2+4^2+0^2} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$$

Интензитет рачунамо помоћу формуле:

$$|proj_{\vec{b}}\vec{a}| = |\vec{a}|\cdot\cos\alpha = \sqrt{12^2+6^2+8^2}\cdot\frac{6}{\sqrt{61}} = \frac{6\sqrt{244}}{\sqrt{61}} = 6\sqrt{4} = 12$$

Коначно,

$$proj_{\vec{b}}\vec{a} = |proj_{\vec{b}}\vec{a}|\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = 12\cdot\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right) = \left(\frac{36}{5}, \frac{48}{5}, 0\right)$$

Слично рачунамо $proj_{\vec{a}}\vec{b}$.

$\sphericalangle(\vec{b},\vec{a}) = \sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \alpha$, па је

$$proj_{\vec{a}}\vec{b} = |proj_{\vec{a}}\vec{b}|\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = |\vec{b}|\cdot\cos\alpha\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} =$$

$$= 5\cdot\frac{6}{\sqrt{61}}\cdot\frac{(12,6,8)}{\sqrt{244}} = \frac{30}{122}\cdot(12,6,8) = \left(\frac{180}{61}, \frac{90}{61}, \frac{120}{61}\right) \boxtimes$$

5. За $\vec{a}=(1,1,1)$, $\vec{b}=(1,0,-1)$, $\vec{c}=(-1,0,-3)$ одредити

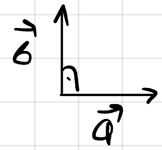
(а) $proj_{\vec{a}}\vec{b}$

(б) $proj_{\vec{a}}\vec{c}$

решење (а) $\alpha = \measuredangle(\vec{a},\vec{b})$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{(1,1,1)\cdot(1,0,-1)}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} = 0$$

$$\alpha = \arccos 0 = 90^\circ \Rightarrow proj_{\vec{a}}\vec{b} = \vec{0}$$



(б) $\beta = \measuredangle(\vec{a},\vec{c})$

$$\cos\beta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|} = \frac{(1,1,1)\cdot(-1,0,-3)}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{10}} = -0{,}73$$

$\beta \approx 136{,}9^\circ > 90^\circ$, па је

$$proj_{\vec{a}}\vec{c} = |proj_{\vec{a}}\vec{c}|\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = |\vec{c}|\cdot\cos\beta\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} =$$

$$= \sqrt{10}\cdot\frac{-4}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{10}}\cdot\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} = \left(-\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right)$$

6. За векторе $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(0,-3,0)$, $\vec{c}=(1,-1,-1)$

одредити: $\vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{b}\times\vec{c}$, $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{b}\times\vec{c})$.

решење

$$\vec{a}\times\vec{b} = \left|\begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right| = -3\vec{k} + 9\vec{i} = (9,0,-3)$$

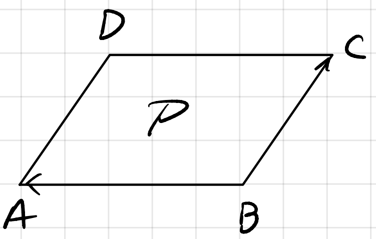
$$\vec{b}\times\vec{c} = \left|\begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ 0 & -3 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right| = 3\vec{i} + 3\vec{k} = (3,0,3)$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \left|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 9 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \end{matrix}\right|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 9 & 0 \\ 3 & 0 \end{matrix} = -9\vec{j} - 27\vec{i} = (-27, -9, 0)$$

7. Одредити површину паралелограма ABCD са теменима $A(1,1,1)$, $B(3,5,8)$, $C(-2,2,4)$. Одредити и координате темена D.

решење

$$P = |\vec{BA} \times \vec{BC}|$$



$$\vec{BA} = \vec{BO} + \vec{OA} = \vec{OA} - \vec{OB} = (1,1,1) - (3,5,8) = (-2,-4,-7)$$

$$\vec{BC} = \vec{BO} + \vec{OC} = \vec{OC} - \vec{OB} = (-2,2,4) - (3,5,8) = (-5,-3,-4)$$

$$\vec{BA}\times\vec{BC} = \left|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -4 & -7 \\ -5 & -3 & -4 \end{matrix}\right|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ -2 & -4 \\ -5 & -3 \end{matrix} = 16\vec{i} + 35\vec{j} + 6\vec{k} - 20\vec{k} - 21\vec{i} - 8\vec{j} =$$

$$= -5\vec{i} + 27\vec{j} - 14\vec{k} = (-5, 27, -14)$$

$$P = |\vec{BA}\times\vec{BC}| = \sqrt{(-5)^2 + 27^2 + (-14)^2} = 5\sqrt{38} \approx 30{,}8$$

Координате темена D су координате од $\vec{OD}$.

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD} = \vec{OA} + \vec{BC} = (1,1,1) + (-5,-3,-4) = (-4,-2,-3)$$

8. За векторе $\vec{a} = (1,1,1)$, $\vec{b} = (0,3,3)$, $\vec{c} = (2,0,5)$ израчунати $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$.

решење

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{matrix} = 15 + 6 - 6 = 15$$

9. За векторе $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(0,-3,0)$, $\vec{c}=(1,-1,-1)$ одредити: $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c},\vec{a}]+[\vec{c},\vec{a},\vec{b}]$.

решење

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right| = 3+9=12$$

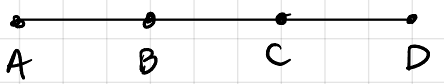
$$[\vec{b},\vec{c},\vec{a}]=\left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & -3 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right| = 3+9=12$$

$$[\vec{c},\vec{a},\vec{b}]=\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right| = 3+9=12$$

Коначно, $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c},\vec{a}]+[\vec{c},\vec{a},\vec{b}]=12+12+12=36$ ▨

10. Дуж AD подељена је на 3 једнака дела тачкама B и C. Ако је $A(1,0,1)$, $D(3,3,7)$, одредити координате тачака B и C.

решење



Координате од B и C су управо $\vec{OB}$ и $\vec{OC}$.

$$\vec{OB}=\vec{OA}+\vec{AB}=\vec{OA}+\frac{1}{3}\vec{AD}=\vec{OA}+\frac{1}{3}\left(\vec{AO}+\vec{OD}\right)=$$

$$=\vec{OA}+\frac{1}{3}\left(\vec{OD}-\vec{OA}\right)=\frac{2}{3}\vec{OA}+\frac{1}{3}\vec{OD}=\frac{2}{3}(1,0,1)+\frac{1}{3}(3,3,7)=$$

$$=\left(\frac{2}{3}+1,\ 0+1,\ \frac{2}{3}+\frac{7}{3}\right)=\left(\frac{5}{3},1,3\right)$$

Слично,

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}\right) =$$

$$= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}(1,0,1) + \frac{2}{3}(3,3,7) =$$

$$= \left(\frac{1}{3} + 2,\ 0 + 2,\ \frac{1}{3} + \frac{14}{3}\right) = \left(\frac{7}{3}, 2, 5\right) \quad \blacksquare$$

Крај задатака