Одабрана поглавља математике

ЛИНЕАРНА АЛГЕБРА

Матрице

деф Матрица реда $m \times n$ је табела бројева са m редова и n колона. Матрице означавамо великим словима латинице $(A, B, C, \dots)$, а елементе матрице малим латиничним словима са два индекса $(a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, \dots)$. Пишемо и

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

Прецизније, елементи матрице A су бројеви a_{ij}, где је i ред, а j колона у којој се број a_{ij} налази.

Пишемо:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Пример $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ ово је матрица реда 2×3, тј.

$A = (a_{ij})_{2 \times 3}$ и $a_{11} = 2$, $a_{12} = 2$, $a_{13} = 3$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = -5$, $a_{23} = 1$

деф Матрица реда $n \times n$ је квадратна матрица.

Пример $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ није квадратна

$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ јесу квадратне

Операције са матрицама

1. Множење матрице скаларом (скалар = број)

$A = (a_{ij})_{m\times n}$ – матрица, $r \in \mathbb{R}$ – скалар

Кад помножимо матрицу A скаларом r добијамо нову матрицу $r\cdot A$ реда $m\times n$:

$$r\cdot A \overset{def}{=} (r\cdot a_{ij})_{m\times n}$$

(тј. сваки ел. у A помножимо са r)

Пример $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$, $r = 7$

$$rA = 7A = \begin{pmatrix} 7\cdot 2 & 7\cdot 2 & 7\cdot 3 \\ 7\cdot 0 & 7\cdot(-5) & 7\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 14 & 21 \\ 0 & -35 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Сабирање матрица

Сабирамо само матрице <u>истог реда</u> $m\times n$ и то члан по члан и за резултат добијамо нову матрицу реда $m\times n$:

$$A + B = (a_{ij})_{m\times n} + (b_{ij})_{m\times n} \overset{def}{=} (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$$

Пример $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\frac{1}{2} & 2+0 & 3+4 \\ 0+2 & -5+5 & 1+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 2 & 7 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$B + C$ = нема смисла јер B и C нису истог реда!

$$O = (0)_{m\times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$$ – нула матрица реда $m\times n$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$ – јединична матрица реда n

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \ldots$$

I_n је увек квадратна!

Особине: Нека су A, B, C матрице реда $m\times n$. Тада

(1) $A + B = B + A$ (комутативност)

(2) $(A+B) + C = A + (B+C)$ (асоцијативност)

(3) $A + O = O + A = A$

(4) Ако је $k \in \mathbb{N}$, онда $k\cdot A = \underbrace{A + A + \cdots + A}_{k}$

Став Нека су A, B матрице реда $m\times n$ и $a, b \in \mathbb{R}$. Тада

(1) $0\cdot A = O$, $1\cdot A = A$

(2) $(a+b)A = aA + bA$

(3) $(ab)A = a(bA)$

(4) $a(A+B) = aA + aB$

доказ (1) $\underset{\text{број нула}}{0}\cdot A = 0\cdot(a_{ij})_{m\times n} = (0\cdot a_{ij})_{m\times n} = (0)_{m\times n} = \underset{\text{нула матрица}}{O}$

$1\cdot A = 1\cdot(a_{ij})_{m\times n} = (1\cdot a_{ij})_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n} = A$

(2) $(a+b)A = (a+b)(a_{ij})_{m\times n} = ((a+b)a_{ij})_{m\times n} = (a\cdot a_{ij} + b\cdot a_{ij})_{m\times n} =$

$= (a\cdot a_{ij})_{m\times n} + (b\cdot a_{ij})_{m\times n} = aA + bA$

(3) $(ab)A = (ab)(a_{ij})_{m\times n} = ((ab)a_{ij})_{m\times n} = (a(ba_{ij}))_{m\times n} =$

$= a(ba_{ij})_{m\times n} = a(bA)$

(4) $a(A+B) = a((a_{ij})_{m\times n} + (b_{ij})_{m\times n}) = a(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n} = (a(a_{ij}+b_{ij}))_{m\times n} =$

$= (aa_{ij} + ab_{ij})_{m\times n} = (aa_{ij})_{m\times n} + (a\,b_{ij})_{m\times n} = aA + aB$ ▨

③ Множење матрица

Нека је $A = (a_{ij})_{m\times n}$ и $B = (b_{ij})_{n\times p}$. Тада је производ матрице A и B нова матрица реда $m\times p$:

$$A\cdot B \stackrel{def}{=} (c_{ij})_{m\times p},$$

где је $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$

Дакле, можемо множити $A\cdot B$ само ако је:

број колона у A = број врста у B !

Пример $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 2}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 2}$

$A\cdot B = (c_{ij})_{2\times 2} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$

$c_{11} = 1\cdot 0 + 2\cdot 1 = 2 \leftarrow$ 1. врста у A и 1. колона у B

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$C_{12} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 3$ ← 1. врста у A и 2. колона у B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$C_{21} = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 4$ ← 2. врста у A и 1. колона у B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$C_{22} = 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 = 5$ ← 2. врста у A и 2. колона у B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

дакле, $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

Пример $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 3}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}_{3\times 2}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1\cdot 4 + 0\cdot 2 + 1\cdot 5 & 1\cdot 3 + 0\cdot 0 + 1\cdot(-6) \\ 2\cdot 4 + (-1)\cdot 2 + 4\cdot 5 & 2\cdot 3 + (-1)\cdot 0 + 4\cdot(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 26 & -18 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

деф Ако је A квадратна матрица и $n \in \mathbb{N}$, онда

$$A^n \stackrel{def}{=} \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdots A}_{n}$$

Став Нека су A, B, C матрице. Тада

(1) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (асоцијативност)

(2) $A(B+C) = AB + AC$, $(A+B)C = AC + BC$ (дистрибутивност)

(3) $r(AB) = (rA) \cdot B = A \cdot (rB)$, $r \in \mathbb{R}$

(4) Ако је A квадратна реда n, онда $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$

Став Множење матрица није комутативно, тј. у општем случају $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Пример $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0+3\cdot 2 & 1\cdot 1+3\cdot 2 \\ (-1)\cdot 0+2\cdot 2 & (-1)\cdot 1+2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 1+1\cdot(-1) & 0\cdot 3+1\cdot 2 \\ 2\cdot 1+2\cdot(-1) & 2\cdot 3+2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Задаци

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 8 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Израчунати:

(а) $A+B$

(б) $3A$

(в) $B-A$

(г) $2A+3B$

решење (а) $A+B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 8 & 8 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 7 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 & 2+0 & 5+4 \\ 8+7 & 8+1 & 3+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 9 \\ 15 & 9 & 8 \end{pmatrix}$

(б) $3A = 3\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 8 & 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 15 \\ 24 & 24 & 9 \end{pmatrix}$

(в) $B-A = B+(-1)\cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 7 & 1 & 5 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 8 & 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 7 & 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -2 & -5 \\ -8 & -8 & -3 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -2+(-2) & 0+(-2) & 4+(-5) \\ 7+(-8) & 1+(-8) & 5+(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -1 \\ -1 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

(г) $2A+3B = 2\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 8 & 8 & 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 7 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 10 \\ 16 & 16 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 0 & 12 \\ 21 & 3 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 22 \\ 37 & 19 & 21 \end{pmatrix}$ ■

② $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 2}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}_{2\times 4}$

Израчунати:

(а) A^2

(б) A^3

(в) $A^2 \cdot B$

(г) $(3A)^2 \cdot B$

(д) $B \cdot A$

решење (а) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 3 + 2\cdot 0 & 3\cdot 2 + 2\cdot 1 \\ 0\cdot 3 + 1\cdot 0 & 0\cdot 2 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(б) $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9\cdot 3 + 8\cdot 0 & 9\cdot 2 + 8\cdot 1 \\ 0\cdot 3 + 1\cdot 0 & 0\cdot 2 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 26 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(в) $A^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 9\cdot 4 + 8\cdot(-3) & 9\cdot 1 + 8\cdot 0 & 9\cdot(-1) + 8\cdot 0 & 9\cdot(-2) + 8\cdot 8 \\ 0\cdot 4 + 1\cdot(-3) & 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot(-1) + 1\cdot 0 & 0\cdot(-2) + 1\cdot 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & 9 & -9 & 46 \\ -3 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

(г) $(3A)^2 \cdot B = (3A) \cdot (3A) \cdot B = 9\,\overbrace{A^2 B} = \begin{pmatrix} 108 & 81 & -81 & 414 \\ -27 & 0 & 0 & 72 \end{pmatrix}$

(д) $B \cdot A$ није дефинисано јер је B реда 2×4, а A реда 2×2 и $4 \neq 2$! ▨

③ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 2}$

Одредити матрицу B реда 2×2 такву да је $AB = I_2$.

решење Нека је $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Тражимо a, b, c, d, а знамо

$$AB = I_2, \quad \text{тј.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Израчунајмо прво $A \cdot B$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 2a+2c & 2b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Да би матрице биле једнаке, морају сви ел. да им буду једнаки:

$$\left.\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= 0 \\ 2a+2c &= 0 \\ 2b+2d &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = 1,\ b = 0,\ c = -1,\ d = \tfrac{1}{2}$$

Дакле, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. $\boxtimes$

Крај задатака

Детерминанте

Детерминанта матрице A је број који додељујемо матрици A. Означава се са $\det A$ или $|A|$. Детерминанте се дефинише **само** за квадратне матрице.

Прво дефинишемо $\det A$ за A реда 1×1, 2×2 и 3×3, а онда и за $n\times n$, за $n \geq 4$.

(1) $A = (a)$ – матрица реда 1×1

$$\det A \overset{\text{def}}{=} a$$

(2) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ реда 2×2

Памтимо: $\left|\times\right|$ (− / +)

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

(3) $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ реда 3×3

Памтимо: (− − − / + + +)

$$\det A = \left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right| \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

допишемо прве 2 колоне

Пример (1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1 - 0\cdot 3 = 2$

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 - 2\cdot 3 = 0$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{matrix} = 1\cdot 1\cdot 5 + 2\cdot(-1)\cdot 2 + 3\cdot 0\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot 3 - 2\cdot(-1)\cdot 1 - 5\cdot 0\cdot 2 =$

$= 5 - 4 + 0 - 6 + 2 - 0 = -3$

Сада прелазимо на општи случај.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ — матрица реда $n\times n$

Нека је A_{ij} матрица реда $(n-1)\times(n-1)$ коју добијамо кад из A одбацимо i-ту врсту и j-ту колону.

$M_{ij} \overset{def}{=} \det(A_{ij})$ се зове минор матрице A.

Детерминанту од A рачунамо по формули:

$$\det A = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} - \dots + (-1)^{n+1}a_{1n}M_{1n}$$

детерминанта реда $n\times n$

детерминанте реда $(n-1)\times(n-1)$

Помоћу ове формуле детерминанту реда n сведемо на $n-1$, па опет применимо формулу да добијемо детерминанту реда $n-2$, па $n-3$ итд. док не стигнемо до реда 3 или 2.

Пример $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad M_{11} = \det A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 1 - 7\cdot 5 = -34$

$A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad M_{12} = \det A_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 0\cdot 1 - 6\cdot 5 = -30$

$A_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, $\quad M_{13} = \det A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 0\cdot 7 - 6\cdot(-1) = 6$

$$\det A = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} = 1\cdot(-34) - 2\cdot(-30) + 2\cdot 6 = 38$$

Став Ако су A и B квадратне матрице истог реда, онда

$$\det(A\cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Пример $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -3 & 8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & -2\end{pmatrix}$, $\det(A\cdot B)=?$

1. начин: $A\cdot B = \begin{pmatrix}2 & 5\\ -3 & 8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot1+5\cdot(-1) & 2\cdot0+5\cdot(-2)\\ (-3)\cdot1+8\cdot(-1) & (-3)\cdot0+8\cdot(-2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3 & -10\\ -11 & -16\end{pmatrix}$

$$\det(A\cdot B)=\begin{vmatrix}-3 & -10\\ -11 & -16\end{vmatrix} = (-3)\cdot(-16)-(-11)\cdot(-10) = 48-110 = -62$$

2. начин: $\det A = \begin{vmatrix}2 & 5\\ -3 & 8\end{vmatrix} = 2\cdot 8-(-3)\cdot 5 = 31$

$$\det B = \begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & -2\end{vmatrix} = 1\cdot(-2)-(-1)\cdot 0 = -2$$

$$\det(A\cdot B) = \det A\cdot\det B = 31\cdot(-2) = -62$$

Задаци

1. Израчунати детерминанте

(а) $\begin{vmatrix}3 & 2\\ 8 & 1\end{vmatrix}$, (б) $\begin{vmatrix}0 & 1\\ 5 & 6\end{vmatrix}$, (в) $\begin{vmatrix}7 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 5\\ 4 & 1 & 1\end{vmatrix}$ (г) $\begin{vmatrix}-5 & -6 & -1\\ 7 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}$

решење

(а) $\begin{vmatrix}3 & 2\\ 8 & 1\end{vmatrix} = 3\cdot1-8\cdot2 = -13$, (б) $\begin{vmatrix}0 & 1\\ 5 & 6\end{vmatrix} = 0\cdot6-5\cdot1 = -5$

(в) $\begin{vmatrix}7 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 5\\ 4 & 1 & 1\end{vmatrix}\begin{matrix}7 & 1\\ 2 & 3\\ 4 & 1\end{matrix} = 7\cdot3\cdot1+1\cdot5\cdot4+2\cdot2\cdot1-4\cdot3\cdot2-1\cdot5\cdot7-1\cdot2\cdot1 = -16$

(г) $\begin{vmatrix}-5 & -6 & -1\\ 7 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}\begin{matrix}-5 & -6\\ 7 & 0\\ 3 & 2\end{matrix} = (-5)\cdot0\cdot1+(-6)\cdot0\cdot3+(-1)\cdot7\cdot2-3\cdot0\cdot(-1)-2\cdot0\cdot(-5)-1\cdot7\cdot(-6) = 28$

(2.) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \\ 6 & -7 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $\det A = ?$

решење Користимо формулу

$$\det A = a_{11} M_{11} - a_{12} M_{12} + a_{13} M_{13} + a_{14} M_{14}$$

$$= 0 \cdot M_{11} - (-1) M_{12} + 1 \cdot M_{13} + 2 \cdot M_{14}$$

$$= M_{12} + M_{13} + 2 M_{14}$$

$$M_{12} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 1 & 5 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right| = 3 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 5 \cdot 6 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \cdot 5 - 3 \cdot 1 \cdot 3 - 3 \cdot 6 \cdot 1 = 64$$

$$M_{13} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 4 & 5 & 3 & 4 \\ 6 & -7 & 1 & 6 & -7 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 5 \end{array}\right| = 3 \cdot (-7) \cdot 3 + 4 \cdot 1 \cdot 2 + 5 \cdot 6 \cdot 5 - 2 \cdot (-7) \cdot 5 - 5 \cdot 1 \cdot 3 - 3 \cdot 6 \cdot 4 = 78$$

$$M_{14} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 6 & -7 & 1 & 6 & -7 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 5 \end{array}\right| = 3 \cdot (-7) \cdot 3 + 4 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 6 \cdot 5 - 2 \cdot (-7) \cdot 1 - 5 \cdot 1 \cdot 3 - 3 \cdot 6 \cdot 4 = -98$$

Коначно, $\det A = M_{12} + M_{13} + 2 M_{14} = 64 + 78 - 2 \cdot 98 = -54$ ∎

(3.) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 8 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $\det(A \cdot B) = ?$

решење Користимо формулу $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

$$\det A = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 1 & 7 & 6 \end{array}\right| = 2 \cdot 0 \cdot 1 + 3 \cdot 8 \cdot 7 + (-1) \cdot 0 \cdot 6 - 7 \cdot 0 \cdot (-1) - 6 \cdot 8 \cdot 2 - 1 \cdot 0 \cdot 3 = 72$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \\ 5 & 0 \end{matrix} = 1\cdot2\cdot8 + 2\cdot3\cdot5 + 3\cdot4\cdot0 - 5\cdot2\cdot3 - 0\cdot3\cdot1 - 8\cdot4\cdot2 = -48$$

Коначно, $\det(AB) = \det A \cdot \det B = 72 \cdot (-48) = -3456$ $\blacksquare$

Крај задатака

Инверзна матрица

деф. Матрица B је инверзна матрица матрице A ако је

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

Инверзну матрицу од A означавамо са A^{-1}.

Из деф. видимо да се појам инверзне матрице дефинише само за квадратне матрице!

Став Ако је $\det A = 0$, онда не постоји A^{-1}.

<u>доказ:</u> Претпоставимо супротно да постоји A^{-1}, тј.

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n,$$

Тада је $\det(A \cdot A^{-1}) = \det I_n$, али

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det(A^{-1}) = 0 \cdot \det(A^{-1}) = 0$$

$$\det I_n = 1,$$

па добијамо $0 = 1$, што је немогуће, па A^{-1} не може постојати. $\blacksquare$

Ако је $\det A \neq 0$, онда постоји A^{-1} и сада ћемо видети како се рачуна.

деф. Нека је A матрица реда $n \times n$. Адјунгована матрица од A је матрица $A^* = (b_{ij})_{n\times n}$ реда $n\times n$, где је

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}, \qquad 1 \le i, j \le n,$$

а M_{ij} су минори матрице A.

Пример $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad A^* = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$

Сад рачунамо b_{ij}.

$M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 0\cdot 1 - 3\cdot 7 = -21$, $\quad b_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = -21$

$M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 1 - 4\cdot 3 = -9$, $\quad b_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = 9$

$M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3\cdot 7 - 4\cdot 0 = 21$, $\quad b_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = 21$

$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1 - 7\cdot(-1) = 9$, $\quad b_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -9$

$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1 - 4\cdot(-1) = 5$, $\quad b_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = 5$

$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 1\cdot 7 - 4\cdot 2 = -1$, $\quad b_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = 1$

$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 - 0\cdot(-1) = 6$, $\quad b_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = 6$

$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 3 - 3\cdot(-1) = 6$, $\quad b_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -6$

$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot 0 - 3\cdot 2 = -6$, $\quad b_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = -6$

Коначно, $A^* = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & 9 & 21 \\ -9 & 5 & 1 \\ 6 & -6 & -6 \end{pmatrix}$

деф. Транспонована матрица матрице A је матрица чије су колоне управо врсте матрице A, тј. ако је

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

онда

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{n\times m}$$

Пример $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Теорема Нека је A квадратна матрица и $\det A \neq 0$. Тада постоји A^{-1} и важи

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \left(A^T\right)^*$$

Став Матрица A^{-1} је јединствена, ако постоји.

доказ: Нека су B и C две инверзне матрице од A, тј.

$$AB = BA = I_n \quad \text{и} \quad AC = CA = I_n$$

$$BA = I_n \,/\cdot C \implies B\underbrace{AC}_{I_n} = I_n \cdot C = C \implies B = C \qquad \boxtimes$$

Став Ако постоји A^{-1}, онда је $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

Задаци

1. Одредити инверзне матрице

(а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$, (б) $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, (в) $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, (г) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

решење (а) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 7 \cdot 3 = -16 \neq 0$, па постоји A^{-1} и рачунамо га по формули $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \left(A^T\right)^*$

Најпре, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\left(A^T\right)^* = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

$M_{11} = 5$, $b_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 5$

$M_{12} = 3$, $b_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -3$

$M_{21} = 7$, $b_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -7$

$M_{22} = 1$, $b_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = 1$

Дакле, $A^{-1} = \frac{1}{-16} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{16} & \frac{3}{16} \\ \frac{7}{16} & -\frac{1}{16} \end{pmatrix}$

(б) $\det B = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = 0$, па не постоји B^{-1}.

(в) $\det C = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) = 1 \neq 0$, па постоји ${}^{-1}$ и

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} \left(C^T\right)^* .$$

$C^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(C^T\right)^* = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

$M_{11} = 2, \quad b_{11} = 2$

$M_{12} = -1, \quad b_{12} = 1$

$M_{21} = 1, \quad b_{21} = -1$

$M_{22} = 0, \quad b_{22} = 0$

Коначно, $C^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(г) D није квадратна матрица, па не постоји D^{-1}! ☒

2. Одредити инверз матрице $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ за $ad - bc \neq 0$.

решење: $\det A = ad - bc \neq 0$, па постоји A^{-1} и

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \left(A^T\right)^*$$

$A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \quad \left(A^T\right)^* = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

$M_{11} = d \qquad b_{11} = d$

$M_{12} = b \qquad b_{12} = -b$

$M_{21} = c \qquad b_{21} = -c$

$M_{22} = a \qquad b_{22} = -a$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad ☒$$

ову формулу можемо памтити и користити на испиту.

3. Одредити инверз матрице

(а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 6 \\ 7 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, (б) $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 7 \end{pmatrix}$

решење

(а) $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 6 \\ 7 & 1 & -2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 0 \\ 5 & 0 \\ 7 & 1 \end{matrix} = 2\cdot 0\cdot(-2) + 0\cdot 6\cdot 7 + 1\cdot 5\cdot 1 - 7\cdot 0\cdot 1 - 1\cdot 6\cdot 2 - (-2)\cdot 5\cdot 0 = -7 \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left(A^{T}\right)^{*}$$

$A^{T} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad \left(A^{T}\right)^{*} = \left(b_{ij}\right)_{3\times 3}$

$M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 0\cdot(-2) - 6\cdot 1 = -6$, $\quad b_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = -6$

$M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0\cdot(-2) - 1\cdot 1 = -1$, $\quad b_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = 1$

$M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 0\cdot 6 - 1\cdot 0 = 0$, $\quad b_{13} = 0$

$M_{21} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -52$, $\quad b_{21} = 52$

$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -11$, $\quad b_{22} = -11$

$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 7$, $\quad b_{23} = -7$

$M_{31} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$, $\quad b_{31} = 5$

$M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$, $\quad b_{32} = -2$

$M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $\quad b_{33} = 0$

Дакле, $A^{-1} = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} -6 & 1 & 0 \\ 52 & -11 & -7 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \\ -\frac{52}{7} & \frac{11}{7} & 1 \\ -\frac{5}{7} & \frac{2}{7} & 0 \end{pmatrix}$

(б) $\det B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 7 \end{vmatrix}\begin{matrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \\ 2 & -5 \end{matrix} = -45 - 18 = -63 \neq 0$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B}\left(B^T\right)^*$$

$B^T = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $\quad \left(B^T\right)^* = \left(b_{ij}\right)_{3\times 3}$

$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 21$, $\quad b_{11} = 21$

$M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 15$, $\quad b_{12} = -15$

$M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9$, $\quad b_{13} = -9$

$M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 21$, $\quad b_{21} = -21$

$M_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -6$, $\quad b_{22} = -6$

$M_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9$, $\quad b_{23} = 9$

$M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -21$, $\quad b_{31} = -21$

$M_{32} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = 0$, $\quad b_{32} = 0$

$M_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$, $\quad b_{33} = 0$

$$B^{-1} = \frac{1}{-63}\begin{pmatrix} 21 & -15 & -9 \\ -21 & -6 & 9 \\ -21 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{21} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{21} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ▨$$

Крај задатака

Системи линеарних једначина

Пример Нађи најмање $a, b, c \in \mathbb{N}$ у реакцији

$$a H_2 + b O_2 \to c H_2O$$

$$\left.\begin{aligned} H &: 2a = 2c \Rightarrow a = c = 2b \\ O &: 2b = c \end{aligned}\right\}$$ систем 2 једначине са 3 непознате

a и c смо изразили преко b, па узмемо најмању вредност $b = 1$ и имамо $a = c = 2b = 2$, тј.

$$2H_2 + O_2 \to 2H_2O$$

деф. Линеарна једначина са n непознатих је једначина облика

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$, а $x_1, \ldots, x_n$ су непознате

деф. Систем m линеарних једначина са n непознатих је

$$\left.\begin{aligned} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + \cdots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n &= b_m \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

где су $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$, а $x_1, \ldots, x_n$ су непознате

Коментар Углавном ћемо имати случај $m = n = 3$.

деф. Систем $(*)$ је хомоген ако је $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$.

деф. Решење система $(*)$ је свака n-торка $(x_1, \ldots, x_n)$ која задовољава све једначине у $(*)$

Скуп решења система ⊛ је

$$R = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m\}$$

Скуп R може бити: празан, једночлан или бесконачан.

Пример (1) $\left.\begin{array}{l} x+y=2 \\ x-y=0 \end{array}\right\}$ овај систем има 1 решење: $x=1,\ y=1$

(2) $\left.\begin{array}{l} x+y=3 \\ x+y=2 \end{array}\right\}$ овај систем нема решења (тј. $R=\emptyset$)

(3) $\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ x+y=1 \end{array}\right\}$ овај систем има бесконачно много решења:

$$x=a,\ y=1-a,\ a\in\mathbb{R}$$

деф. Матрица система ⊛ је $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$.

Матрица слободних коефицијената је $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m\times 1}$.

Матрица непознатих је $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$

Систем ⊛ краће пишемо: $A\cdot X = B$

Пример Дат је систем: $\begin{array}{l} x+y=3 \\ 2x-3y=1 \end{array}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},\quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Шта значи $A\cdot X = B$?

$$A\cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-3y \end{pmatrix}$$

$$A\cdot X = B \iff \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{l} x+y=3 \\ 2x-3y=1 \end{array}$$

деф. Ако је $m=n$ у систему (*), онда дефинишемо детерминанту система (*) као $D \stackrel{def}{=} \det A$.

Пример Детерминанта система $\begin{matrix} x+y=3 \\ 2x-3y=1 \end{matrix}$ је

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot(-3) - 2\cdot 1 = -5$$

Методе за решавање система

① **Метода замене** – из једне једначине изразимо једну непознату па заменимо у осталим

Пример

$$\begin{aligned} x+y+z &= 12 \\ 2x-y+z &= -6 \\ x-2y-3z &= 1 \end{aligned} \Rightarrow \boxed{x = 2y+3z+1}$$

изразимо x из 3. једн. и убацимо у 1. и 2.

$$\left.\begin{aligned} (2y+3z+1)+y+z &= 12 \\ 2(2y+3z+1)-y+z &= -6 \end{aligned}\right\} \text{средимо}$$

$$\begin{aligned} 3y+4z &= 11 \\ 3y+7z &= -8 \end{aligned} \Rightarrow \boxed{y = \frac{-7z-8}{3}}$$

изразимо y из друге и убацимо у прву

$$\left. 3\cdot\frac{-7z-8}{3} + 4z = 11 \right\} \text{средимо}$$

$$-3z = 19$$

$$\boxed{z = -\frac{19}{3}}$$ – убацимо у y па у x

$$y = \frac{-7z-8}{3} = \frac{-7\cdot\left(-\frac{19}{3}\right)-8}{3} = \frac{109}{9}$$

$$x = 2y+3z+1 = 2\cdot\frac{109}{9} + 3\cdot\left(-\frac{19}{3}\right)+1 = \frac{56}{9}$$

Систем има јединствено решење $(x, y, z) = \left(\frac{56}{9}, \frac{109}{9}, -\frac{19}{3}\right)$.

② Матрично решавање система

Овај метод користимо само у случају $m=n$ и $D \neq 0$.

$$A \cdot X = B \; / \cdot A^{-1} \text{ (са леве стране множимо)}$$

$$\underbrace{A^{-1} A}_{I_n} X = A^{-1} B$$

$$I_n \cdot X = A^{-1} B$$

$$\boxed{X = A^{-1} B} \text{ - решење система}$$

Пример Имамо исти систем од малопре:

$$x + y + z = 12$$
$$2x - y + z = -6$$
$$x - 2y - 3z = 1$$

$m = n = 3$ ✓

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{matrix} = 3 + 1 - 4 + 1 + 2 + 6 = 9$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \det A = D$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \left(A^T\right)^* = \frac{1}{9} \cdot \left(A^T\right)^*$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad \left(A^T\right)^* = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 5 \qquad b_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 5 = 5$

$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -1 \qquad b_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-1) = 1$

$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad b_{13} = 2$

$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -7 \qquad b_{21} = 7$

$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -4 \qquad b_{22} = -4$

$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad b_{23} = 1$

$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \qquad b_{31} = -3$

$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \qquad b_{32} = 3$

$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \qquad b_{33} = -3$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 7 & -4 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{7}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} B = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{7}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} \cdot 12 - \frac{1}{9} \cdot 6 + \frac{2}{9} \cdot 1 \\ \frac{7}{9} \cdot 12 + \frac{4}{9} \cdot 6 + \frac{1}{9} \cdot 1 \\ \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 12 - \frac{1}{3} \cdot 6 - \frac{1}{3} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{56}{9} \\ \frac{109}{9} \\ -\frac{19}{3} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ решење система је $(x, y, z) = \left(\frac{56}{9}, \frac{109}{9}, -\frac{19}{3}\right)$.

3 Крамерово правило

Овај метод такође користимо само у случају $m = n$ и $D \neq 0$.

Метод ћемо описати у случају $m = n = 3$.

Дат је систем: $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$

$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$

$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad D = \det A$$

дефинишемо још 3 детерминанте:

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ ← у A смо заменили прву колону са $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ ← замењена 2. колона

$$D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$ ← замењена 3. колона

Тада је решење система дато са:

$$\boxed{x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad z = \frac{D_z}{D}}$$

Пример

$x + y + z = 12$

$2x - y + z = -6$

$x - 2y - 3z = 1$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{matrix} = 3 + 1 - 4 + 1 + 2 + 6 = 9$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 12 & 1 & 1 \\ -6 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 12 & 1 \\ -6 & -1 \\ 1 & -2 \end{matrix} = 36 + 1 + 12 + 1 + 24 - 18 = 56$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 \\ 2 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 12 \\ 2 & -6 \\ 1 & 1 \end{matrix} = 18 + 12 + 2 + 6 - 1 + 72 = 109$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 2 & -1 & -6 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{matrix} = -1 - 6 - 48 + 12 - 12 - 2 = -57$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{56}{9}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{109}{9}, \quad z = \frac{D_z}{D} = -\frac{57}{9} = -\frac{19}{3}$$

$\Rightarrow$ решење система је $(x, y, z) = \left(\frac{56}{9}, \frac{109}{9}, -\frac{19}{3}\right)$.

Пример Решити систем:

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 3 \\ 2y - 4z &= 6 \\ -3y + 6z &= -9 \end{aligned}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 6 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & -3 \end{matrix} = 24 - 24 = 0,$$ па морамо користити метод замене

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 3 \\ 2y - 4z &= 6 \\ -3y + 6z &= -9 \end{aligned} \Rightarrow \boxed{y = \frac{-9 - 6z}{-3} = 3 + 2z}$$ ← убацимо у 1. и 2.

$$\left.\begin{aligned} 2x + (3 + 2z) - z &= 3 \\ 2(3 + 2z) - 4z &= 6 \end{aligned}\right\}$$ средимо

$$2x + z = 0 \Rightarrow \boxed{z = -2x}$$

$6 = 6$ – увек тачно

Систем има бесконачно много решења:

$x = a \in \mathbb{R}$, $z = -2a$, $y = 3 - 4a$, тј.

$R = \{(a, 3 - 4a, -2a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ – скуп решења

Пример Решити систем:

$$\begin{aligned} 2x+y-z &= 3\\ 2y-4z &= 6\\ -3y+6z &= 0 \end{aligned}$$

$$D=\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -4 & 0 & 2\\ 0 & -3 & 6 & 0 & -3 \end{array}\right| = 24-24=0,$$ па можемо користити метод замене

$$\begin{aligned} 2x+y-z &= 3\\ 2y-4z &= 6\\ -3y+6z &= 0 \quad \Rightarrow \quad y=2z \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x+2z-z&=3\\ 2\cdot 2z-4z&=6 \end{aligned}\right\} \text{ сводимо}$$

$$2x+z=3$$

$$0=6 \; - \text{ немогуће}$$

$\Rightarrow$ дати систем нема решења

Задаци

1. Решити системе

(а) $$\begin{aligned} 2x+3y+z&=1\\ x+y&=2 \end{aligned}$$

(б) $$\begin{aligned} -x-y+z&=1\\ 3x-12z&=0\\ 4y+z&=3 \end{aligned}$$

решење (а)
$$\begin{aligned} 2x+3y+z&=1\\ x+y&=2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y=2-x} \end{aligned}$$

$$2x+3(2-x)+z=1$$

$$-x+z=-5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=z+5}$$

$z=t\in\mathbb{R}$ – произвољно

$x=t+5,\; y=2-(t+5)=-t-3$

Систем има бесконачно много решења:

$$(x,y,z)=(t+5,\,-t-3,\,t),\quad t\in\mathbb{R}$$

(б)
$$\begin{aligned} -x - y + z &= 1 \\ 3x \quad - 12z &= 0 \\ 4y + z &= 3 \end{aligned}$$

$$D = \left|\begin{array}{ccc|cc} -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -12 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right| = 12 - 48 + 3 = -33 \neq 0$$

Користимо Крамерово правило

$$D_x = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right| = 36 + 48 = 84$$

$$D_y = \left|\begin{array}{ccc|cc} -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -12 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right| = 9 - 36 - 3 = -30$$

$$D_z = \left|\begin{array}{ccc|cc} -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 4 \end{array}\right| = 12 + 9 = 21$$

$\Rightarrow$ Имамо јединствено решење

$$x = \frac{D_x}{D} = -\frac{84}{33} = -\frac{28}{11}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{30}{33} = \frac{10}{11}, \quad z = \frac{D_z}{D} = -\frac{21}{33} = -\frac{7}{11}$$

2. У зависности од параметра $a \in \mathbb{R}$ решити систем

(а)
$$\begin{aligned} ax + y &= 1 \\ 4x + ay &= 2 \end{aligned}$$

(б)
$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x + 2y &= 3 \\ ax + y &= 1 \end{aligned}$$

(в)
$$\begin{aligned} x + 2y + az &= 1 \\ x - y - z &= 0 \\ x + y + z &= a \end{aligned}$$

решење (а)
$$ax + y = 1 \Rightarrow \boxed{y = 1 - ax}$$
$$4x + ay = 2$$

$$4x + a(1 - ax) = 2 \quad \} \text{ средимо}$$

$$x(4 - a^2) = 2 - a$$

$$x(2-a)(2+a) = 2 - a$$

Ако је $(2-a)(2+a) \neq 0$, онда можемо да поделимо све са тим, а ако је $(2-a)(2+a) = 0$ не можемо, па имамо 3 случаја

1° $a = 2$

$x(2-a)(2+a) = 2-a$ постаје $x \cdot 0 \cdot 4 = 0$, тј. $0 = 0$ ✓

$\Rightarrow$ x може бити било шта, тј. $x = t \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ $y = 1 - ax = 1 - 2t$

Добили смо бесконачно много решења:

$$(x, y) = (t, 1-2t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

2° $a = -2$

$x(2-a)(2+a) = 2-a$ постаје $x \cdot 4 \cdot 0 = 4$, тј. $0 = 4$ што је немогуће па систем у овом случају нема решења

3° $a \neq 2$ и $a \neq -2$

$$x(2-a)(2+a) = 2-a \quad / : (2-a)(2+a)$$

$$x = \frac{2-a}{(2-a)(2+a)} = \frac{1}{2+a}$$

$$y = 1 - ax = 1 - a \cdot \frac{1}{2+a} = \frac{2+a-a}{2+a} = \frac{2}{2+a}$$

Систем има јединствено решење:

$$(x, y) = \left(\frac{1}{2+a}, \frac{2}{2+a}\right).$$

(б)

$$x + y = 1 \Rightarrow \boxed{x = 1 - y}$$

$$x + 2y = 3$$

$$ax + y = 1$$

$$\left.\begin{aligned} (1-y) + 2y &= 3 \\ a(1-y) + y &= 1 \end{aligned}\right\} \text{средимо}$$

$$\boxed{y = 2}$$

$$(1-a)y = 1-a$$

ако је $1-a \neq 0$ можемо да делимо са $1-a$, а ако није не можемо

1° $1-a \neq 0$, тј. $a \neq 1$

$$(1-a)y = 1-a \quad / : (1-a)$$

$$y = \frac{1-a}{1-a} = 1,$$ али добили смо $y=2$

$\Rightarrow$ систем нема решења

2° $1-a=0$, тј. $a=1$

$(1-a)y = 1-a$ постаје $0 \cdot y = 0$, тј. $0=0$ W

Дакле, $y=2$ и $x = 1-y = -1$, па имамо јединствено решење $(x,y) = (-1,2)$

(б)
$$\begin{aligned} x+2y+az &= 1 \\ x-y-z &= 0 \Rightarrow \boxed{x = y+z} \\ x+y+z &= a \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} (y+z)+2y+az &= 1 \\ (y+z)+y+z &= a \end{aligned}\right\}$$ средимо

$$\begin{aligned} 3y+(a+1)z &= 1 \\ 2y+2z &= a \Rightarrow \boxed{y = \frac{a-2z}{2} = \frac{a}{2} - z} \end{aligned}$$

$$3\left(\frac{a}{2} - z\right) + (a+1)z = 1$$

$$(a-2)z = 1 - \frac{3a}{2}$$

1° $a=2$

$(a-2)z = 1 - \frac{3a}{2}$ постаје $0 \cdot z = -2$, тј. $0 = -2$, па у овом случају нема решења

2° $a \neq 2$

$$(a-2)z = 1 - \frac{3a}{2} \quad / : (a-2)$$

$$z = \frac{1 - \frac{3a}{2}}{a-2} = \frac{\frac{2-3a}{2}}{a-2} = \frac{2-3a}{2(a-2)}$$

$$y = \frac{a}{2} - z = \frac{a}{2} - \frac{2-3a}{2(a-2)} = \frac{a(a-2)}{2(a-2)} - \frac{2-3a}{2(a-2)} = \frac{a^2+a-2}{2(a-2)}$$

$$x = y + z = \frac{a^2+a-2}{2(a-2)} + \frac{2-3a}{2(a-2)} = \frac{a^2-2a}{2(a-2)} = \frac{a(a-2)}{2(a-2)} = \frac{a}{2}$$

Добили смо јединствено решење:

$$(x, y, z) = \left(\frac{a}{2}, \frac{a^2+a-2}{2(a-2)}, \frac{2-3a}{2(a-2)}\right)$$

3. Одредити непознате коефицијенте у реакцијама:

(а) $x\,NH_3 + 10\,O_2 \rightarrow y\,NO + z\,H_2O$

(б) $x\,H_2O_2 \rightarrow 3\,H_2O + y\,O_2$

(в) $2\,C_{18}H_{38} + x\,O_2 \rightarrow y\,CO_2 + z\,H_2O$

решење (а)

$N: \quad x = y$

$H: \quad 3x = 2z$

$O: \quad 20 = y + z$

Дакле имамо систем:

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \Rightarrow \boxed{x = y} \\ 3x - 2z &= 0 \\ y + z &= 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3y - 2z &= 0 \\ y + z &= 20 \Rightarrow \boxed{y = 20 - z} \end{aligned}$$

$$3(20 - z) - 2z = 0$$

$$-5z = -60$$

$$\boxed{z = 12}$$

$y = 20 - z = 8, \quad x = y = 8$

Коначно: $8\,NH_3 + 10\,O_2 \rightarrow 8\,NO + 12\,H_2O$

(б) $x\,H_2O_2 \rightarrow 3\,H_2O + y\,O_2$

H: $2x = 6 \Rightarrow \boxed{x=3}$

O: $2x = 3 + 2y \Rightarrow 2y = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$ – није цео број

$\Rightarrow$ нема решења

(в) $2\,C_{18}H_{38} + x\,O_2 \rightarrow y\,CO_2 + z\,H_2O$

C: $\boxed{36 = y}$

H: $76 = 2z \Rightarrow \boxed{z = 38}$

O: $2x = 2y + z \Rightarrow x = \dfrac{2 \cdot 36 + 38}{2} = 55$

Коначно: $2\,C_{18}H_{38} + 55\,O_2 \rightarrow 36\,CO_2 + 38\,H_2O$

4. Решити систем

$$\begin{aligned} x+y+z&=6\\ 2x-y+z&=3\\ x+2y-z&=2 \end{aligned}$$

(а) методом замене;

(б) матричном методом;

(в) Крамеровим правилом.

решење (а)

$$\begin{aligned} x+y+z&=6 \Rightarrow \boxed{z = 6-x-y}\\ 2x-y+z&=3\\ x+2y-z&=2 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x-y+(6-x-y)&=3\\ x+2y-(6-x-y)&=2 \end{aligned}\right\} \text{ средимо}$$

$$\begin{aligned} x-2y&=-3 \Rightarrow \boxed{x=2y-3}\\ 2x+3y&=8 \end{aligned}$$

$$2(2y-3)+3y=8$$

$$7y=14 \Rightarrow \boxed{y=2}$$

$$x = 2y - 3 = 2\cdot 2 - 3 = 1$$

$$z = 6 - x - y = 6 - 1 - 2 = 3$$

Систем има јединствено решење:

$$(x, y, z) = (1, 2, 3)$$

(б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Тражимо A^{-1}.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{matrix} = 1 + 1 + 4 + 1 - 2 + 2 = 7 \neq 0 \checkmark$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (A^T)^* = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$b_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$b_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-3) = 3$$

$$b_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$b_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-3) = 3$$

$$b_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$b_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(-1) = 1$$

$$b_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$b_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(-1) = 1$$

$$b_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

$$(A^T)^* = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A^T)^* = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{5}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{5}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{7} + \frac{9}{7} + \frac{4}{7} \\ \frac{18}{7} - \frac{6}{7} + \frac{2}{7} \\ \frac{30}{7} + \frac{3}{7} - \frac{6}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad (x, y, z) = (1, 2, 3)$$

(б) $$D = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 7$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 6 + 2 + 6 + 2 - 12 + 3 = 7$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 6 + 4 - 3 - 2 + 12 = 14$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 3 + 24 + 6 - 6 - 4 = 21$$

$$x = \frac{D_x}{D} = 1, \quad y = \frac{D_y}{D} = 2, \quad z = \frac{D_z}{D} = 3$$

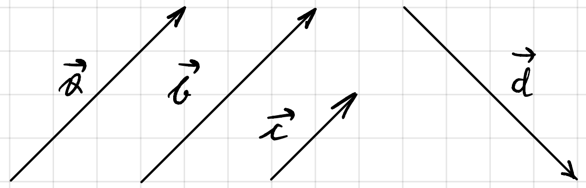
Крај задатака

АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

Вектори

деф. Вектор у $\mathbb{R}^3$ је оријентисана дуж. Сваки вектор одређен је својим правцем, смером и интензитетом (дужином). Векторе означавамо са $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$ или помоћу почетне и крајње тачке, нпр. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \dots$ Интензитет вектора $\vec{a}$ означавамо са $|\vec{a}|$. Два вектора су једнака ако су паралелни, истог смера и дужине.

Пример



$\vec{a} = \vec{b}$

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{d}|$

$\vec{a} \neq \vec{c}$

$\vec{a} \neq \vec{d}$

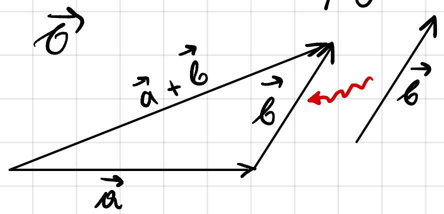
$\vec{c} \neq \vec{d}$

деф. Нула вектор је вектор произвољног правца и смера и интензитета 0. Означава се са $\vec{0}$.

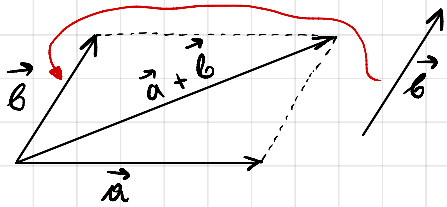
Операције са векторима

① Сабирање вектора

Векторе $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сабирамо тако што транслирамо вектор $\vec{b}$ тд. се почетак од $\vec{b}$ и крај од $\vec{a}$ поклапају. Тада је збир $\vec{a}+\vec{b}$ једнак вектору који спаја почетак од $\vec{a}$ и крај од $\vec{b}$.

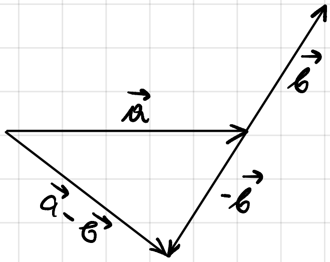


Алтернативно, транслирамо $\vec{b}$ тако да се почеци од $\vec{a}$ и $\vec{b}$ поклапају и онда је $\vec{a}+\vec{b}$ дијагонала паралелограма који одређују $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и која има исти почетак као $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



② Одузимање вектора

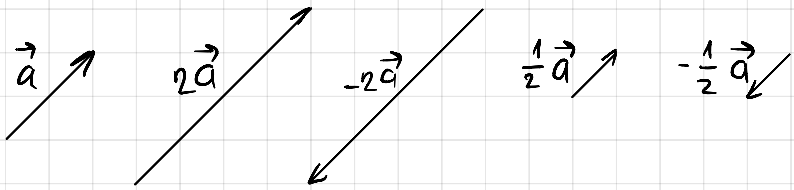
Вектор $-\vec{b}$ има исти правац и интензитет, али супротан смер од $\vec{b}$, па $\vec{a}-\vec{b}$ дефинишемо као $\vec{a}+(-\vec{b})$.



③ Множење вектора скаларом (бројем) $k \in \mathbb{R}$

Вектор $k\cdot\vec{a}$ је вектор који има исти правац као $\vec{a}$, интензитет му је $k\cdot|\vec{a}|$ и има исти смер као $\vec{a}$ ако је $k>0$, а супротан ако је $k<0$.

нпр.



Став За произвољне векторе $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ важи

(1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (комутативност)

(2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (асоцијативност)

Став Нека су $\vec{a}, \vec{b}$ вектори и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Тада

(1) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

(2) $-\vec{a} = (-1) \cdot \vec{a}$

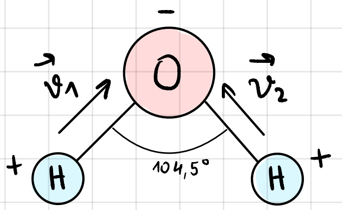
(3) $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$

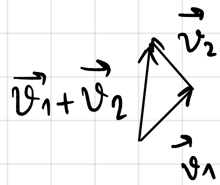
(4) $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{a}$

(5) $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$

(6) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$

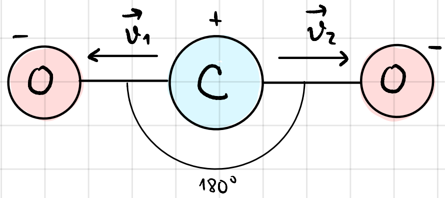
Пример (1)





Како је $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \neq \vec{0}$, молекул H_2O је поларан

(2)



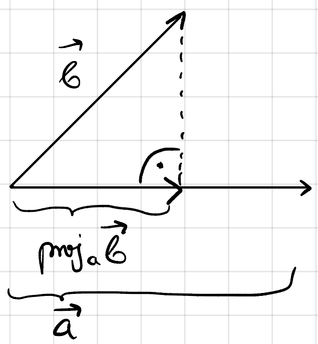
Овде је $\vec{v}_2 = -\vec{v}_1$, па је

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_1 - \vec{v}_1 = \vec{0},$$

па CO_2 није поларан

Разлагање вектора

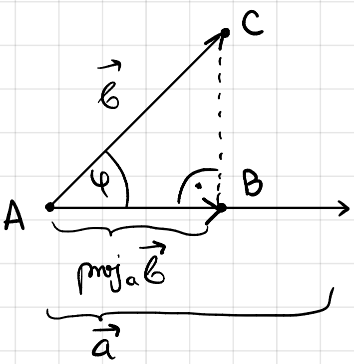
Ортогонална пројекција вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$ је вектор $proj_a \vec{b}$:



- доведемо $\vec{a}$ и $\vec{b}$ у исти почетак
- спустимо нормалу из краја од $\vec{b}$ на $\vec{a}$
- подножје нормале је крај вектора $proj_a \vec{b}$, а почетак је исти као почетак од $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Став Нека су $\vec{a}, \vec{b}$ вектори и φ угао између $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тада је интензитет од $proj_a \vec{b}$ једнак $|\vec{b}| \cdot \cos\varphi$.

доказ:



Посматрамо троугао ABC.

По дефиницији косинуса је

$$\cos\varphi = \frac{|proj_a \vec{b}|}{|\vec{b}|} = \frac{\text{налегла катета}}{\text{хипотенуза}}$$

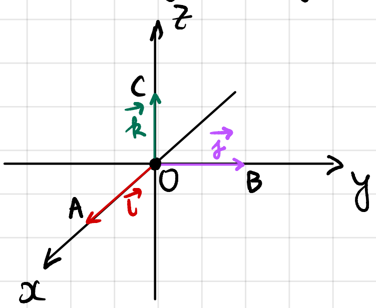
је $|proj_a \vec{b}| = |\vec{b}| \cos\varphi$. ■

Став Нека су $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ вектори и $\lambda \in \mathbb{R}$. Тада

(1) $proj_c(\vec{a} + \vec{b}) = proj_c \vec{a} + proj_c \vec{b}$,

(2) $proj_a(\lambda \vec{b}) = \lambda \, proj_a \vec{b}$.

деф. Нека су $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ јединични вектори на x, y односно z ос:



тј. ако означимо тачке

$A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$, $O(0,0,0)$,

онда $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{k} = \overrightarrow{OC}$

Нека је $M(x, y, z)$ произвољна тачка у $\mathbb{R}^3$.

Вектор $\overrightarrow{OM}$ разложимо на компоненте на следећи начин:

$$\overrightarrow{OM} = |proj_{\vec{i}} \overrightarrow{OM}| \cdot \vec{i} + |proj_{\vec{j}} \overrightarrow{OM}| \cdot \vec{j} + |proj_{\vec{k}} \overrightarrow{OM}| \cdot \vec{k}$$

Испоставља се да је

$$\left.\begin{aligned} |proj_{\vec{i}} \overrightarrow{OM}| &= x \\ |proj_{\vec{j}} \overrightarrow{OM}| &= y \\ |proj_{\vec{k}} \overrightarrow{OM}| &= z \end{aligned}\right\}$$

добију се баш координате тачке M

тј. $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ што краће пишемо:

$$\overrightarrow{OM} = (x, y, z).$$

Дакле, на овај начин идентификујемо вектор $\overrightarrow{OM}$ са тачком M (које је крај тог вектора).

Операције са векторима:

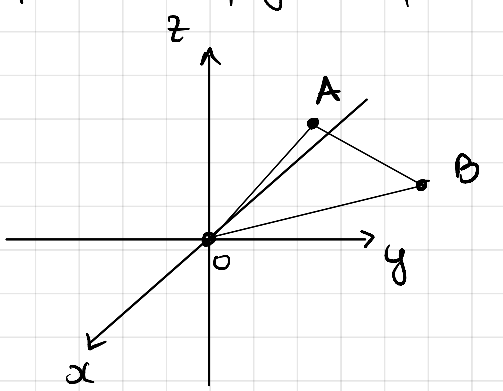
- сабирање $(a,b,c) + (d,e,f) = (a+d,\ b+e,\ c+f)$
- одузимање $(a,b,c) - (d,e,f) = (a-d,\ b-e,\ c-f)$
- множење скаларом $k(a,b,c) = (ka,\ kb,\ kc)$

Став Ако је $\vec{v} = (x,y,z)$, онда је $|\vec{v}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Пример За $\vec{a} = (1,2,3)$, $\vec{b} = (-2,-1,7)$ израчунати:
$\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $2\vec{a}$, $2\vec{a}-3\vec{b}$, $|2\vec{a}-3\vec{b}|$

$$\vec{a}+\vec{b} = (1,2,3)+(-2,-1,7) = (1-2,\ 2-1,\ 3+7) = (-1,1,10)$$
$$\vec{a}-\vec{b} = (1,2,3)-(-2,-1,7) = (1-(-2),\ 2-(-1),\ 3-7) = (3,3,-4)$$
$$2\vec{a} = 2(1,2,3) = (2,4,6)$$
$$2\vec{a}-3\vec{b} = 2(1,2,3)-3(-2,-1,7) = (2,4,6)-(-6,-3,21) = (8,7,-15)$$
$$|2\vec{a}-3\vec{b}| = \sqrt{8^2+7^2+(-15)^2} = \sqrt{338} = 13\sqrt{2}$$

Пример Одредити растојање тачака $A(-1,3,4)$ и $B(0,6,2)$



Растојање је $|\overrightarrow{AB}|$, а са слике видимо да је $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (0,6,2)-(-1,3,4) = (1,3,-2)$,

па је $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2+3^2+(-2)^2} = \sqrt{14}$

Скаларни, векторски и мешовити производ

деф. Нека су $\vec{a}, \vec{b}$ ненула вектори и φ угао између њих. Скаларни производ $\vec{a}$ и $\vec{b}$ је

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \overset{def}{=} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$$

(резултат је број, тј. скалар).

Пример $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$, $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$

Ова три вектора су на x, y и z-оси па су углови између њих 90°.

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \cos 90^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$
$$\vec{j} \cdot \vec{k} = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$
$$\vec{k} \cdot \vec{i} = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$
$$\vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}| \cdot |\vec{i}| \cdot \cos 0^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$
$$\vec{j} \cdot \vec{j} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$
$$\vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

Став Нека су $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ произвољни вектори. Тада

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (комутативност)

(2) $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$

(3) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (дистрибутивност)

Став Ако је $\vec{a} = (x, y, z)$ и $\vec{b} = (s, t, u)$, онда

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = xs + yt + zu$$

доказ: Запишемо $\vec{a}$ и $\vec{b}$ помоћу $\vec{i}, \vec{j}$ и $\vec{k}$:

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$
$$\vec{b} = s\vec{i} + t\vec{j} + u\vec{k}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\cdot(s\vec{i}+t\vec{j}+u\vec{k}) =$$

$$= xs\underbrace{(\vec{i}\cdot\vec{i})}_{1} + xt\underbrace{(\vec{i}\cdot\vec{j})}_{0} + xu\underbrace{(\vec{i}\cdot\vec{k})}_{0} +$$

$$+ ys\underbrace{(\vec{j}\cdot\vec{i})}_{0} + yt\underbrace{(\vec{j}\cdot\vec{j})}_{1} + yu\underbrace{(\vec{j}\cdot\vec{k})}_{0}$$

$$+ zs\underbrace{(\vec{k}\cdot\vec{i})}_{0} + zt\underbrace{(\vec{k}\cdot\vec{j})}_{0} + zu\underbrace{(\vec{k}\cdot\vec{k})}_{1}$$

$$= xs + yt + zu. \quad \blacksquare$$

Став Косинус угла φ између вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ је

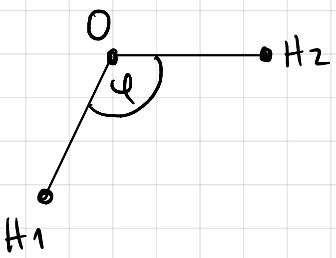
$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

доказ: директно из дефиниције $\vec{a}\cdot\vec{b}$. $\blacksquare$

Пример Измерене су координате атома H и O у H_2O:

$O=(0,0,0)$, $H_1=(0.958,0,0)$, $H_2=(-0.239, 0.927, 0)$.

Одредити угао између атома H.



Означимо $\vec{a}=\overrightarrow{OH_1}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OH_2}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (0.958,0,0)\cdot(-0.239,0.927,0) =$$

$$= 0.958\cdot(-0.239) + 0\cdot 0.927 + 0\cdot 0 = -0.229$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{0.958^2+0^2+0^2} = 0.958$$

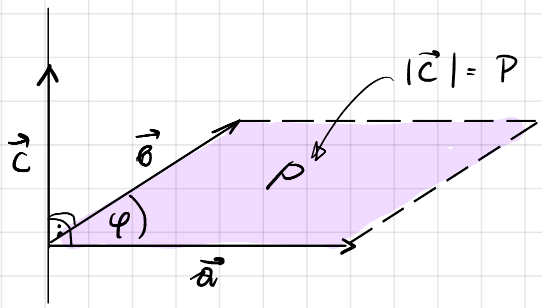
$$|\vec{b}| = \sqrt{(-0.239)^2+0.927^2+0^2} = 0.957$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{-0.229}{0.958\cdot 0.957} = -0.2498$$

$$\varphi = \arccos(-0.2498) = 104.5^\circ$$

деф. Векторски производ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, у ознаци $\vec{a}\times\vec{b}$ је вектор $\vec{c}$ одређен са:

1. интензитет од $\vec{c}$ једнак је површини паралелограма који $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одређују
2. правац је нормалан на раван коју $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одређују (тј. $\vec{c}$ је нормалан и на $\vec{a}$ и на $\vec{b}$)
3. смер је одређен правилом десне шаке

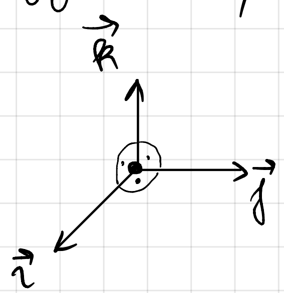


одређивање смера:
прстима идемо од $\vec{a}$ ка $\vec{b}$, а палац показује смер од $\vec{c}$

Ако је φ угао између $\vec{a}$ и $\vec{b}$, онда

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$$

Пример За $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ знамо да су интензитета 1 и међусобно ортогонални. Њихови векторски производи су у табели:



$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

Став Нека су $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ произвољни вектори. Тада

(1) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

(2) $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$

(3) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

Став Нека је $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Тада

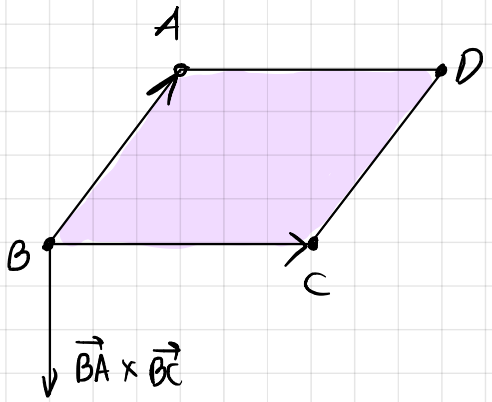
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Пример $\vec{a} = (2,3,1)$, $\vec{b} = (7,0,-1)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 2 & 3 \\ 7 & 0 \end{matrix} = -3\vec{i} + 7\vec{j} - 21\vec{k} + 2\vec{j} =$$

$$= -3\vec{i} + 9\vec{j} - 21\vec{k} = -3(1,0,0) + 9(0,1,0) - 21(0,0,1) = (-3,9,-21)$$

Пример Одредити површину паралелограма $ABCD$ са теменима $A(1,2,0)$, $B(3,0,-3)$, $C(5,2,6)$



$$P = |\vec{BA} \times \vec{BC}|$$

$$\vec{BA} = \vec{BO} + \vec{OA} = \vec{OA} - \vec{OB} =$$
$$= (1,2,0) - (3,0,-3) = (-2,2,3)$$

$$\vec{BC} = \vec{BO} + \vec{OC} = \vec{OC} - \vec{OB} =$$
$$= (5,2,6) - (3,0,-3) = (2,2,9)$$

$$\vec{BA} \times \vec{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ -2 & 2 \\ 2 & 2 \end{matrix} = 18\vec{i} + 6\vec{j} - 4\vec{k} - 4\vec{k} - 6\vec{i} + 18\vec{j} =$$

$$= 12\vec{i} + 24\vec{j} - 8\vec{k} = (12, 24, -8)$$

$$P = |\vec{BA} \times \vec{BC}| = \sqrt{12^2 + 24^2 + (-8)^2} = 28$$

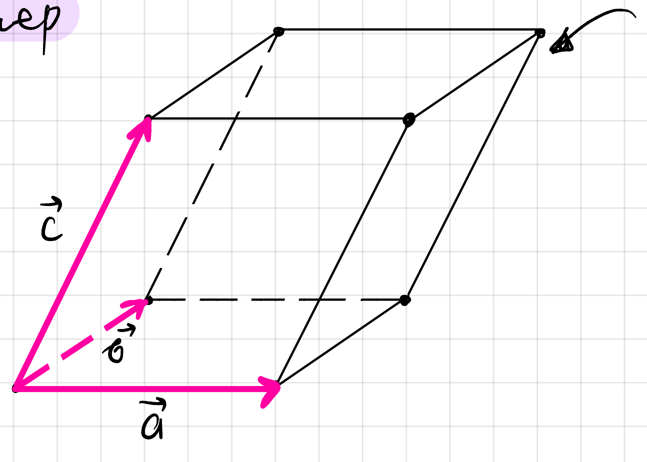
деф. Мешовити производ вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ је

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \overset{def}{=} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Став Ако је $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$, онда

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Пример



Паралелепипед одређен векторима $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Његова запремина је управо

$$V = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$

Задаци

1. За векторе $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(0,-3,0)$, $\vec{c}=(1,-1,-1)$

одредити: $3\vec{a}$, $\vec{a}+\vec{b}$, $2\vec{b}-\vec{c}$, $|\vec{a}-\vec{b}|$, $|-4\vec{c}|$

решење

$$3\vec{a}=3\cdot(1,2,3)=(3,6,9)$$

$$\vec{a}+\vec{b}=(1,2,3)+(0,-3,0)=(1,-1,3)$$

$$2\vec{b}-\vec{c}=2(0,-3,0)-(1,-1,-1)=(-1,-5,1)$$

$$\vec{a}-\vec{b}=(1,2,3)-(0,-3,0)=(1,5,3)$$

$$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{1^2+5^2+3^2}=\sqrt{35}$$

$$-4\vec{c}=(-4)(1,-1,-1)=(-4,4,4)$$

$$|-4\vec{c}|=\sqrt{(-4)^2+4^2+4^2}=4\sqrt{3} \qquad \blacksquare$$

2. За векторе $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(0,-3,0)$, $\vec{c}=(1,-1,-1)$

одредити: $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$, $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})$, $(\vec{a}\cdot\vec{c})\,\vec{b}$

решење

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(1,2,3)\cdot(0,-3,0)=1\cdot0+2\cdot(-3)+3\cdot0=-6$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=(0,-3,0)\cdot(1,-1,-1)=0\cdot1+(-3)\cdot(-1)+0\cdot(-1)=3$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=(1,2,3)\cdot(1,-4,-1)=1\cdot1+2\cdot(-4)+3\cdot(-1)=-10$$

$$(\vec{a}\cdot\vec{c})\,\vec{b}=\Big((1,2,3)\cdot(1,-1,-1)\Big)\vec{b}=\Big(1\cdot1+2\cdot(-1)+3\cdot(-1)\Big)\vec{b}=$$

$$=-4\vec{b}=-4(0,-3,0)=(0,12,0) \qquad \blacksquare$$

3. За векторе $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(0,-3,0)$, $\vec{c}=(1,-1,-1)$

одредити: $\alpha=\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$, $\beta=\measuredangle(\vec{b},\vec{c})$, $\gamma=\measuredangle(\vec{a},\vec{c})$

угао између ...

решење Одредимо прво све скаларне производе и интензитете:

$$\vec a\cdot\vec b=(1,2,3)\cdot(0,-3,0)=1\cdot 0+2\cdot(-3)+3\cdot 0=-6$$
$$\vec b\cdot\vec c=(0,-3,0)\cdot(1,-1,-1)=0\cdot 1+(-3)\cdot(-1)+0\cdot(-1)=3$$
$$\vec a\cdot\vec c=(1,2,3)\cdot(1,-1,-1)=1\cdot 1+2\cdot(-1)+3\cdot(-1)=-4$$
$$|\vec a|=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$$
$$|\vec b|=\sqrt{0^2+(-3)^2+0^2}=3$$
$$|\vec c|=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{3}$$

$$\cos\alpha=\frac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec a|\cdot|\vec b|}=\frac{-6}{\sqrt{14}\cdot 3}\approx-0{,}535$$

$$\alpha\approx\arccos(-0{,}535)=122{,}3^\circ$$

$$\cos\beta=\frac{\vec b\cdot\vec c}{|\vec b|\cdot|\vec c|}=\frac{3}{3\cdot\sqrt{3}}\approx 0{,}577$$

$$\beta\approx\arccos(0{,}577)=54{,}67^\circ$$

$$\cos\gamma=\frac{\vec a\cdot\vec c}{|\vec a|\cdot|\vec c|}=\frac{-4}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{3}}\approx-0{,}617$$

$$\gamma\approx\arccos(-0{,}617)=128{,}1^\circ \qquad \blacksquare$$

4. Одредити пројекцију вектора $\vec a=(12,6,8)$ на $\vec b=(3,4,0)$, као и пројекцију $\vec b$ на $\vec a$.

решење

$proj_{\vec b}\,\vec a$ је вектор који има исти правац као $\vec b$, а интензитет му је $|\vec a|\cdot\cos\alpha$, где је $\alpha=\angle(\vec a,\vec b)$.

Смер му је исти као $\vec{b}$ ако је $\alpha < 90°$, а супротан од $\vec{b}$ ако је $\alpha > 90°$. Прво рачунамо α.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{(12,6,8)\cdot(3,4,0)}{\sqrt{12^2+6^2+8^2}\cdot\sqrt{3^2+4^2+0^2}} =$$

$$= \frac{12\cdot 3 + 6\cdot 4 + 8\cdot 0}{\sqrt{244}\cdot\sqrt{25}} = \frac{60}{10\sqrt{61}} = \frac{6}{\sqrt{61}} \approx 0{,}768$$

$\alpha = \arccos(0{,}768) \approx 39.83° < 90°$, па $\vec{b}$ и $proj_{\vec{b}}\vec{a}$ имају исти смер.

За правац нам је потребан вектор $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$, тј. јединични вектор истог правца и смера као $\vec{b}$.

$$|\vec{b}| = \sqrt{3^2+4^2+0^2} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$$

Интензитет рачунамо помоћу формуле:

$$|proj_{\vec{b}}\vec{a}| = |\vec{a}|\cdot\cos\alpha = \sqrt{12^2+6^2+8^2}\cdot\frac{6}{\sqrt{61}} = \frac{6\sqrt{244}}{\sqrt{61}} = 6\sqrt{4} = 12$$

Коначно,

$$proj_{\vec{b}}\vec{a} = |proj_{\vec{b}}\vec{a}|\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = 12\cdot\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right) = \left(\frac{36}{5}, \frac{48}{5}, 0\right)$$

Слично рачунамо $proj_{\vec{a}}\vec{b}$.

$\measuredangle(\vec{b},\vec{a}) = \measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = \alpha$, па је

$$proj_{\vec{a}}\vec{b} = |proj_{\vec{a}}\vec{b}|\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = |\vec{b}|\cdot\cos\alpha\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} =$$

$$= 5\cdot\frac{6}{\sqrt{61}}\cdot\frac{(12,6,8)}{\sqrt{244}} = \frac{30}{122}\cdot(12,6,8) = \left(\frac{180}{61}, \frac{90}{61}, \frac{120}{61}\right)$$

5. За $\vec{a}=(1,1,1)$, $\vec{b}=(1,0,-1)$, $\vec{c}=(-1,0,-3)$ одредити

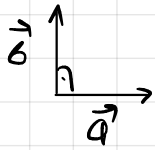
(а) $proj_{\vec{a}}\,\vec{b}$

(б) $proj_{\vec{a}}\,\vec{c}$

решење (а) $\alpha = \measuredangle(\vec{a},\vec{b})$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{(1,1,1)\cdot(1,0,-1)}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} = 0$$

$$\alpha = \arccos 0 = 90^\circ \Rightarrow proj_{\vec{a}}\,\vec{b} = \vec{0}$$



(б) $\beta = \measuredangle(\vec{a},\vec{c})$

$$\cos\beta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|} = \frac{(1,1,1)\cdot(-1,0,-3)}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{10}} = -0{,}73$$

$\beta \approx 136{,}9^\circ > 90^\circ$, па је

$$proj_{\vec{a}}\,\vec{c} = |proj_{\vec{a}}\,\vec{c}|\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = |\vec{c}|\cdot\cos\beta\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} =$$

$$= \sqrt{10}\cdot\frac{-4}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{10}}\cdot\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right) \blacksquare$$

6. За векторе $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(0,-3,0)$, $\vec{c}=(1,-1,-1)$ одредити: $\vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{b}\times\vec{c}$, $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{b}\times\vec{c})$.

решење

$$\vec{a}\times\vec{b} = \left|\begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right| = -3\vec{k} + 9\vec{i} = (9,0,-3)$$

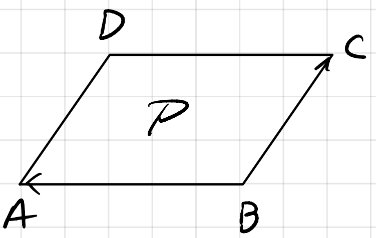
$$\vec{b}\times\vec{c} = \left|\begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ 0 & -3 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right| = 3\vec{i} + 3\vec{k} = (3,0,3)$$

$$(\vec a \times \vec b)\times(\vec b \times \vec c) = \left|\begin{array}{ccc|cc} \vec i & \vec j & \vec k & \vec i & \vec j \\ 9 & 0 & -3 & 9 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right| = -9\vec j - 27\vec i = (-27, -9, 0)$$ ☒

(7.) Одредити површину паралелограма $ABCD$ са теменима $A(1,1,1)$, $B(3,5,8)$, $C(-2,2,4)$. Одредити и координате темена D.

решење

$$P = |\vec{BA} \times \vec{BC}|$$



$$\vec{BA} = \vec{BO} + \vec{OA} = \vec{OA} - \vec{OB} = (1,1,1) - (3,5,8) = (-2,-4,-7)$$

$$\vec{BC} = \vec{BO} + \vec{OC} = \vec{OC} - \vec{OB} = (-2,2,4) - (3,5,8) = (-5,-3,-4)$$

$$\vec{BA} \times \vec{BC} = \left|\begin{array}{ccc|cc} \vec i & \vec j & \vec k & \vec i & \vec j \\ -2 & -4 & -7 & -2 & -4 \\ -5 & -3 & -4 & -5 & -3 \end{array}\right| = 16\vec i + 35\vec j + 6\vec k - 20\vec k - 21\vec i - 8\vec j =$$

$$= -5\vec i + 27\vec j - 14\vec k = (-5, 27, -14)$$

$$P = |\vec{BA} \times \vec{BC}| = \sqrt{(-5)^2 + 27^2 + (-14)^2} = 5\sqrt{38} \approx 30{,}8$$

Координате темена D су координате од $\vec{OD}$.

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD} = \vec{OA} + \vec{BC} = (1,1,1) + (-5,-3,-4) = (-4,-2,-3)$$ ☒

(8.) За векторе $\vec a = (1,1,1)$, $\vec b = (0,3,3)$, $\vec c = (2,0,5)$ израчунати $[\vec a, \vec b, \vec c]$.

решење

$$[\vec a, \vec b, \vec c] = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 2 & 0 \end{array}\right| = 15 + 6 - 6 = 15$$ ☒

⑨ За векторе $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(0,-3,0)$, $\vec{c}=(1,-1,-1)$ одредити: $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c},\vec{a}]+[\vec{c},\vec{a},\vec{b}]$.

решење

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right| = 3+9=12$$

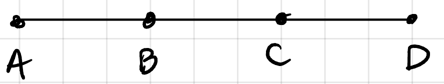
$$[\vec{b},\vec{c},\vec{a}]=\left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & -3 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right| = 3+9=12$$

$$[\vec{c},\vec{a},\vec{b}]=\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right| = 3+9=12$$

Коначно, $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c},\vec{a}]+[\vec{c},\vec{a},\vec{b}]=12+12+12=36$ ▨

⑩ Дуж AD подељена је на 3 једнака дела тачкама B и C. Ако је $A(1,0,1)$, $D(3,3,7)$, одредити координате тачака B и C.

решење



Координате од B и C су управо $\vec{OB}$ и $\vec{OC}$.

$$\vec{OB}=\vec{OA}+\vec{AB}=\vec{OA}+\frac{1}{3}\vec{AD}=\vec{OA}+\frac{1}{3}\left(\vec{AO}+\vec{OD}\right)=$$

$$=\vec{OA}+\frac{1}{3}\left(\vec{OD}-\vec{OA}\right)=\frac{2}{3}\vec{OA}+\frac{1}{3}\vec{OD}=\frac{2}{3}(1,0,1)+\frac{1}{3}(3,3,7)=$$

$$=\left(\frac{2}{3}+1,\ 0+1,\ \frac{2}{3}+\frac{7}{3}\right)=\left(\frac{5}{3},1,3\right)$$

Слично,

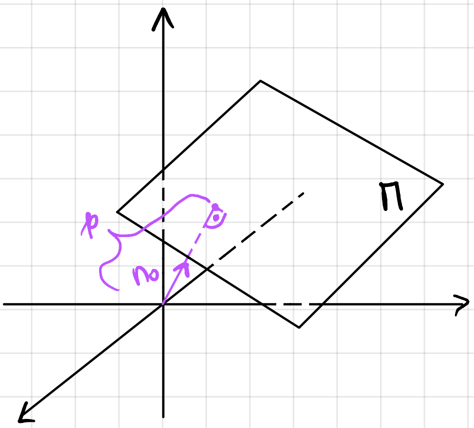
$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{AD} = \vec{OA} + \frac{2}{3}\left(\vec{AO} + \vec{OD}\right) =$$

$$= \vec{OA} + \frac{2}{3}\left(\vec{OD} - \vec{OA}\right) = \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{OD} = \frac{1}{3}(1,0,1) + \frac{2}{3}(3,3,7) =$$

$$= \left(\frac{1}{3} + 2,\ 0 + 2,\ \frac{1}{3} + \frac{14}{3}\right) = \left(\frac{7}{3}, 2, 5\right) \quad \blacksquare$$

Крај задатака

Раван



Раван Π јединствено је одређена дужином нормале из O на Π (означимо ту дужину са p) и јединичним вектором $n_0 = (a, b, c)$ те нормале.

Нормални облик једначине равни Π је:

$$ax + by + cz - p = 0,$$

Општи облик једначине равни Π је

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где је $(A, B, C) = \alpha \cdot \vec{n_0}$, за неко $\alpha \neq 0$ и $D = -\frac{p}{\alpha}$

(тј. општи облик је кад помножимо нормални облик са α).

Ако је $M(x, y, z)$ произвољна тачка на Π и $\vec{r} = (x, y, z)$ њен вектор положаја, добијемо и векторски облик једначине равни:

$$\vec{r} \cdot \vec{n_0} - p = 0.$$

Пример Одредити раван Π чији је јединични вектор нормале дат са $\vec{n_0} = \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right)$ и која је на растојању 10 од O.

$\Pi: \quad \vec{r} \cdot \vec{n_0} - 10 = 0$

$$(x, y, z) \cdot \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right) - 10 = 0$$

$$\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y + \frac{6}{7}z - 10 = 0 \leftarrow$$ нормални облик

Пример Једначину равни $3x + 6y - 2z + 21 = 0$ записати у нормалном облику.

$$\vec{n} = (3, 6, -2)$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{3^2 + 6^2 + (-2)^2} = 7$$

Зато једначину делимо са -7

$$3x + 6y - 2z + 21 = 0 \quad / : (-7)$$

$$-\frac{3}{7}x - \frac{6}{7}y + \frac{2}{7}z - 3 = 0$$ — нормални облик

Дакле $\vec{n_0} = \left(-\frac{3}{7}, -\frac{6}{7}, \frac{2}{7}\right), \quad p = 3$

Векторски облик: $\vec{r} \cdot \vec{n_0} - p = 0$, тј.

$$(x, y, z) \cdot \left(-\frac{3}{7}, -\frac{6}{7}, \frac{2}{7}\right) - 3 = 0$$

Раван можемо задати и нормалом $\vec{n}$ и тачком $M(x_0, y_0, z_0) \in \Pi$. Означимо $\vec{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$. Тада је једначина равни дата са:

$$(\vec{r} - \vec{r_0}) \cdot \vec{n} = 0$$

Пример Одредити нормални облик једначине равни које садржи тачку $M(2,17,3)$ и нормална је на вектор $\vec{n} = (2,2,5)$.

$$\Pi: \quad (\vec{r} - \vec{r_0}) \cdot \vec{n} = 0$$

$$\big((x,y,z) - (2,17,3)\big) \cdot (2,2,5) = 0$$

$$(x-2, y-17, z-3) \cdot (2,2,5) = 0$$

$$2(x-2) + 2(y-17) + 5(z-3) = 0$$

$$2x + 2y + 5z - 53 = 0$$

$|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{33}$ па делимо са $\sqrt{33}$

$$\Pi: \frac{2}{\sqrt{33}}x + \frac{2}{\sqrt{33}}y + \frac{5}{\sqrt{33}}z - \frac{53}{\sqrt{33}} = 0$$ – нормални облик

Пример Одредити раван Π које је паралелна равни $\Gamma: 2x - 3y + 4z - 1 = 0$ и садржи тачку $M(-1,-2,3)$.

$\Gamma \parallel \Pi \Rightarrow$ вектори нормала су им исти $\vec{n} = (2,-3,4)$

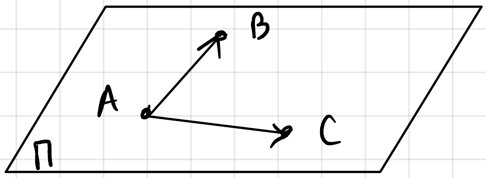
$$\Pi: \quad (\vec{r} - \vec{r_0}) \cdot \vec{n} = 0$$

$$\big((x,y,z) - (-1,-2,3)\big) \cdot (2,-3,4) = 0$$

$$(x+1,\ y+2,\ z-3)\cdot(2,-3,4)=0$$

$$2x-3y+4z-16=0$$ — општи облик

Пример Одредити једначину равни П одређену тачкама $A(1,2,3)$, $B(4,-1,-2)$, $C(4,0,3)$.



знамо да је $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ нормалан на $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, па је то вектор нормале од П.

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(4,-1,-2)-(1,2,3)=(3,-3,-5)$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(4,0,3)-(1,2,3)=(3,-2,0)$$

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left|\begin{array}{ccc|cc}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}&\vec{i}&\vec{j}\\3&-3&-5&3&-3\\3&-2&0&3&-2\end{array}\right|=-15\vec{j}-6\vec{k}+9\vec{k}-10\vec{i}=(-10,-15,3)$$

Нека је $\vec{r}_0=\overrightarrow{OA}$

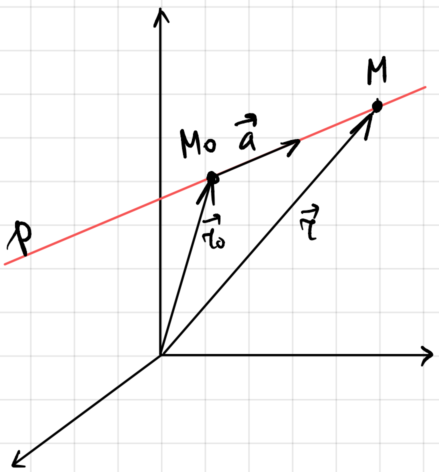
$$П:\ (\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{n}=0$$

$$\big((x,y,z)-(1,2,3)\big)\cdot(-10,-15,3)=0$$

$$(x-1,\ y-2,\ z-3)\cdot(-10,-15,3)=0$$

$$-10x-15y+3z+31=0$$ — општи облик.

Праве



Права p одређена је једном својом тачком $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектором $\vec{a} = (l, m, n)$ коме је паралелна. Нека је $\vec{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$ вектор положаја тачке M_0, а $\vec{r} = (x, y, z)$ вектор положаја произвољне тачке $M \in p$.

Вектор $\overrightarrow{M_0M}$ је паралелан са $\vec{a}$, па је $\overrightarrow{M_0M} = t \cdot \vec{a}$ за неко $t \in \mathbb{R}$. Са слике имамо:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M}$$

одакле добијамо векторску једначину праве:

$$\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{a}$$

Скаларне једначине добијемо када векторе представимо координатама:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(l, m, n),$$

тј. параметарске једначине праве су:

$$x = x_0 + tl$$
$$y = y_0 + tm$$
$$z = z_0 + tn$$

Канонска једначина праве је:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

(само за $l, m, n \neq 0$)

Пример Нека је p права која пролази кроз $M_0(1,2,3)$ и има вектор правца $\vec{a}=(1,4,-2)$. Одредити векторску, канонску и параметарске једначине праве p.

векторска: $\vec{r_0}=(1,2,3)$, $\vec{r}=(x,y,z)$

$$\vec{r}=\vec{r_0}+t\vec{a},\quad t\in\mathbb{R}$$

$$(x,y,z)=(1,2,3)+t(1,4,-2)$$

параметарске:

$$x=1+t$$
$$y=2+4t$$
$$z=3-2t$$

канонска: $$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{-2}$$

Пример Одредити три облика једначине праве p која пролази кроз тачке $A(2,7,0)$ и $B(3,5,-1)$.

Узмимо $\vec{r_0}=\vec{OA}=(2,7,0)$ и $\vec{a}=\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=(1,-2,-1)$

векторска: $$\vec{r}=\vec{r_0}+t\vec{a}$$

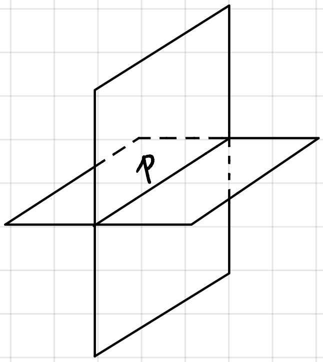
$$(x,y,z)=(2,7,0)+t(1,-2,-1)$$

параметарска:

$$x=2+t$$
$$y=7-2t$$
$$z=-t$$

канонски: $$\frac{x-2}{1}=\frac{y-7}{-2}=\frac{z}{-1}$$

Пример Одредити једначину праве p која је у пресеку равни $3x-y+2z-7=0$ и $x+3y-2z+3=0$.



Означимо ове равни са Π и Γ и њихове векторе нормала са $\vec{n}_\Pi=(3,-1,2)$ и $\vec{n}_\Gamma=(1,3,-2)$.

Права p је нормална и на $\vec{n}_\Pi$ и на $\vec{n}_\Gamma$, па је њен правац

$$\vec{a}=\vec{n}_\Pi\times\vec{n}_\Gamma=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&-1&2\\1&3&-2\end{vmatrix}\begin{matrix}\vec{i}&\vec{j}\\3&-1\\1&3\end{matrix}=2\vec{i}+2\vec{j}+9\vec{k}+\vec{k}-6\vec{i}+6\vec{j}=$$

$$=-4\vec{i}+8\vec{j}+10\vec{k}=(-4,8,10)$$

Треба нам још произвољна тачка са $p=\Pi\cap\Gamma$, па решавамо систем

$$3x-y+2z-7=0 \Rightarrow y=3x+2z-7$$
$$x+3y-2z+3=0$$
$$x+3(3x+2z-7)-2z+3=0$$
$$10x+4z=18 \Rightarrow z=\frac{18-10x}{4}$$

Овај систем има бесконачно много решења:

$$x=\alpha\in\mathbb{R}$$
$$z=\frac{18-10\alpha}{4}$$
$$y=3\alpha+\frac{18-10\alpha}{2}-7$$

па узмемо произвољно α да добијемо једну тачку са p.
Нпр. $\alpha=1$.

$$x=1,\quad y = 3\cdot 1 + \frac{18-10}{2} - 7 = 0,\quad z = \frac{18-10}{4} = 2$$

Дакле, $M_0(1,0,2) \in p$ и правац од p је $\vec{a} = (-4,8,10)$, па је

$$p:\ \frac{x-1}{-4} = \frac{y}{8} = \frac{z-2}{10}.$$

II начин: одредимо 2 тачке $A, B \in p$ и онда као у претходном примеру.

Задаци

1. Дата су темена тетраедра $A(2,1,0)$, $B(1,3,5)$, $C(6,3,4)$, $D(0,-7,8)$. Одредити једначину праве која садржи ивицу AB и средину ивице CD.

решење: Нека је E средиште од CD, тј.

$$\vec{OE} = \vec{OC} + \frac{1}{2}\cdot\vec{CD} = \vec{OC} + \frac{1}{2}(\vec{OD} - \vec{OC}) =$$
$$= \frac{1}{2}\vec{OD} + \frac{1}{2}\vec{OC} = \frac{1}{2}(0,-7,8) + \frac{1}{2}(6,3,4) = (3,-2,6)$$

Дакле, $E(3,-2,6)$.

Како вектори $\vec{AB}$ и $\vec{AE}$ припадају равни, њен вектор нормале је $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AE}$.

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (1,3,5) - (2,1,0) = (-1,2,5)$$
$$\vec{AE} = \vec{OE} - \vec{OA} = (3,-2,6) - (2,1,0) = (1,-3,6)$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{matrix} = 27\vec{i} + 11\vec{j} = (27, 11, 0).$$

Нека је $\vec{r}_0 = \vec{OA} = (2,1,0)$.

$\Pi: \ (\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{n} = 0$

$$\big((x,y,z)-(2,1,0)\big)\cdot(27,11,0)=0$$

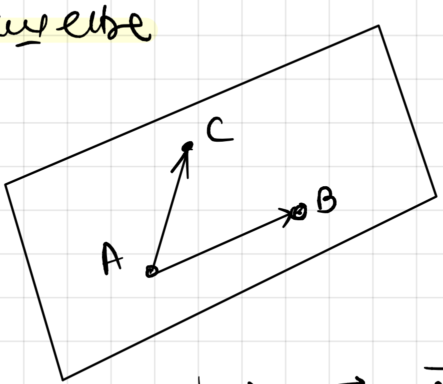
$$(x-2,\ y-1,\ z)\cdot(27,11,0)=0$$

$$27(x-2)+11(y-1)=0$$

$$27x+11y-65=0 \quad \text{– општи облик.} \quad \blacksquare$$

2. Одредити раван која садржи тачке $A(1,1,0)$, $B(0,0,1)$, $C(-1,3,-1)$.

решење



$$\vec{n} = \vec{AB}\times\vec{AC}$$

$$\vec{AB} = \vec{OB}-\vec{OA} = (0,0,1)-(1,1,0) = (-1,-1,1)$$

$$\vec{AC} = \vec{OC}-\vec{OA} = (-1,3,-1)-(1,1,0) = (-2,2,-1)$$

$$\vec{n} = \left|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ -1 & -1 \\ -2 & 2 \end{matrix} = (-1,-3,-4)$$

Нека је $\vec{r}_0 = \vec{OA} = (1,1,0)$.

$\Pi: \ (\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{n} = 0$

$$\big((x,y,z)-(1,1,0)\big)\cdot(-1,-3,-4)=0$$

$$(x-1,\ y-1,\ z)\cdot(-1,-3,-4)=0$$

$$-(x-1)-3(y-1)-4z=0$$

$$-x-3y-4z+4=0 \quad \text{– општи облик} \quad \blacksquare$$

(3.) Одредити праву у пресеку равни $\Pi: x+y+z-1=0$ и $\Gamma: 2x-y-3z+14=0$.

решење $p = \Pi \cap \Gamma$

$$\vec{n}_\Pi = (1,1,1), \quad \vec{n}_\Gamma = (2,-1,-3)$$

$$\vec{a} = \vec{n}_\Pi \times \vec{n}_\Gamma = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{matrix} = (-2,5,-3)$$

правац од p

Одредимо једну тачку на $p = \Pi \cap \Gamma$:

$$\begin{aligned} & x+y+z-1=0 \\ & 2x-y-3z+14=0 \implies y = 2x-3z+14 \\ \hline & 3x-2z+13=0 \implies z = \frac{3x+13}{2} \end{aligned}$$

решење система: $(x,y,z) = \left(\alpha, 2\alpha - 3\cdot\frac{3\alpha+13}{2}+14, \frac{3\cdot\alpha+13}{2}\right)$

Нека је M_0 тачка за $\alpha = 1$:

$$\left(1, 2\cdot 1 - 3\cdot\frac{3\cdot 1+13}{2}+14, \frac{3\cdot 1+13}{2}\right) = (1,-8,8)$$

Дакле, $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0} = (1,-8,8)$, па је

$$p: \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + t\,\vec{a}$$

$$(x,y,z) = (1,-8,8) + t(-2,5,-3). \quad \blacksquare$$

ФУНКЦИЈЕ ВИШЕ ПРОМЕНЉИВИХ

Основне дефиниције и особине

До сада смо се сретали само са функцијама једне променљиве (нпр. $f(x)=x^2$, $f(x)=\sin x, \dots$), али функција може имати и више променљивих.

Пример (1) $f(x,y) = x^2+y^2$

нпр. $f(0,1) = 0^2+1^2 = 1$, $f(3,5) = 3^2+5^2 = 34$

(2) $2NO + O_2 \rightarrow 2NO_2$

Експериментално је добијен закон брзине реакције:

$$r = k \cdot [NO]^2 \cdot [O_2]$$

r је функција 2 променљиве – њене вредности зависе и од количине NO и од количине O_2.

„Математички" запис би био $r(x,y) = kx^2y$, где је x количина NO, а y O_2.

Пример Постоје и функције више од 2 променљиве, нпр.

$$f(x,y,z,t) = xy - z^2 + \sqrt{t} \cdot \sin x.$$

деф. Реална функција две променљиве је пресликавање $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, где је $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

деф. Нека је $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ и $M_0(x_0, y_0) \in D$. Гранична вредност (лимес) функције $f(x,y)$ у M_0 је $a \in \mathbb{R}$ ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall (x,y) \in D) \ \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - a| < \varepsilon .$$

Пишемо:
$$\lim_{(x,y) \to M_0} f(x,y) = a$$

деф. Функција $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ је непрекидна у $M_0(x_0, y_0) \in D$ ако је
$$\lim_{(x,y) \to M_0} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$

Парцијални изводи

Ако у функцији $f(x,y)$ фиксирамо променљиву y, тј. узмемо $y = y_0$ = константа, онда је функција $g(x) = f(x, y_0)$ функција 1 променљиве и можемо јој одредити извод.

нпр. $f(x,y) = x^2 + y^2$, $\quad g(x) = x^2 + \underbrace{y_0^2}_{\text{неки број}} \quad \Rightarrow g'(x) = 2x$

Слично, можемо фиксирати $x = x_0$ и добити функцију по y: $h(y) = f(x_0, y) \Rightarrow h'(y) = 2y$.

Ово су управо парцијални изводи.

деф. Парцијални извод функције $f(x,y)$ по x у тачки (x_0, y_0) је

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} .$$

Парцијални извод функције $f(x,y)$ по y у тачки

(x_0, y_0) је

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0,y_0)}{h}.$$

Пример (1) $f(x,y) = x^2 - 3xy + 8y - 5$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 3y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -3x + 8$$

замислимо да је y константа   замислимо да је x константа

(2) $f(x,y) = \ln(x^2 - xy)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x^2 - xy}\cdot(2x-y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2-xy}\cdot(-x)$$

(3) $f(x,y) = \ln x - 2\sqrt{x-y} + \frac{1}{y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x} - 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x-y}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x-y}}\cdot(-1) - \frac{1}{y^2}$$

Можемо рачунати и изводе вишег реда:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Користимо и ознаке: $f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f'_y = \frac{\partial f}{\partial y}$, $f''_{xy} = \frac{\partial f^2}{\partial x \partial y}$, итд.

Пример Одредити $f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{yy}$ за $f(x,y) = x^5 + xy - \ln(x+y)$

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 5x^4 + y - \frac{1}{x+y} \quad , \quad f'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = x - \frac{1}{x+y}$$

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(f'_x\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(5x^4 + y - \frac{1}{x+y}\right) = 20x^3 + \frac{1}{(x+y)^2}$$

$$f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(f'_y\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x - \frac{1}{x+y}\right) = 1 + \frac{1}{(x+y)^2}$$

$$f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(f'_x\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(5x^4 + y - \frac{1}{x+y}\right) = 1 + \frac{1}{(x+y)^2}$$

$$f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(f'_y\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x - \frac{1}{x+y}\right) = \frac{1}{(x+y)^2}$$

Пример За $f(x,y) = \sqrt{x^2+y} - \ln y$ одредити $f'_x(1,3)$ и $f''_{xy}(0,4)$.

Прво одредимо f'_x и f''_{xy}, па онда убацимо вредности.

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y}} \Rightarrow f'_x(1,3) = \frac{1}{\sqrt{1^2+3}} = \frac{1}{2}$$

$$f'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y}} - \frac{1}{y}$$

$$f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(f'_y\right) = \frac{\partial}{\partial x}\Bigg(\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x^2+y}}}_{\frac{1}{2}\cdot(x^2+y)^{-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{y}\Bigg) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(x^2+y)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x =$$

$$= \frac{-x}{2\sqrt{(x^2+y)^3}} \Rightarrow f''_{xy}(0,4) = \frac{-0}{2\sqrt{(0^2+4)^3}} = 0$$

Пример За $f(x,y,z) = xy + yz - z^3$ одредити све парцијалне изводе 2. реда.

$$f'_x = y, \quad f'_y = x + z, \quad f'_z = y - 3z^2$$

$$f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(f'_x) = 0, \quad f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}(f'_y) = 1, \quad f''_{xz} = \frac{\partial}{\partial x}(f'_z) = 0$$

$$f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial y}(f'_x) = 1, \quad f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(f'_y) = 0, \quad f''_{yz} = \frac{\partial}{\partial y}(f'_z) = 1$$

$$f''_{zx} = \frac{\partial}{\partial z}(f'_x) = 0, \quad f''_{zy} = \frac{\partial}{\partial z}(f'_y) = 1, \quad f''_{zz} = \frac{\partial}{\partial z}(f'_z) = 6z$$

Пример За $f(x,y,z) = \sqrt{xyz}$ одредити $f'''_{zyx}(1,2,8)$

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{yz}{2\sqrt{xyz}},$$

$\cdot\sqrt{xyz}$

$$f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{yz}{2\sqrt{xyz}}\right) = \frac{z \cdot 2\sqrt{xyz} - yz \cdot \frac{1}{\sqrt{xyz}}}{4xyz} = \frac{2xyz^2 - yz}{4xyz\sqrt{xyz}} =$$

$\cdot\sqrt{xyz}$

$$= \frac{\cancel{yz}(2xz-1)}{4x\cancel{yz}\sqrt{xyz}} = \frac{2xz-1}{4x\sqrt{xyz}}$$

$\cdot\sqrt{xyz}$

$$f'''_{zyx} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2xz-1}{4x\sqrt{xyz}}\right) = \frac{2x \cdot 4x\sqrt{xyz} - (2xz-1)\cdot\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{xyz}}}{16x^3yz} =$$

$\cdot\sqrt{xyz}$

$$= \frac{8x^3yz - x(2xz-1)}{16x^3yz\sqrt{xyz}} = \frac{x(8x^2yz - 2xz + 1)}{16x^3yz\sqrt{xyz}} =$$

$$= \frac{8x^2yz - 2xz + 1}{16x^2yz\sqrt{xyz}}$$

$128 - 16 + 1 = 113$

$$f'''_{zyx}(1,2,8) = \frac{8 \cdot 1^2 \cdot 2 \cdot 8 - 2 \cdot 1 \cdot 8 + 1}{16 \cdot 1^2 \cdot 2 \cdot 8 \cdot \sqrt{1 \cdot 2 \cdot 8}} = \frac{113}{1024}$$

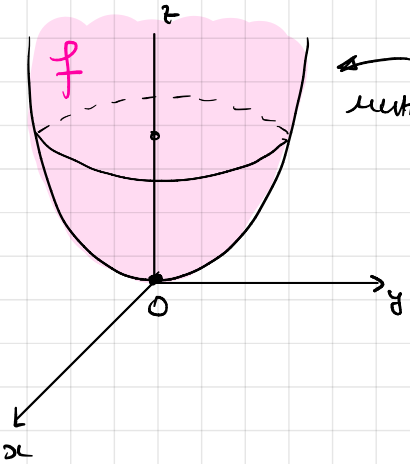
Локални екстремуми функције више променљивих

деф. Функција n променљивих $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ има локални максимум (минимум) у тачки $(a_1, \dots, a_n) \in D$ ако постоји околина U тачке $(a_1, \dots, a_n)$ т.д. за свако $(x_1, \dots, x_n) \in U \subseteq D$ важи

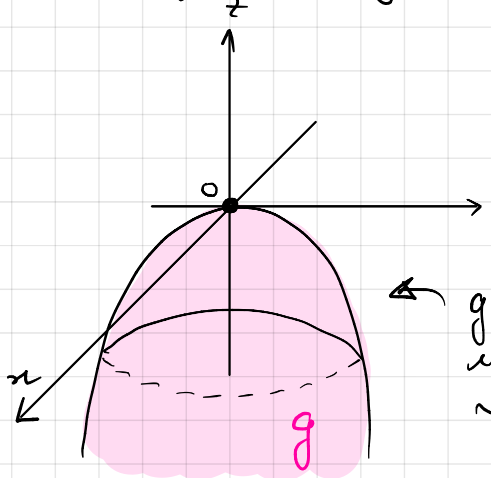
$$f(x_1, \dots, x_n) \leq f(a_1, \dots, a_n) \quad \left(f(x_1, \dots, x_n) \geq f(a_1, \dots, a_n) \right).$$

Пример $f(x,y) = x^2 + y^2$

$g(x) = -x^2 - y^2$



f има минимум у $(0,0)$



g има максимум у $(0,0)$

деф. Нека је $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Тачка $(x_0, y_0) \in D$ т.д.

$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \quad и \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

зове се стационарна тачка функције f.

Стационарне тачке су кандидати за локалне екстремуме.

Пример $f(x,y) = x \cdot y$, $f'_x = y$, $f'_y = x$

$\Rightarrow$ $(0,0)$ је стационарна тачка.

Пример $f(x,y) = x^2 - y^2 + 3x + 4y + xy$

$f'_x = 2x + 3 + y$, $f'_y = -2y + 4 + x$

Да би смо одредили стационарне тачке, решавамо систем

$$\begin{array}{l} 2x + 3 + y = 0 \Rightarrow y = -2x - 3 \\ -2y + 4 + x = 0 \\ \hline -2(-2x-3) + 4 + x = 0 \\ \hline 5x + 10 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow y = -7 \end{array}$$

$\Rightarrow (-2,-7)$ је стационарна тачка.

Теорема Нека је $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ и $(x_0,y_0) \in D$ стационарна тачка функције f и нека постоје сви парцијални изводи другог реда. Тада f има локални максимум у (x_0,y_0) ако је

$$f''_{xx}(x_0,y_0) < 0 \quad \text{и} \quad A = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0) \\ f''_{yx}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} > 0,$$

док f има локални минимум у (x_0,y_0) ако је

$$f''_{xx}(x_0,y_0) > 0 \quad \text{и} \quad A = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0) \\ f''_{yx}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} > 0.$$

Ако је $A < 0$, f нема лок. екстр. у (x_0,y_0), а ако је $A = 0$ не знамо да ли је (x_0,y_0) лок. екстремум.

Пример $f(x,y) = x^2 - y^2 + 3x + 4y + xy$

$f'_x = 2x + 3 + y$, $f'_y = -2y + 4 + x$

У претходном примеру смо одредили да је $(-2,-7)$ стац. т.

$$f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(f'_x) = 2, \quad f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}(f'_y) = 1$$

$$f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial y}(f'_x) = 1, \quad f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(f'_y) = -2$$

$\Rightarrow \quad A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 < 0$, па f нема лок. екстремум у $(-2,-7)$

Теорема Нека је $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$ и $(x_0,y_0,z_0) \in D$ стационарна тачка функције f и нека постоје сви парцијални изводи другог реда. Тада f има локални максимум у (x_0,y_0,z_0) ако је

$$f''_{xx}(x_0,y_0,z_0) < 0 \qquad A = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0,z_0) & f''_{xy}(x_0,y_0,z_0) \\ f''_{yx}(x_0,y_0,z_0) & f''_{yy}(x_0,y_0,z_0) \end{vmatrix} > 0$$

$$\text{и} \quad B = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0,z_0) & f''_{xy}(x_0,y_0,z_0) & f''_{xz}(x_0,y_0,z_0) \\ f''_{yx}(x_0,y_0,z_0) & f''_{yy}(x_0,y_0,z_0) & f''_{yz}(x_0,y_0,z_0) \\ f''_{zx}(x_0,y_0,z_0) & f''_{zy}(x_0,y_0,z_0) & f''_{zz}(x_0,y_0,z_0) \end{vmatrix} < 0$$

док f има локални минимум (x_0,y_0,z_0) ако је

$f''_{xx}(x_0,y_0,z_0) > 0$, $A > 0$ и $B > 0$.

Ако је $A < 0$, f нема лок. екстр. у (x_0,y_0,z_0), а ако је $A = 0$ не знамо да ли је (x_0,y_0,z_0) лок. екстремум.

Пример $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z$

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2 \\ f'_y &= 2y - 6 = 0 \Rightarrow y = 3 \\ f'_z &= 2z + 2 = 0 \Rightarrow z = -1 \end{aligned}\right\} \quad (-2,3,-1) \text{ је стационарна тачка}$$

$$f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(f'_x) = 2, \quad f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}(f'_y) = 0, \quad f''_{xz} = \frac{\partial}{\partial x}(f'_z) = 0$$

$$f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial y}(f'_x) = 0, \quad f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(f'_y) = 2, \quad f''_{yz} = \frac{\partial}{\partial y}(f'_z) = 0$$

$$f''_{zx} = \frac{\partial}{\partial z}(f'_x) = 0, \quad f''_{zy} = \frac{\partial}{\partial z}(f'_y) = 0, \quad f''_{zz} = \frac{\partial}{\partial z}(f'_z) = 2$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} A = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \\ B = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0 \\ f''_{xx}(-2,3,1) = 2 > 0 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ $(-2,3,-1)$ је тачка локалног минимума и он је једнак

$$f(-2,3,-1) = (-2)^2 + 3^2 + (-1)^2 + 4\cdot(-2) - 6\cdot 3 + 2\cdot(-1) = = -14$$

Задаци

(1.) Испитати локалне екстремуме функције $f(x,y) = x^4 - x^2 - 2xy$

решење $f'_x = 4x^3 - 2x - 2y = 0, \quad f'_y = -2x = 0$

$\Rightarrow$ $(0,0)$ је стационарна тачка

$$f''_{xx} = 12x^2 - 2, \quad f''_{xy} = -2, \quad f''_{yx} = -2, \quad f''_{yy} = 0$$

$$f''_{xx}(0,0) = 12\cdot 0^2 - 2 = -2$$

$$\Rightarrow A = \begin{vmatrix} f''_{xx}(0,0) & f''_{xy}(0,0) \\ f''_{yx}(0,0) & f''_{yy}(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0,$$ па

функција нема екстр. у $(0,0)$. $\boxtimes$

(2.) Испитати локалне екстремуме функције $f(x,y) = x \cdot \ln y + x$

решење $f'_x = \ln y + 1 = 0 \Rightarrow \ln y = -1 \Rightarrow y = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$f'_y = \frac{x}{y} = 0 \Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow \left(0, \frac{1}{e}\right)$ је стационарна тачка

$f''_{xx} = 0, \quad f''_{xy} = \frac{1}{y}, \quad f''_{yx} = \frac{1}{y}, \quad f''_{yy} = -\frac{x}{y^2}$

$f''_{xy}\left(0, \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{\frac{1}{e}} = e, \quad f''_{yx}\left(0, \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{\frac{1}{e}} = e, \quad f''_{yy}\left(0, \frac{1}{e}\right) = \frac{0}{\frac{1}{e}} = 0$

$A = \begin{vmatrix} 0 & e \\ e & 0 \end{vmatrix} = -e^2 < 0$ то $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ није екстремум ☒

(3.) Испитати локалне екстремуме функције $f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.

решење $f'_x = 3x^2 - 6y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2$

$f'_y = 24y^2 - 6x = 0$

$24 \cdot \left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 - 6x = 0$

$24 \cdot \frac{1}{4}x^4 - 6x = 0$

$6x^4 - 6x = 0 \quad / :6$

$x^4 - x = 0$

$x(x^3 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ или $x = \sqrt[3]{1} = 1$

$y = \frac{1}{2}x^2 = 0 \qquad y = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Имамо 2 стационарне тачке $(0,0)$ и $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

$f''_{xx} = 6x$, $f''_{xy} = -6$, $f''_{yx} = -6$, $f''_{yy} = 48y$

Прво испитујемо $(0,0)$:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = -36 < 0, \text{ па } (0,0) \text{ није екстремум}$$

Сада $(1, \frac{1}{2})$:

$$A = \begin{vmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 24 \end{vmatrix} = 108 > 0$$

$$f''_{xx}\left(1, \frac{1}{2}\right) = 6 > 0$$

$\Rightarrow$ $(1, \frac{1}{2})$ је тачка локалног минимума и тај мин. је $f(1, \frac{1}{2}) = 4$ ▨

4. Испитати локалне екстремуме функције

$$f(x,y) = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$$

решење

$$f'_x = \sqrt{y} - 2x + 6 = 0$$

$$f'_y = \frac{x}{2\sqrt{y}} - 1 = 0 \Rightarrow x = 2\sqrt{y}$$

$$\sqrt{y} - 2 \cdot 2\sqrt{y} + 6 = 0$$

$$-3\sqrt{y} = -6$$

$$\sqrt{y} = 2 \quad /^2$$

$$y = 4 \Rightarrow x = 2\sqrt{y} = 4$$

Дакле, имамо једну стационарну тачку $(4,4)$.

$f''_{xx} = -2, \quad f''_{xy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad f''_{yx} = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad f''_{yy} = -\frac{x}{4y\sqrt{y}}$

$f''_{xy}(4,4) = f''_{yx}(4,4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$

$f''_{yy}(4,4) = -\frac{4}{4\cdot 4\cdot\sqrt{4}} = -\frac{1}{8}$

$$\left.\begin{array}{l} A = \begin{vmatrix} -2 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{vmatrix} = \frac{3}{16} > 0 \\ f''_{xx}(4,4) = -2 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$(4,4)$ је тачка лок. макс. и он је једнак $f(4,4) = 15$. ◻

⑤ Испитати локалне екстремуме функције $f(x,y) = \sin x + \sin y$.

решење

$f'_x = \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

$f'_y = \cos y = 0 \Rightarrow y = \frac{\pi}{2} + l\pi, \ l \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ имамо бесконачно много стац. тачака $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + l\pi\right)$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

$f''_{xx} = -\sin x, \quad f''_{xy} = 0 = f''_{yx}, \quad f''_{yy} = -\sin y$

$f''_{xx}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + l\pi\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = -(-1)^k = (-1)^{k+1}$

$f''_{yy}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + l\pi\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + l\pi\right) = (-1)^{l+1}$

$$A = \begin{vmatrix} (-1)^{k+1} & 0 \\ 0 & (-1)^{l+1} \end{vmatrix} = (-1)^{l+k+2}$$

1° $l+k$ парно: $A = 1 > 0$

1° 1' k парно: $(-1)^{k+1} < 0 \Rightarrow \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + l\pi\right)$ је лок. макс.

1° 2' k непарно: $(-1)^{k+1} > 0 \Rightarrow \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + l\pi\right)$ је лок. мин.

2° $k+l$ непарно: $A=-1<0 \Rightarrow \left(\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+l\pi\right)$ није лок. екстремум ▨

6. Испитати локалне екстремуме функције

$$f(x,y,z) = -2x^2 - y^2 + z^2 - x - 2y - 6z$$

решење

$$f'_x = -4x - 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$$

$$f'_y = -2y - 2 = 0 \Rightarrow y = -1$$

$$f'_z = 2z - 6 = 0 \Rightarrow z = 3$$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{4}, -1, -3\right)$ је стационарна тачка

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 16$$

$\Rightarrow B = 16 > 0$, $A = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 8 > 0$, $f''_x = -4 < 0$, па је $\left(\frac{1}{4}, -1, -3\right)$ тачка локалног максимума и он је једнак

$$f\left(\frac{1}{4}, -1, -3\right) = -2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 - (-1)^2 + (-3)^2 - \frac{1}{4} - 2\cdot(-1) - 6\cdot(-3) = \frac{221}{8}$$ ▨

7. Испитати локалне екстремуме функције

$$f(x,y,z) = x^3 + y^3 - z^4 + xy - 4z$$

решење

$$f'_x = 3x^2 + y = 0$$

$$f'_y = 3y^2 + x = 0$$

$$f'_z = -4z^3 - 4 = 0 \Rightarrow z^3 = -1 \Rightarrow z = -1$$

$$3x^2 + y = 0 \Rightarrow y = -3x^2$$
$$y^2 + x = 0$$

$$3\cdot(-3x^2)^2 + x = 0$$

$$3\cdot 9x^4 + x = 0$$

$x(27x^3+1) = 0 \Rightarrow x = 0$ или $x^3 = -\frac{1}{27}$, тј. $x = -\frac{1}{3}$

Имамо 2 стац. тачке

$x=0,\ y=-3x^2=0,\ z=-1$ и $x=-\frac{1}{3},\ y=-3x^2=-\frac{1}{3},\ z=-1$

тј. $(0,0,-1)$ и $\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-1\right)$.

$f''_{xx} = 6x \qquad f''_{xy} = 1 \qquad f''_{xz} = 0$

$f''_{yx} = 1 \qquad f''_{yy} = 2y \qquad f''_{yz} = 0$

$f''_{zx} = 0 \qquad f''_{zy} = 0 \qquad f''_{zz} = -12z^2$

Прво испитујемо $(0,0,-1)$:

$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$, па тачка није екстрем

Сада $\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-1\right)$:

$$A = \begin{vmatrix} 6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) & 1 \\ 1 & 2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) \end{vmatrix} = \frac{1}{3} > 0$$

$-12\left(\frac{1}{3}\right)$

$$B = \begin{vmatrix} 6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) & 1 & 0 \\ 1 & 2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & -12\cdot(-1)^2 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

$$f''_{xx}\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-1\right) = 6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = -2 < 0$$

Дакле, $f'_{xx} < 0$, $A > 0$, $B < 0$, па је $\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-1\right)$ тачка локалног максимума и он је једнак

$$f\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-1\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - (-1)^4 + \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) - 4\cdot(-1) = \frac{82}{27} \quad \blacksquare$$