МАТЕМАТИКА

Предавања – ПРВИ ДЕО

увод : 1 - 11
низови : 12 - 14
редови : 14 – 22
функције : 23 - 40
интеграли : 41 – 48

Математичка логика

Деф. Исказ је тврђење које има истинитосну вредност $(\top, \bot)$

Пример (1) Београд је главни град Србије $(\top)$

(2) Копенхаген је главни град Србије $(\bot)$

Исказе означавамо са: $p, q, r, \ldots$

Логичке операције

(1) конјункција	(„и")	$\wedge$	} бинарне
(2) дисјункција	(„или")	$\vee$	
(3) импликација	(„ако, онда")	$\Rightarrow$	
(4) еквиваленција	(„акко")	$\Leftrightarrow$	
(5) негација	(„не")	$\neg$	} унарна

Таблице:

$p \wedge q$

p \ q	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

$p \vee q$

p \ q	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$

$p \Rightarrow q$

p \ q	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$

$p \Leftrightarrow q$

p \ q	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

p	$\neg p$
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

Пример (1) „Ако добијем 10 из математике ићи ћу на море"

p = „добићу 10 из математике", q = „ићи ћу на море"

$p \Rightarrow q$

(2) „Купићу хлеб или кифлу и јогурт"

p = купићу хлеб, q = купићу кифлу, r = купићу јогурт

$(p \vee q) \wedge r$

Деф. Сложени исказ који је увек тачан назива се тautологијом.

Пример: „Данас је четвртак или данас није четвртак"

p $\neg p$

$p \vee \neg p$ је тautологија

Квантификатори сваки $\forall$, постоји $\exists$

Пример (1) $x^2 \geq 0$ за свако реално x пишемо: $(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 \geq 0$

(2) Постоји реалан број x чији је квадрат 7: $(\exists x \in \mathbb{R})\ x^2 = 7$

Скупови

Скуп се састоји од елемената.
Скупови: $A, B, C, \dots$ елементи: $a, b, c, \dots, x, y, z, \dots$

$x \in A \iff$ „x припада A"
$x \notin A \iff$ „x не припада A"

Скуп је коначан ако има коначно много елемената, а иначе је бесконачан.
$|A|$ = бр. елемената скупа A

Пример A је скуп целих бројева од 5 до 11

$$A = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}, \quad |A| = 7$$

Користимо ознаку: $A = \{x \mid P(x)\}$ = скуп свих x за које важи $P(x)$

Пример $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge 7 \leq x \leq 9\} = \{7, 8, 9\}$

Скупови су једнаки ако имају све исте елементе. Празан скуп $\emptyset$.
A је подскуп B ако су сви ел. из A садржани у B. Ознака: $A \subseteq B$.
Операције:

(1) унија $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
(2) пресек $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
(3) разлика $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
(4) комплемент од A (у односу на U) $C_U A = U \setminus A$
(ако се U подразумева онда A^c)

Пример $A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{2, 4, 6\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}, \quad A \cap B = \{2\}, \quad A \setminus B = \{1, 3\}, \quad B \setminus A = \{4, 6\}$

деф. Партитивни скуп скупа A је скуп свих његових подскупова $\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$

деф Уређен пар (a, b) је скуп од два елемента у коме се зна редослед

Пример $\{1, 2\} = \{2, 1\}$, али $(1, 2) \neq (2, 1)$

деф. Декартов производ скупова A и B је скуп свих уређених парова (a, b) где је $a \in A, b \in B$, тј.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Функције, операције, релације

деф. Функција (пресликавање) f из скупа A у скуп B је правило које сваком ел. из A додели тачно један ел. из B.

ознака: $f: A \to B$, A = домен, B = кодомен; ознака за домен: $\mathcal{D}_f$

Слика функције f је скуп свих вредности које f може да узме:

$$f(\mathcal{D}_f) = \{ f(x) \mid x \in \mathcal{D}_f \}$$

Пример (1) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x^2 + 4$

(2) $f: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$

деф. Композиција функција $f: A \to B$ и $g: B \to C$ је $g \circ f : A \to C$ дата са

$$(g \circ f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} g(f(x))$$

Пример (1) $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2 + 1$, $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(f \circ g)(x) = \sin(x^2+1)$, $(g \circ f)(x) = \sin^2 x + 1$

деф. Кажемо да је $f: A \to B$ парна ако $f(-x) = f(x)$ за свако $x \in A$. f је непарна ако $f(-x) = -f(x)$ за свако $x \in A$.

деф. Бинарна операција је пресликавање $*: A \times A \to A$

ознака: $a * b = *(a, b)$

нпр. $+, -, \cdot, :$

деф. Бинарна релација ρ на скупу A је подскуп скупа $A \times A$

пишемо $x \rho y$ ако је $(x, y) \in \rho$

нпр. $\geq, \leq, =$

Скупови бројева

① Скуп природних бројева $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

② Скуп целих бројева $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

③ Скуп рационалних бројева $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$

④ Скуп ирационалних бројева $\mathbb{I} = \{x \mid x \notin \mathbb{Q}\}$ (нпр. $\sqrt{2}$, π)

⑤ Скуп реалних бројева $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

Пример Решити једначину $x^2 = 4$

(1) у $\mathbb{R}$: $x^2 - 4 = 0$

$(x-2)(x+2) = 0$

$x = \pm 2$ $\Rightarrow$ имамо 2 решења $x = -2$ и $x = 2$

(2) у $\mathbb{Z}$: исто све

(3) у $\mathbb{N}$: $2 \in \mathbb{N}$, али $-2 \notin \mathbb{N}$, па имамо само једно решење $x = 2$.

Још неке ознаке: $[a, b] = \{x \mid a \le x \le b\}$

$[a, b) = \{x \mid a \le x < b\}$

$(a, b]$, (a, b) - слично

$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$

$[a, +\infty) = \{x \mid x \ge a\}$

$(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$ - слично

$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

Комплексни бројеви

i = имагинарна јединица

$i^2 = -1$ (неформално „$i = \sqrt{-1}$")

скуп комплексних бројева $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

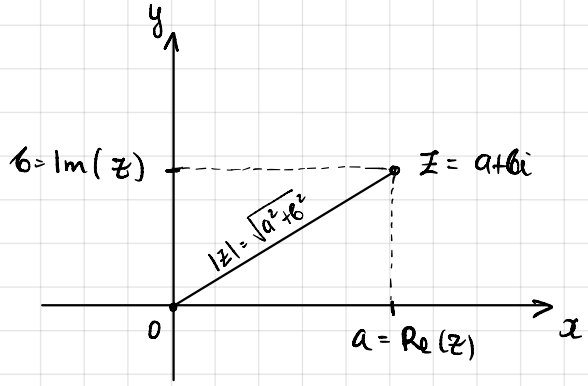
сабирање: $(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$

множење: $(a+bi)(c+di) = ac - bd + (ad+bc)i$

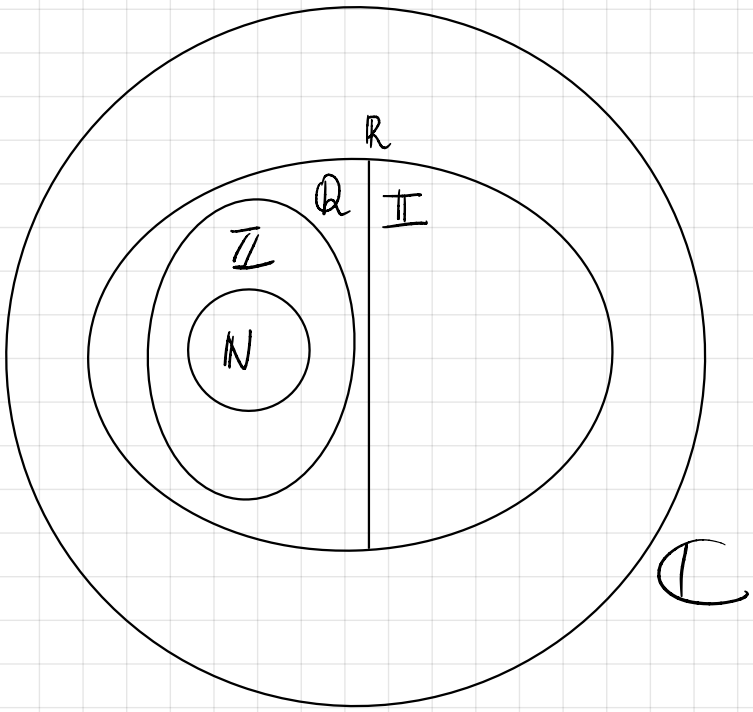
Сваки реалан број је комплексан, нпр. $5 = 5 + 0 \cdot i$

Ако је $z = a + bi$ дефинишемо:

- реални део од z: $Re(z) = a$
- имагинарни део од z: $Im(z) = b$
- модуо од z: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$



Илустрација:



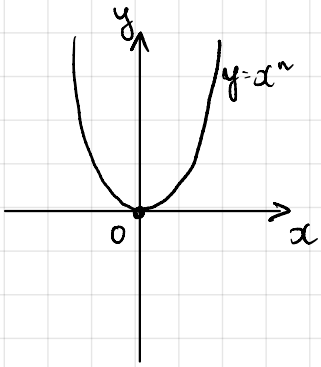
$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

$$\mathbb{I} \subseteq$$

Елементарне функције

① Степена функција $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

n парно

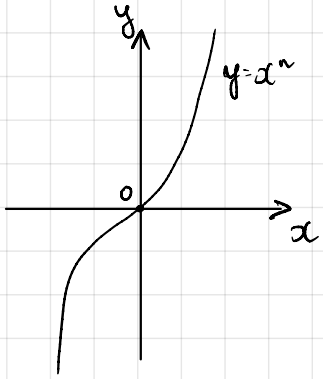


f је парна

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

$f(\mathcal{D}_f) = [0, +\infty)$

n непарно



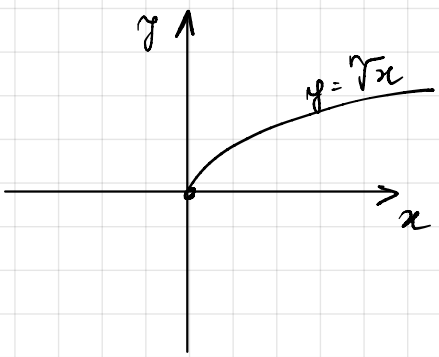
f је непарна

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

$f(\mathcal{D}_f) = \mathbb{R}$

② Корена функција $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

n парно

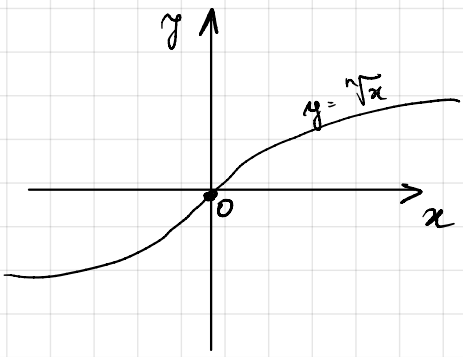


f није ни парна ни непарна

$\mathcal{D}_f = [0, +\infty)$

$f(\mathcal{D}_f) = [0, +\infty)$

n непарно



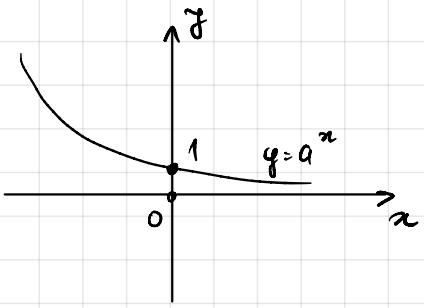
f је непарна

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

$f(\mathcal{D}_f) = \mathbb{R}$

③ Експоненцијална функција $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$

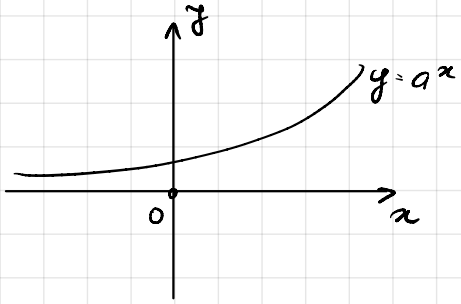
$a \in (0,1)$:



$D_f = \mathbb{R}$

$f(D_f) = (0, +\infty)$

$a > 1$:

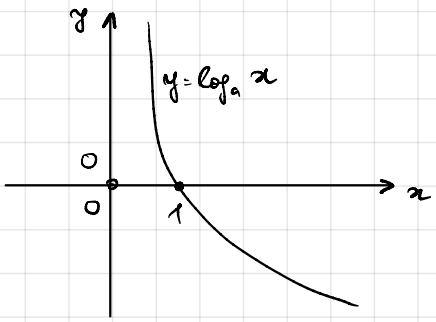


$D_f = \mathbb{R}$

$f(D_f) = (0, +\infty)$

④ Логаритамска функција $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$

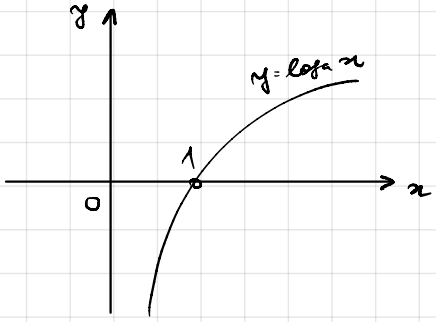
$a \in (0,1)$:



$D_f = (0, +\infty)$

$f(D_f) = \mathbb{R}$

$a > 1$:



$D_f = (0, +\infty)$

$f(D_f) = \mathbb{R}$

Спец. за $a = e \approx 2,72$ Ојлерова константа: $\log_e x = \ln x$

Веза експоненцијалне и логаритамске функције:

$$\log_a x = b \iff a^b = x$$

особине експоненцијалне и логаритамске функције:

1) $a^0 = 1$

2) $a^1 = a$

3) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

4) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

5) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

6) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$

7) $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

1) $\log_a 1 = 0$

2) $\log_a a = 1$

3) $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

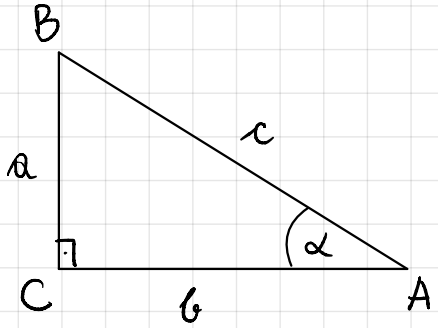
4) $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

5) $\log_a (a^y) = y \log_a x$

6) $\log_{a^y} x = \frac{1}{y} \log_a x$

7) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

Тригонометријске функције



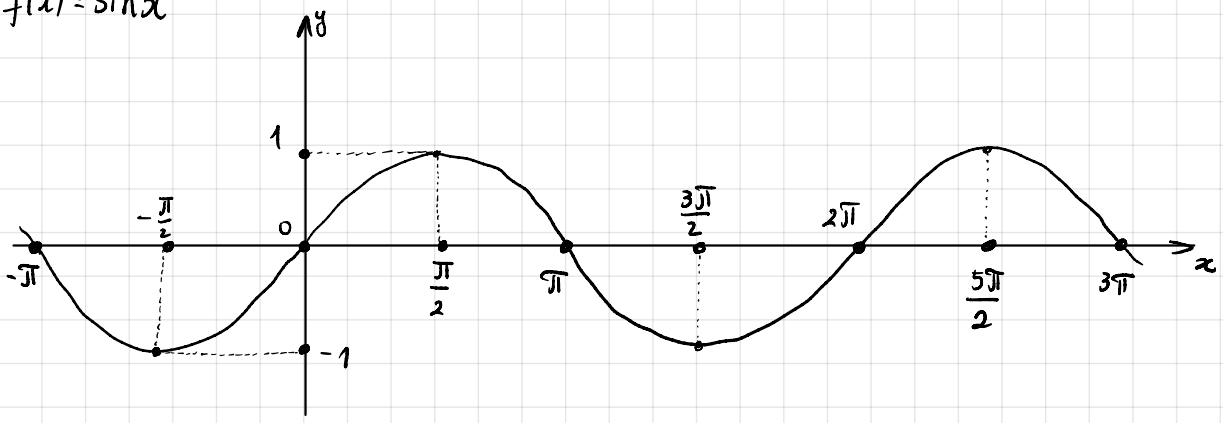
„синус" → $\sin\alpha = \frac{\text{наспрамна катета}}{\text{хипотенуза}} = \frac{a}{c}$

„косинус" → $\cos\alpha = \frac{\text{налегла катета}}{\text{хипотенуза}} = \frac{b}{c}$

„тангенс" → $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{наспрамна катета}}{\text{налегла катета}} = \frac{a}{b}$

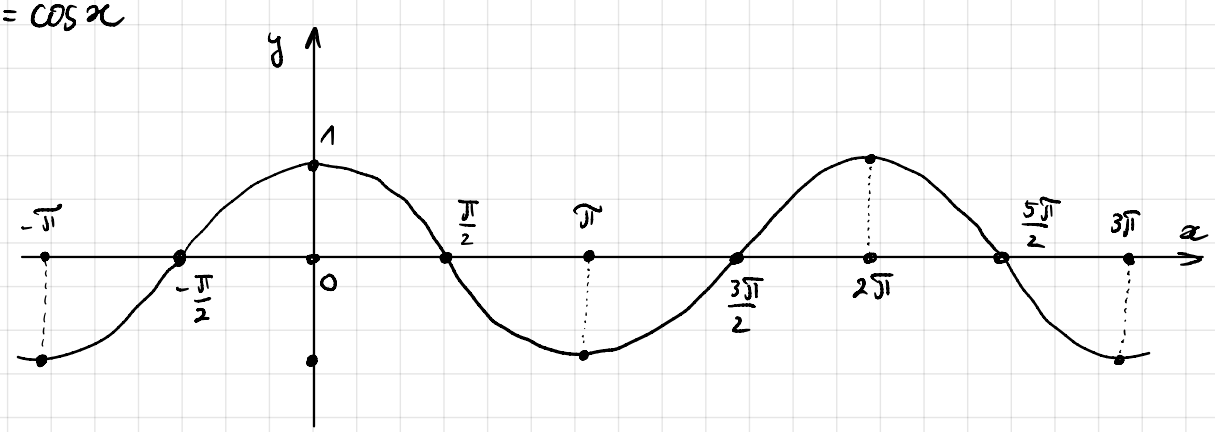
„котангенс" → $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\text{налегла катета}}{\text{наспрамна катета}} = \frac{b}{a}$

① $f(x) = \sin x$



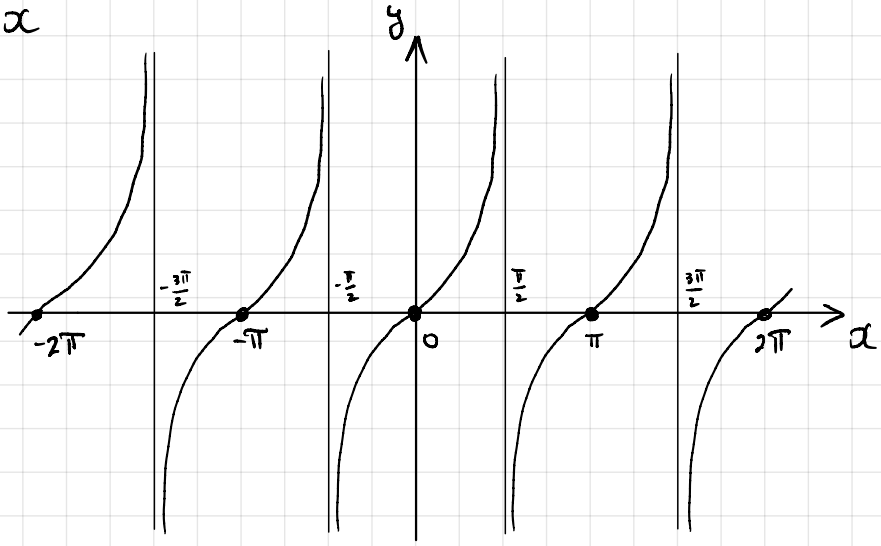
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $f(\mathcal{D}_f) = [-1, 1]$, f је непарна

② $f(x) = \cos x$



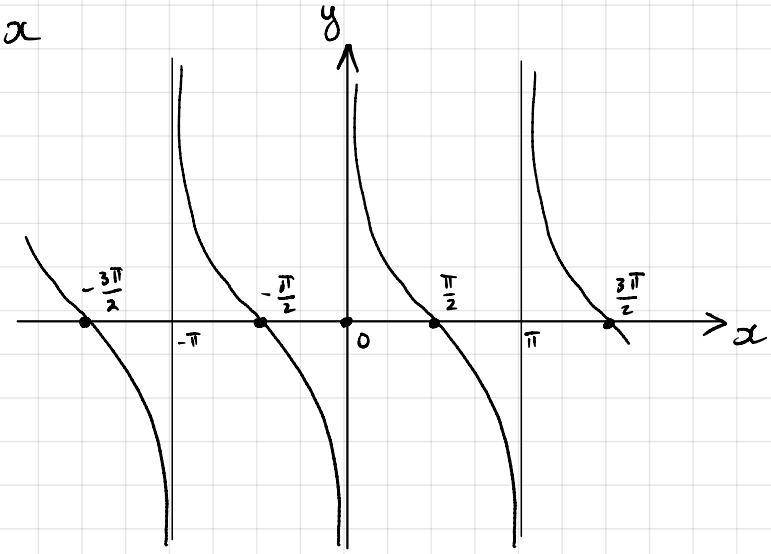
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $f(\mathcal{D}_f) = [-1, 1]$, f je sudá

③ $f(x) = \operatorname{tg} x$



$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $f(\mathcal{D}_f) = \mathbb{R}$, f je nesudá

④ $f(x) = \operatorname{cotg} x$



$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $f(\mathcal{D}_f) = \mathbb{R}$, f je nesudá

Неки тригонометријски идентитети

① $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

② $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

③ $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

④ $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

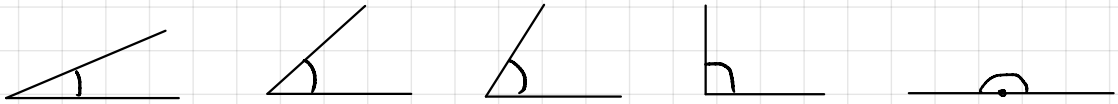
⑤ $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$

⑥ $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

⑦ $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$

⑧ $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$

Веза између радијана и степени: $2\pi \text{ rad} = 360°$



$30° = \frac{\pi}{6}$ $45° = \frac{\pi}{4}$ $60° = \frac{\pi}{3}$ $90° = \frac{\pi}{2}$ $180° = \pi$

Таблица неких вредности

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	није дефинисано	0	0
$\operatorname{ctg} x$	није дефинисано	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	није дефинисано	није дефинисано

Биномна формула

Став За све $a, b \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ важи

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

где је $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$

$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ ← „n факторијел"

нпр. $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

$\binom{n}{k}$ ← „биномни коефицијенти"

нпр. $\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$

Пример (1) $n=2$: $(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(2) $n=3$: $(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$

Квадратна једначина

Решења квадратне једначине $ax^2 + bx + c = 0$ су:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1° ако $b^2 - 4ac > 0$, онда имамо 2 различита реална решења

2° ако $b^2 - 4ac = 0$, онда имамо 1 реално решење

3° ако $b^2 - 4ac < 0$, онда имамо 2 различита комплексна решења

Низови

деф. Низ реалних бројева је функција $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Користимо ознаку $a_n = a(n)$ и бројеве $a_1, a_2, a_3, \ldots$ називамо члановима низа. Низ кратке означавамо са (a_n)

Пример $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ је низ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

деф. (1) Низ (a_n) је ограничен одозго (одоздо) ако постоји $M \in \mathbb{R}$ такав да је $a_n \leq M$ ($a_n \geq M$) за све $n \in \mathbb{N}$.

(2) Низ је ограничен, ако је огр. и одозго и одоздо.

(3) Низ (a_n) је (строго) растући ако $a_{n+1} \geq a_n$ ($a_{n+1} > a_n$), $n \in \mathbb{N}$.

(4) Низ (a_n) је (строго) опадајући ако $a_{n+1} \leq a_n$ ($a_{n+1} < a_n$), $n \in \mathbb{N}$.

(5) Низ (a_n) је монотон ако је растући или опадајући.

(6) Низ (a_n) је позитиван (негативан) ако $a_n > 0$ ($a_n < 0$), $n \in \mathbb{N}$.

Пример (1) $a_n = \frac{1}{n}$ је опадајући, позитиван и ограничен

(2) $a_n = n$ је огр. одоздо, растући, позитиван

Конвергенција низова

деф. Кажемо да је $b \in \mathbb{R}$ гранична вредност (лимес) низа (a_n) ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да за свако $n > n_0$ важи $|a_n - b| < \varepsilon$. Тада кажемо да низ (a_n) конвергира ка b и пишемо

$$\lim_{n \to \infty} a_n = b$$

Ако низ не конвергира, онда дивергира.

Специјално, ако за свако $M \in \mathbb{R}$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ т.д. $a_n > M$, за свако $n \geq n_0$, онда је $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Слично, ако за свако $M \in \mathbb{R}$ постоји $n \in \mathbb{N}$ т.д. $a_n < M$, за свако $n \geq n_0$, онда је $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Пример (1) $\lim_{n\to\infty} C = C$

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

(3) $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$

(4) $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ не постоји

Став Сваки конвергентан низ је ограничен.

Став Нека је $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Тада

(1) $\lim_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \lim_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$, $c \in \mathbb{R}$.

(2) $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = a \pm b$

(3) $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = a \cdot b$

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$

доказ (1) Нека је $\varepsilon > 0$. Постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ т.д. за све $n > n_0$ важи $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|c|}$ па је $|ca_n - ca| < \varepsilon$ тј. $\lim_{n\to\infty}(ca_n) = c \cdot a$.

(2)-(4) слично као дефиниције (уџбеник) ▨

Теорема [о 2 полицајца] Нека је $a_n \leq c_n \leq b_n$ за $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = A$. Тада и (c_n) конвергира и $\lim_{n\to\infty} c_n = A$.

Став Нека је $a_n \le b_n$ за $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Онда је $a \le b$.

Пример (1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$, $k \in \mathbb{N}$

(2) $\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} +\infty, & q > 1 \\ 1, & q = 1 \\ 0, & -1 < q < 1 \\ \text{не постоји}, & q \le -1 \end{cases}$

Нпр. $\lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty$

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$

(3) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,72$ Ојлерова константа

Став Сваки монотон и ограничен низ конвергира.

Пример $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 1}{5n^2 - n - 2} = \frac{3}{5}$

Редови

деф. Ред са члановима $a_1, a_2, a_3, \ldots$ дефинише се као формални збир својих чланова и обележава са

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots$$

n-та парцијална сума реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дефинише се као

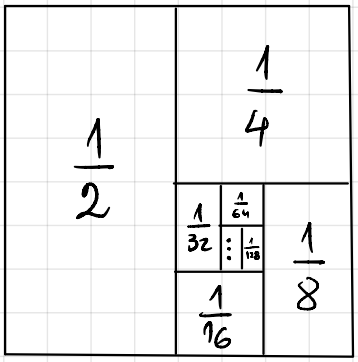
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Ако постоји $\lim_{n\to\infty} S_n$, кажемо да ред конвергира и његова сума је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$.

Иначе, кажемо да ред дивергира.

Пример $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$

можемо симковито представити:



$= 1$ квадрат

Дакле, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1$

По дефиницији:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$$

(ово је очигледно, видећемо у следећем примеру)

па је $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 1 - 0 = 1$

Коначно, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$

Пример (1) $a_n = c$ константа и $c \neq 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} c = c + c + c + c + \cdots$$

По дефиницији: $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \underbrace{c + c + \cdots + c}_{n} = nc$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} nc = c \cdot \lim_{n\to\infty} n = \infty$, па ред $\sum_{n=1}^{\infty} c$ дивергира.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots$

Примећимо $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = a_n$

По дефиницији:

$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

$= 1 - \frac{1}{n+1}$

Даље, $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - 0 = 1$, па дати ред конвергира и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

(3) Геометријски ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n = a_0 + a_0 q + a_0 q^2 + a_0 q^3 + \cdots$

$S_n = a_0 + a_0 q + a_0 q^2 + \cdots + a_0 q^n = a_0 \underbrace{\left(1 + q + q^2 + \cdots + q^n\right)}_{A}$

Прво одређујемо A.

$A = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n \quad / \cdot q$

$qA = q + q^2 + \cdots + q^n + q^{n+1} \quad / +1$

$1 + qA = \underbrace{1 + q + q^2 + \cdots + q^n}_{A} + q^{n+1}$

$$1+qA = A + q^{n+1}$$

$$A(1-q) = 1-q^{n+1}$$

$$A = \frac{1-q^n}{1-q}$$

Вратимо се у S_n:

$$S_n = a_0 A = a_0 \frac{1-q^n}{1-q} = \begin{cases} a_0 \frac{1}{1-q}, & -1 < q < 1 \\ \text{не постоји}, & |q| \geq 1 \end{cases}$$

Коначно, $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n$ конвергира за $|q|<1$ и тада је $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n = \frac{a_0}{1-q}$, а кажемо овај ред дивергира.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1+1-1+1-1+1-1+\cdots$

$$S_n = -1+1-1+1-\cdots+(-1)^n = \begin{cases} 0, & n \text{ парно} \\ -1, & n \text{ непарно} \end{cases}$$

S_n је низ: $-1, 0, -1, 0, -1, 0, \ldots$ и он дивергира, па дивергира и ред $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$.

<u>Став</u> Ако редови $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергирају и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, онда

(1) конвергира и $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ и сума му је $A \pm B$;

(2) конвергира и $\sum_{n=1}^{\infty} (C \cdot a_n)$ и сума му је $C \cdot A$.

Критеријуми за конвергенцију редова са позитивним члановима

Став [неопходан услов конвергенције]

(1) Ако ред $\sum a_n$ конв. онда је $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(2) Ако је $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, онда $\sum a_n$ дивергира.

Пример Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n}{2n^2+n-1}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2n^2+n-1} \overset{:n^2}{\underset{:n^2}{=}} \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

па ред див. јер није испуњен неопходан услов конв.

Став [поредбени критеријум] Нека је $0 \le a_n \le b_n$ за $n \ge n_0$. Тада

(1) ако $\sum b_n$ конвергира, онда и $\sum a_n$ конвергира;

(2) ако $\sum a_n$ дивергира, онда и $\sum b_n$ дивергира.

Пример (1) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} n^3$.

Означимо $a_n = n$, $b_n = n^3$. Како је $0 \le n \le n^3$ и знамо да $\sum_{n=1}^{\infty} n$ дивергира, на основу поредбеног критеријума (2) дивергира и $\sum_{n=1}^{\infty} n^3$.

(2) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Означимо $a_n = \frac{1}{n^2}$ и $b_n = \frac{1}{n(n-1)}$

Како је $n^2 \geq n^2 - n$

$n^2 \geq n(n-1)$

$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$

$a_n \leq b_n$

и $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ конвергира, то конв. и дати ред на основу поредбеног критеријума (1).

(3) Може се показати да

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ → конвергира за $\alpha > 1$

→ дивергира за $\alpha \leq 1$

нпр. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}}$ конвергирају, док $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ див.

Теорема [Кошијев критеријум] Нека је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ред са позитивним члановима такав да постоји $\tau = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Тада

(1) ако је $\tau < 1$, ред $\sum a_n$ конв.

(2) ако је $\tau > 1$, ред $\sum a_n$ див.

(3) ако је $\tau = 1$, не можемо рећи ништа о конвергенцији.

Пример (1) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}$

Означимо $a_n = \left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}$

$$\tau = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^2 = e^2 > 1,$$

$\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}} \to e$

па ред дивергира на основу Кошијевог критеријума

(2) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

Означимо $a_n = \frac{n}{2^n}$.

$$\tau = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{1}{2} < 1,$$ па

дати ред конв. на основу Кошијевог критеријума.

Теорема [Даламберов критеријум] Нека је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ред са позитивним члановима такав да постоји $\tau = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Тада

(1) ако је $\tau < 1$, ред $\sum a_n$ конв.

(2) ако је $\tau > 1$, ред $\sum a_n$ див.

(3) ако је $\tau = 1$, не можемо рећи ништа о конвергенцији.

Пример (1) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

Означимо $a_n = \frac{n}{2^n}$.

$$\tau = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n(n+1)}{2\cdot 2^n \cdot n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2} < 1,$$ па ред

конвергира на основу Даламберовог критеријума.

(2) Испитајмо конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$

Означимо $a_n = \frac{3^n}{n!}$

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot 3^{n+1}}{(n+1)! \cdot 3^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot 3 \cdot 3^n}{(n+1) \cdot n! \cdot 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1, \text{ па}$$

ред конвергира на основу Даламберовог критеријума.

Редови са произвољним члановима

дефр. Кажемо да ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ апсолутно конвергира (АК), ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ конвергира (К).

Став Ако ред АК, онда он К.

Пример $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots$

Означимо $a_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$, па је $|a_n| = \left|\frac{(-1)^n}{2^n}\right| = \frac{1}{2^n}$.

Знамо да $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ конв., јер знамо да $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ АК, па

онда он и конвергира.

деф. Нека је (a_n) опадајући низ тај. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Тада ред $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ називамо Лајбницовим редом.

Став Сваки Лајбницов ред конвергира.

Пример $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots$

Означимо $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Тада је $|a_n| = \frac{1}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ дивергира,

па дати ред не конв. апсолутно (и не можемо да искористимо став $AK \Rightarrow K$). Са друге стране, низ $\left(\frac{1}{n}\right)$ опада и $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, па је дати ред Лајбницов те он конвергира.

Дакле овај пример показује да $K \not\Rightarrow AK$.

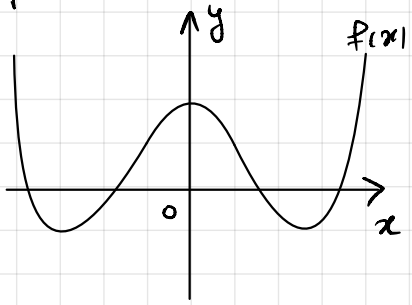
Функције

Дефинишемо још неке појмове функције, домен, кодомен, ...

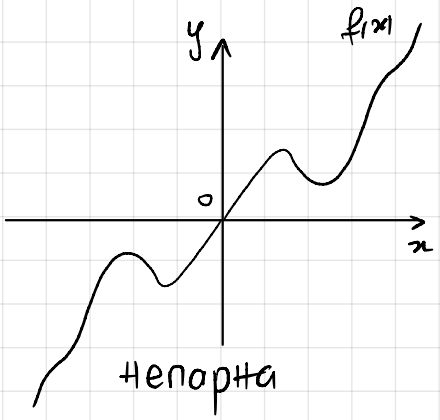
деф. • $f: A \to B$ је парна ако је $f(-x) = f(x)$, $x \in A$

• $f: A \to B$ је непарна ако је $f(-x) = -f(x)$, $x \in A$

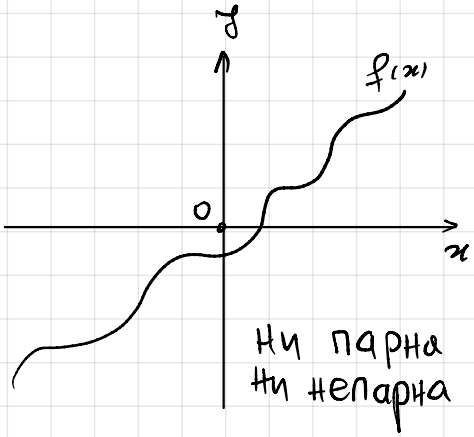
Пример



парна



непарна



ни парна ни непарна

деф. Функција $f: A \to B$ је инјекција („1-1") ако за свако $x_1, x_2 \in A$ тј. $f(x_1) = f(x_2)$ следи $x_1 = x_2$.

(Различити бројеви се сликају у различито.)

деф функција $f: A \to B$ је сурјекција („на") ако за свако $y \in B$ постоји $x \in A$ тј. $f(x) = y$.

(Кодомен је једнак слици.)

деф. функција је бијекција ако је „1-1" и „на"

Пример (1) $f(x) = x^2$, $f: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$

f је „на"

f није „1-1" (јер тј. $(-2)^2 = 2^2$, али $-2 \neq 2$)

(2) $f(x) = x^2$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

f није „на" (јер нпр. не постоји $x \in \mathbb{R}$ тј. $x^2 = -5$)

f није „1-1"

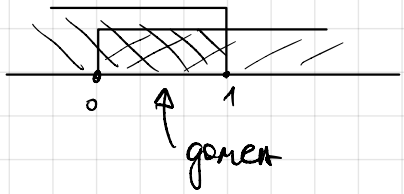
(3) $f(x) = x^3$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

f је „1-1" } $\Rightarrow$ f је бијекција
f је „на" }

Пример [домен функције] (1) $f(x) = \ln x \sqrt{1-x}$

услови: • $x > 0$ (због $\ln$)

• $1 - x \geq 0$ тј. $x \leq 1$ (због $\sqrt{}$)

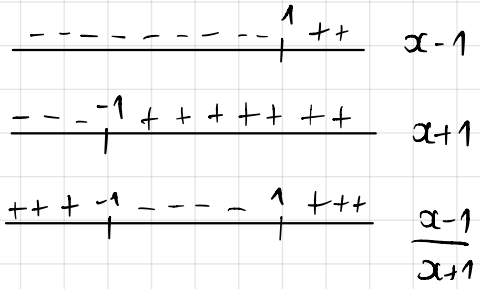


$\mathcal{D}_f = (0, 1]$

(2) $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$

услови: • $x + 1 \neq 0$, тј. $x \neq -1$ (због разломка)

• $\frac{x-1}{x+1} > 0$ (због $\ln$)



$\mathcal{D}_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

(3) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{e^x}$

услови: • $x^2 + 1 \geq 0$ (због $\sqrt{}$)

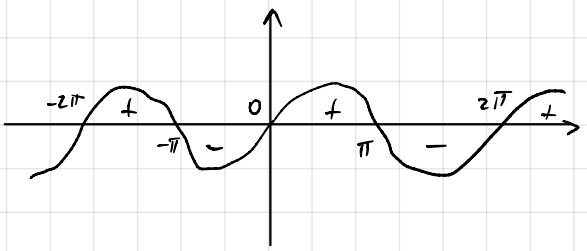
↑ ово увек важи

• $e^x \neq 0$ (због разломка) – увек тачно

$\Rightarrow \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

(h) $f(x) = \sqrt{\sin x}$

uslovi: $\sin x \geq 0$



$$\mathcal{D}_f = \dots [-2\pi, -\pi] \cup [0, \pi] \cup [2\pi, 3\pi] \cup [4\pi, 5\pi] \cup \dots$$

$$= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi]$$

def. Neka je $f: A \to B$ i $g: B \to A$. Kažemo da je g inverzna funkcija funkcije f ako je

$f(g(x)) = x$, za svako $x \in B$

i $g(f(x)) = x$, za svako $x \in A$.

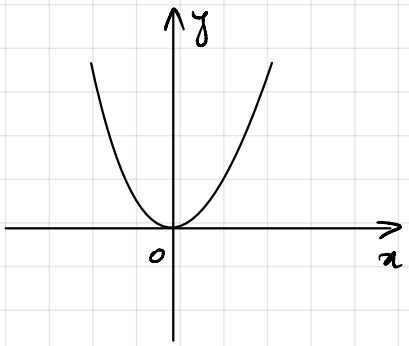
Koristimo oznaku $f^{-1} = g$.

Postoji inverzna funkcija od f ako i samo ako je f bijekcija.

Primer $f(x) = x^2$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nije bijekcija jer nije ni „1-1" ni „na", možemo da smanjimo domen i kodomen:

$f(x) = x^2$, $f: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ jeste bijekcija!

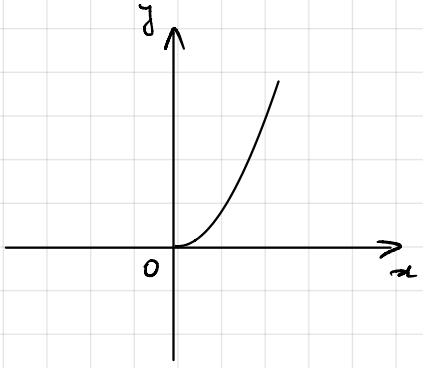
Inverzna funkcija je $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $f^{-1}: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$



$f(x) = x^2$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

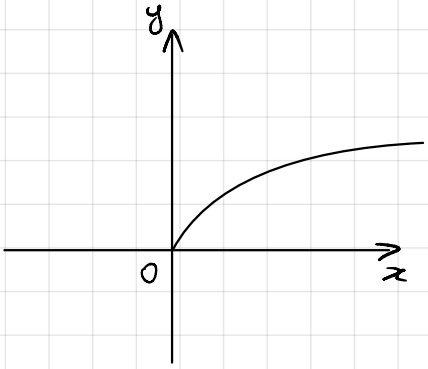
Nije bijekcija



$f(x) = x^2$

$f: [0, \infty) \to [0, +\infty)$

jeste bijekcija

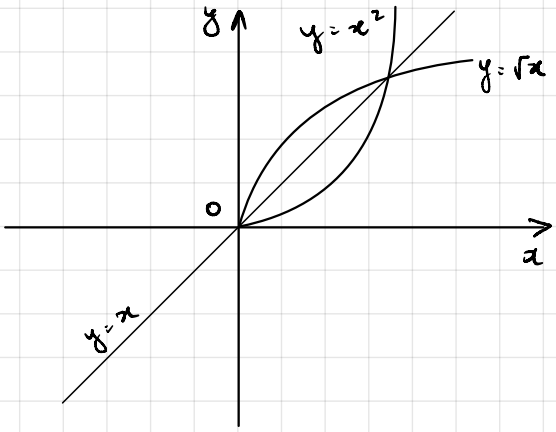


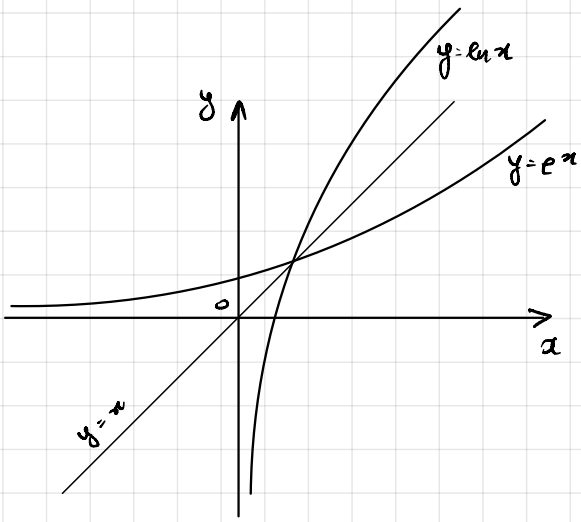
$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

$f: [0, \infty) \to [0, +\infty)$

jeste bijekcija

Графици међусобно инверзних функција симетрични су у односу на праву $y = x$.





Деф (1) f је **растућа** (**опадајућа**) на (a,b) ако за свако $x_1, x_2 \in (a,b)$ важи

$$f(x_1) \leq f(x_2) \qquad \left(f(x_1) \geq f(x_2) \right)$$

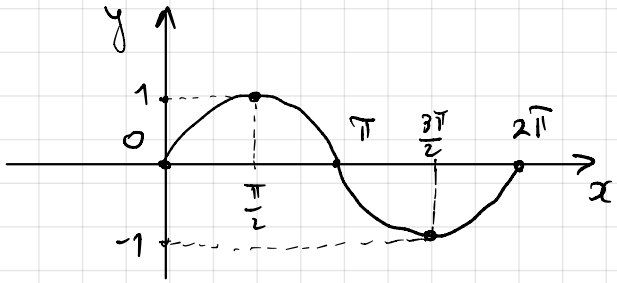
(2) f је **ограничена одозго** (**одоздо**) на (a,b) ако постоји $M \in \mathbb{R}$ тј. за свако $x \in (a,b)$ важи

$$f(x) \leq M \qquad \left(f(x) \geq M \right).$$

(3) f је **монотона** ако расте или опада.

(4) f је **ограничена** ако је ограничена и одозго и одоздо.

Пример (1) $f(x) = \sin x$, $f : [0, 2\pi] \to [-1, 1]$



f расте на $(0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$

f опада на $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

f је ограничена одозго са 1, одоздо са -1.

(2) $f(x) = x$ није ограничена ни одозго ни одоздо.

деф. Функција f је позитивна (негативна) на (a,b) ако за свако $x \in (a,b)$ важи $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$.

Пример (1) Одредити знак функције $f(x) = (x-7)\ln(x-1)$.

домен: $x > 1$ (због $\ln$) $\Rightarrow$ $D_f = (1, +\infty)$

Посебно одређујемо знак од $x-7$, посебно од $\ln(x-1)$.

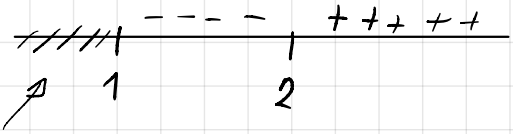
$\ln(x-1) > 0$

$x - 1 > e^0$

$x - 1 > 1$

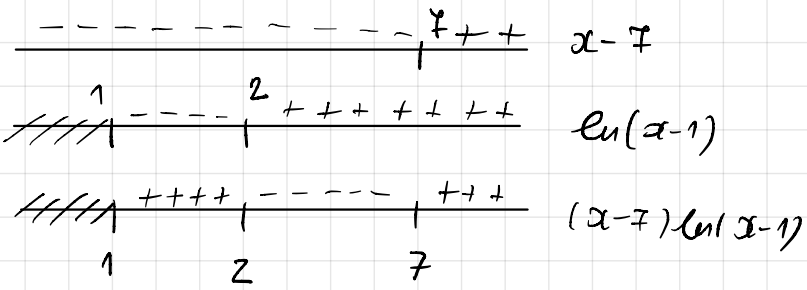
$x > 2$

Дакле $\ln(x-1)$ има знак:



није деф.

Спојимо са знаком од $x-7$:



Закључак: $f(x) = 0$ за $x = 2$ и $x = 7$

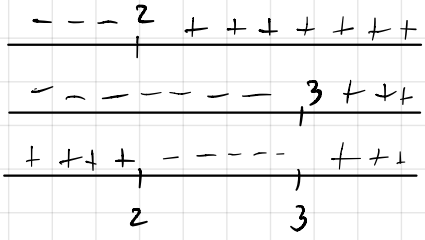
$f(x) > 0$ на $(1,2) \cup (7, +\infty)$

$f(x) < 0$ на $(2,7)$.

(2) Одредити знак функције $f(x) = x^2 - 5x + 6$ (очигледно $D_f = \mathbb{R}$)

$$x_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 3,\ x_2 = 2$$

$\Rightarrow$ $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$



Закључак: $f(x) = 0$, за $x = 2$, $x = 3$

$f(x) > 0$ на $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$

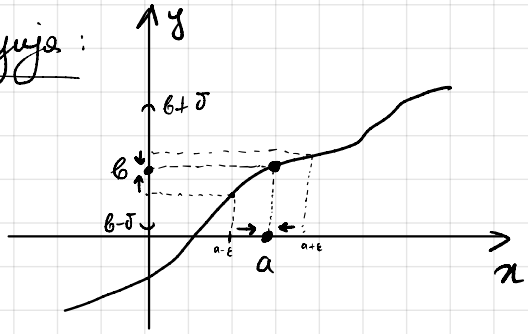
$f(x) < 0$ на $(2,3)$.

деф Нека је f дефинисана у некој околини тачке $a \in \mathbb{R}$. Кажемо да је $b \in \mathbb{R}$ гранична вредност (лимес) функције f када x тежи a ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ тј. за свако x са особином $|x-a| < \delta$ важи

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Тада пишемо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b.$

Илустрација:



Што више се x приближава тачки a, то се $f(x)$ приближава тачки b.

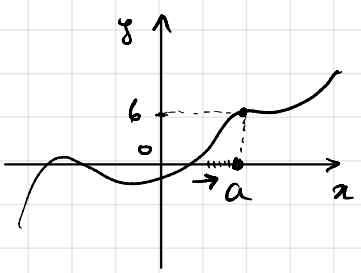
Пример (1) $\lim\limits_{x \to a} c = c, \quad a, c \in \mathbb{R}$

(2) $\lim\limits_{x \to a} x = a$

(3) $\lim\limits_{x \to 5} (3x - 8) = 3 \cdot 5 - 8 = 7$

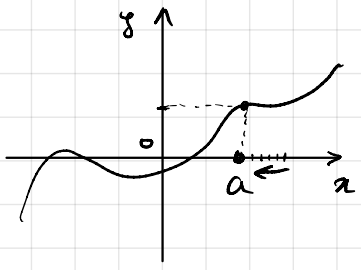
(4) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} (x+2) = 2+2 = 4$

Леви и десни лимес:



леви лимес $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b$

x се приближава a слева

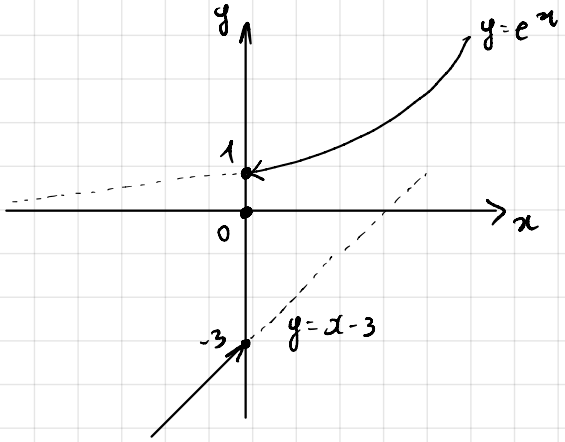


десни лимес $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b$

x се приближава a здесна

Пример

$$f(x)=\begin{cases} x-3, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ e^x, & x>0 \end{cases}$$



$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}(x-3)=0-3=-3$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0} e^x=e^0=1$$

деф (1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ ако за всяко $\varepsilon>0$ съществува x_0 така че за всяко $x>x_0$ важи $|f(x)-b|<\varepsilon$.

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$ ако за всяко $\varepsilon>0$ съществува x_1 така че за всяко $x<x_1$ важи $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Пример (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2+3x}=\dfrac{1}{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x\cdot\dfrac{x-1}{x+1}=0$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} e^x\cdot\dfrac{x-1}{x+1}=+\infty$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$

Теорема Нека постоје лимеси $\lim_{x\to a} f(x)$ и $\lim_{x\to a} g(x)$. Тада

(1) $\lim_{x\to a} (c\cdot f(x)) = c\cdot \lim_{x\to a} f(x)$

(2) $\lim_{x\to a} (f(x)\pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$

(3) $\lim_{x\to a} (f(x)\cdot g(x)) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$

(4) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$

Став Нека је $f(x)\geq 0$. Ако постоји $\lim_{x\to a} f(x)$, онда је $\lim_{x\to a} f(x)\geq 0$.

Пример (1) $\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\right)=2$

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-3}{3x^2-5}=\frac{5}{3}$

(3) $\lim_{x\to 1}\frac{5x^2-3}{3x^2-5}=-1$

Став (1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

(2) $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

Пример (1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x}=\frac{1}{3}$

(2) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x = e^3$

Асимптоте

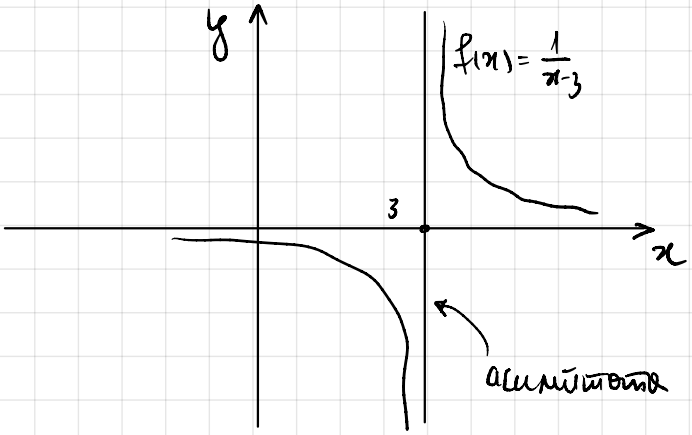
дефиниција Кажемо да је нека права асимптота графика функције $y=f(x)$, ако растојање тачке $(x, f(x))$ са графика од те праве тежи 0, када $x \to \infty$.

Постоје три врсте асимптота:

(1) **вертикалне асимптоте**: праве облика $x=a$ тј.

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \infty \quad \text{или} \quad \lim_{x \to a-0} f(x) = \infty$$

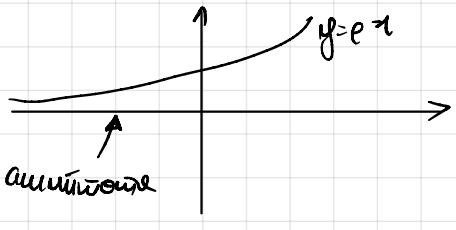
нпр. $f(x) = \frac{1}{x-3}$ има верт. ас. $x=3$:



(2) **хоризонталне асимптоте**:

ако је $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$, онда је права $y=b$ хор. ас.

нпр. $f(x) = e^x$ има х.а. $y=0$ јер је $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$



(3) Коса асимптота:

ако је $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R}$ и $\lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = n \in \mathbb{R}$,

(k и n су коначни бројеви), онда је права

$$y = kx + n$$

коса асимптота.

Напомена (1) вер. ас. тражимо у крајевима домена

(2) ако f има ХА у $\pm\infty$, не мора имати и КА

и обрнуто

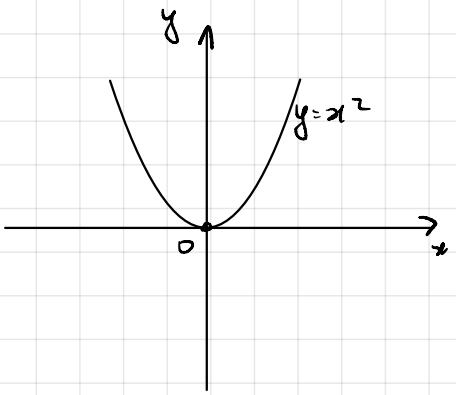
Пример (1) Одредити асимптоте $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 5}{x - 8}$

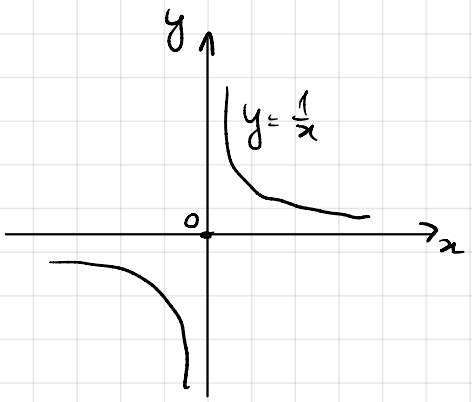
(2) Одредити асимптоте $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

Непрекидност

деф Функција f је непрекидна у x_0 ако је дефинисана у x_0 и $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. f је непр. ако је непр. у свакој тачки свог домена.

Пример (1) $f(x) = x^2$ је непр. (2) $f(x) = \frac{1}{x}$ није непр. у 0





Теорема Ако су f и g непр. у x_0, онда су непр. и $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$.

Теорема Свака елементарна функција је непр. на свом домену.

Теорема Ако је f непр. на сегменту $[a,b]$, онда она достиже свој минимум и максимум.

Диференцијални рачун

Пример $Q(t)$ - количина материје која је за време t ступила у реакцију

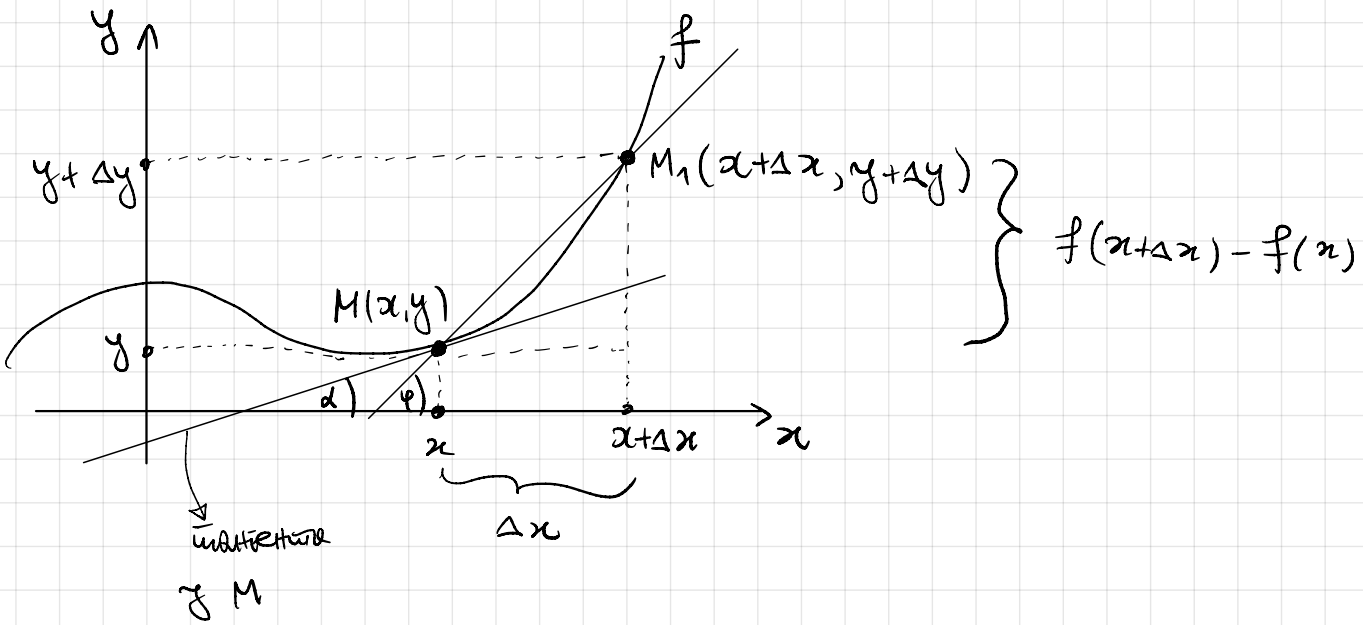
$Q(t+\Delta t)$ - количина материје која је за време $t+\Delta t$ ступила у реакцију

средња брзина: $\dfrac{Q(t+\Delta t) - Q(t)}{\Delta t}$

Што је мање Δt биће нам је пређена брзине, па дефинишемо брзину хемијске реакције са

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{Q(t+\Delta t) - Q(t)}{\Delta t}$$

Ова брзина је нешто друго до извод функције Q у тренутку t. Сада формално деф. извод.



M_1 približavamo ka M

φ se približava ka α

prava kroz M i M_1 se približava tangenti u M

koeficijent pravog tangenta je $\operatorname{tg}\alpha$ tj. tangenta je prava $y = \operatorname{tg}\alpha \cdot x + n$

Imamo $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, pa je

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

def. Izvod funkcije f u tački x u oznaci $f'(x_0)$ je

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

(često koristimo i oznaku h umesto Δx.)

Пример (1) Определим извод од $f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} (2x + h) = 2x$$

Дакле, $(x^2)' = 2x$ и генерално $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

(2) $f(x) = \sin x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{h}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos x$$

Таблица извода

$f(x)$	$f'(x)$
C	0
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
a^x	$a^x \ln a$
e^x	e^x
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Теорема Нека $f(x)$ и $g(x)$ имају изводе у x. Тада

(1) $\left(cf(x)\right)' = cf'(x)$

(2) $\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g(x)$

(3) $\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(4) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$

(5) $\left(g(f(x))\right)' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Пример (1) $y = 3x^2 - 2\ln x$, $y' = 6x - \frac{2}{x}$

(2) $y = x\ln x$, $y' = \ln x + 1$

(3) $y = \frac{\ln x}{x}$, $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

(4) $y = \ln(\sin x)$, $y' = \frac{\cos x}{\sin x}$

(5) $y = \frac{x^2 \cdot \cos x}{\sqrt{x}}$, $y' = \frac{1}{2}\sqrt{x}\left(3\cos x - 2x\sin x\right)$

(6) $y = x \cdot \ln x \cdot e^x$, $y' = e^x\left((x+1)\ln x + 1\right)$

(7) $y = \operatorname{arctg}(x^3 + 4)$, $y' = \frac{3x^2}{(x^3+4)^2 + 1}$

(8) $y = e^{x \cdot \sin x}$, $y' = e^{x\sin x}(\sin x + x\cos x)$

(9) $y = \ln\sqrt{x^2 - 8}$, $y' = \frac{x}{x^2 - 8}$

Изводи вишег реда

други извод $f''(x) = \left(f'(x)\right)'$

трећи извод $f'''(x) = \left(f''(x)\right)'$

$\vdots$

n-ти извод $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$

Пример (1) $y = \ln\sqrt{x^2-8}$, $y'' = ?$

(2) $y = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$, $y^{(5)} = ?$

Изводи вишег реда

други извод $f''(x) = \left(f'(x)\right)'$

трећи извод $f'''(x) = \left(f''(x)\right)'$

$\vdots$

n-ти извод $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$

Пример (1) $y = \ln\sqrt{x^2-8}$, $y'' = ?$

(2) $y = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$, $y^{(5)} = ?$

Лопиталово правило

Теорема Нека су функције f и g диференцијабилне у некој околини тачке $x = a$ (сем евентуално у a).

Ако је $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$,

и ако постоји $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, онда постоји и $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$

и $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Напомена Лопиталово правило важи и за $\lim\limits_{x\to\infty}$

Пример (1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ ← "$\frac{0}{0}$"

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^3}$ ← "$\frac{\infty}{\infty}$"

Пример лимеси облика $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞

(1) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$

(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x\right)$

(3) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

Монотоност функције

Теорема Ако $f(x)$ расте (опада) и ако је диференцијабилна на (a,b), онда је $f'(x)\geq 0$ ($f'(x)\leq 0$) на (a,b).

Теорема Нека је $f(x)$ непрекидна на $[a,b]$ и диференцијабилна на (a,b) и $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) на (a,b). Тада f расте (опада) на (a,b).

Пример (1) $y=e^{7x}$, $y'=7e^{7x}>0 \Rightarrow$ y расте на $\mathbb{R}$

(2) $y=x^2$, $y'=2x$

$\Rightarrow$ y расте на $(0,+\infty)$

y опада на $(-\infty,0)$

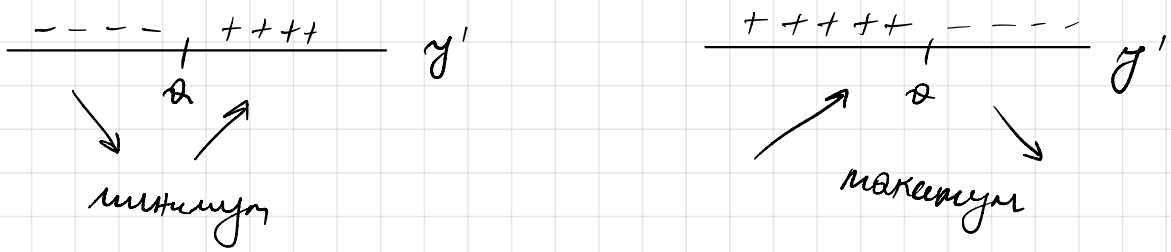
дефиниција Кажемо да f има локални минимум (максимум) у тачки $x=a$ ако постоји околина U тачке a тј. да је

$$f(x) \geq f(a) \quad (f(x) \leq f(a)) \text{ за свако } x \in U.$$

Минимуме и максимуме једном речју називамо екстремумима.

Теорема Ако је f диференцијабилна и има екстремум у a, онда је $f'(a)=0$.

Теорема Нека је f диференцијабилна у некој околини тачке a (сем евентуално у a). Ако f' мења знак у a, онда је a тачка локалног екстремума и то:



Пример Испитати монотоност и наћи екстремуме функција:

(1) $y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$; (2) $y=\ln(x^2-4)$; (3) $y=e^{2x^3-15x^2+36x}$

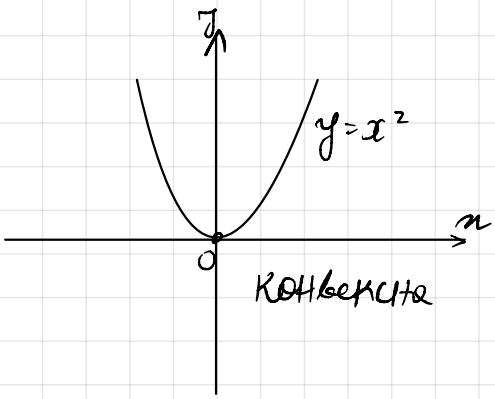
Конвексност функције

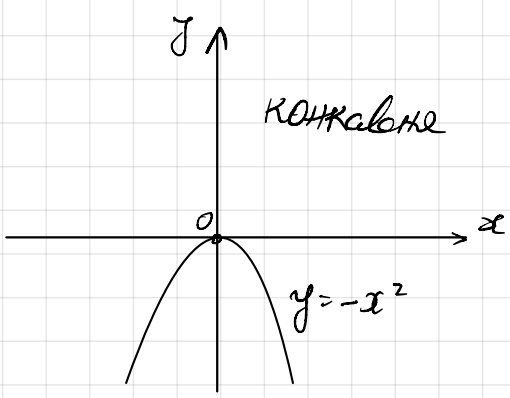
дефиниција Функција f је конвексна (конкавна) на (a,b) ако за свако $\alpha \in [0,1]$ и свако $x_1, x_2 \in (a,b)$ важи

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$

$$\left(f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) \right)$$

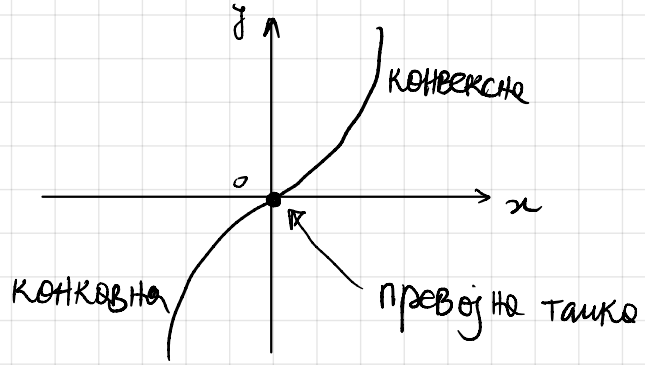
Нпр.





Теорема Нека f има други извод на (a,b). Ако је $f''(x)>0$ $(f''(x)<0)$ на (a,b), онда је f конвексна (конкавна) на (a,b).

деф Тачке графика које деле конвексне и конкавне делове графика зову се превојне тачке.



Теорема Ако f'' мења знак у a, онда је a превојна тачка.

Пример Испитати конвексност функције $y=\ln(x^2-4)$.

Интеграли

Неодређени интеграли

деф Нека је $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ непрекидна функција. Диференцијабилна функција $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ је примитивна функција од f ако

$$F'(x) = f(x), \text{ за свако } x \in [a,b].$$

Скуп свих примитивних функција од f називамо неодређеним интегралом. Пишемо:

$$\int f(x)\,dx = \{ F(x) \mid F'(x) = f(x),\ x \in [a,b] \}$$

Став Нека је F примитивна функција од f. Тада G је примитивна од f ако и само ако је

$$G(x) = F(x) + C \quad \text{за неко } C \in \mathbb{R}.$$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$a \in \mathbb{R}$	$ax + C$
$x^\alpha,\ \alpha \neq -1$	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$a^x,\ a>0, a\neq 1$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{ctg} x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$

Став $\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$

Пример (1) $\int (x^3 - x^2 + 5x + 6)\,dx$

(2) $\int \frac{x^2+x+1}{x(x^2+1)}\,dx$

(3) $\int (2\sin x + \cos x)\,dx$

Став За сваку непр. функцију f и непр. диф. F важи:

(1) $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$

(2) $\int F'(x)\,dx = F(x) + C$

Парцијална интеграција

Нека су u и v две диференцијабилне функције. Тада

$$\left(u(x)\cdot v(x)\right)' = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x) \quad / \int$$

$$\int \left(u(x)\cdot v(x)\right)'dx = \int \left(u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)\right)dx$$

$$u(x)\,v(x) = \int u'(x)\,v(x)\,dx + \int u(x)\,v'(x)\,dx$$

Одавде добијамо:

Став $\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\,u'(x)\,dx$

Пример (1) $\int \ln x\,dx$ (2) $\int x e^x dx$

Смена променљиве

Нека је $f(x)$ непрекидна, $F(x)$ њена примитивна фја (тј. $F'(x) = f(x)$) и нека је $g(x)$ непрекидно диференцијабилна. Формула за извод сложене функције:

$$\big(F(g(t))\big)' = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t) \quad / \int$$

$$\int \big(F(g(t))\big)' dt = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt$$

Одавде добијамо:

Став Нека је $f(x)$ непрекидна и $g(t)$ непр. диф. Увођењем смене $x = g(t)$ у $\int f(x)\, dx$ добијамо:

$$\int f(x)\, dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt$$

Пример (1) $\int \sin(2x+3)\, dx$ (2) $\int \frac{\ln x}{x}\, dx$

Интеграција рационалних функција

деф. Рационална функција је функција облика $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ где су $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ полиноми степена n и m.

деф. Елементарне рационалне функције су функције облика:

(1) $\frac{A}{(x-b)^k}$, $A, b \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$

(2) $\frac{Ax+B}{(x^2+cx+d)^k}$, $A, B, c, d \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$

тј. x^2+cx+d нема реалних нула (тј. $c^2-4d<0$).

Теорема Свако реално полином

$$Q_m(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

може се на јединствен начин растварити у облику

$$Q_m(x) = a_m (x-x_1)^{\alpha_1} \cdots (x-x_k)^{\alpha_k} (x^2+b_1 x+c_1)^{\beta_1} \cdots (x^2+b_\ell x+c_\ell)^{\beta_\ell}$$

где је $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_\ell \in \mathbb{N}$, $\alpha_1+\cdots+\alpha_k+2(\beta_1+\cdots+\beta_\ell)=m$ и полиноми $x^2+b_i x+c_i$ немају реална нула.

Пример (1) $x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$

(2) $2x^3-3x^2+2x-3 = 2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x^2+1)$

Теорема Свака рационална функција $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ може се на јединствен начин представити као збир полинома и елементарних рационалних функција.

Поступак

1. ако је $m \le n$, поделимо $P_n(x) : Q_m(x)$ и запишемо

$$P_n(x) = \text{количник} + \frac{\text{остатак}}{Q_m(x)}$$

2. растављамо $Q_m(x)$ на факторе
3. представљамо $\frac{\text{остатак}}{Q_m(x)}$ (тј. $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ за $m>n$) као збир елементарних рац. фја.

Пример $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2+x-1}\,dx = ?$

Пример

$$\frac{P_n(x)}{(x-1)^3(x^2+4)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{Dx+E}{x^2+4} + \frac{Fx+G}{(x^2+4)^2}$$

Интегрална тригонометријских функција

Нека је $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тада

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} \overset{:\cos^2\frac{x}{2}}{\underset{\cdot\cos^2\frac{x}{2}}{}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1} = \frac{2t}{t^2+1}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} \overset{:\cos^2\frac{x}{2}}{\underset{\cdot\cos^2\frac{x}{2}}{}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1} = \frac{1-t^2}{t^2+1}$$

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \Rightarrow x = 2\operatorname{arctg} t \;/\,'$$

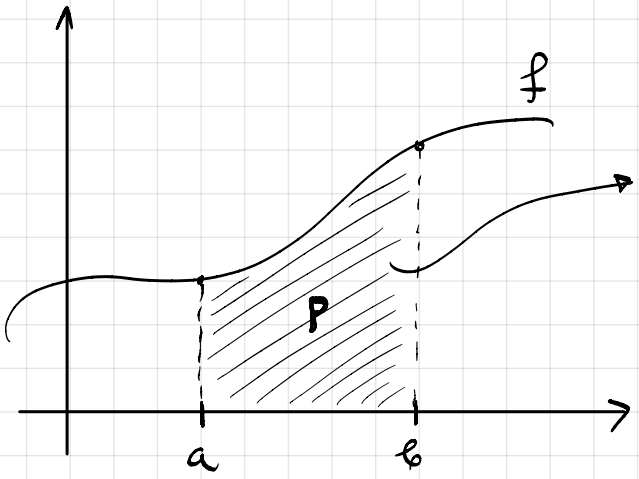
$$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

Сваки сменом $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ интеграл $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ (где је R рационална функција две променљиве) своди се на интеграл рационалне функције. Притом,

$$\sin x = \frac{2t}{t^2+1},\quad \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1},\quad dx = \frac{2}{t^2+1}\,dt.$$

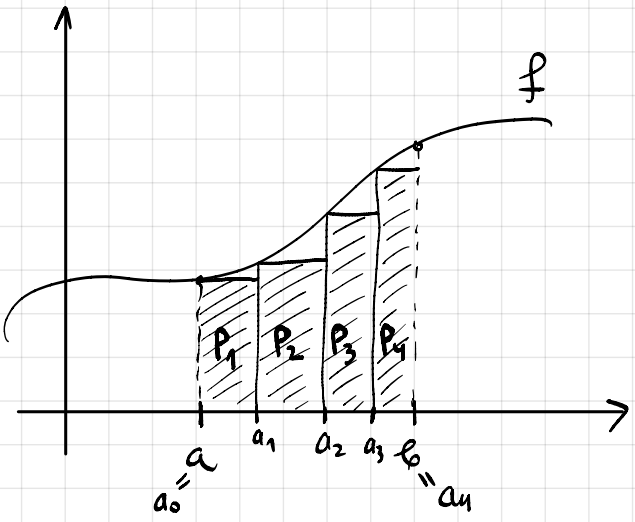
Пример $\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx$

Одредени интеграл



→ како одредити ову површину?

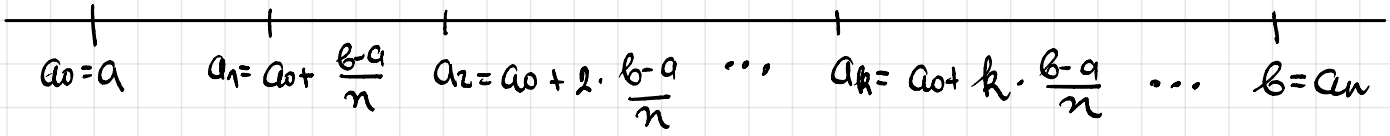
идеја - апроксимација



$$P \approx P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = (a_1 - a_0)\cdot f(a_0) + (a_2 - a_1) f(a_1) +$$
$$+ (a_3 - a_2) f(a_2) + (a_4 - a_3) \cdot f(a_3)$$
$$= \sum_{i=0}^{3} (a_{i+1} - a_i) \cdot f(a_i)$$

Уместо да поделимо $[a, b]$ на 4 дела, желимо да га поделимо на ∞ много делова.

Подела на n једнаких интервала дужине $\frac{b-a}{n}$:



Означимо $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \cdot f\left(a_0 + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)$

Дефиниција Одређени интеграл функције f на (a,b) је

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \cdot f\left(a_0 + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)$$

(уколико овај лимес постоји).

Став Нека су $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ непр. Тада

(1) $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$

(2) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

(3) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

Њутн - Лајбницова формула

Теорема Нека је $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ непр. и F њена примитивна функција. Тада је

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Пример $\int_0^1 (x^2+1)\,dx$

Став [парцијална интеграција]

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$$

Став [Смена променљиве] Нека је $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непр. и $g:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ непр. диф. тј. $g(\alpha)=a$ и $g(\beta)=b$. Тада

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))\cdot g'(t)\,dt$$

Пример У хемијском процесу производи се NaCl брзином $Q(t)=3\sqrt{t}$ g/min.
Одредити количину NaCl после 4 min.

$$\int_0^4 Q(t)\,dt = \int_0^4 3\sqrt{t}\,dt = 3\int_0^4 t^{\frac{1}{2}}\,dt = 3\cdot t^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{2}{3}\Big|_0^4 =$$

$$= 2\sqrt{t^3}\Big|_0^4 = 2\sqrt{4^3} - 2\sqrt{0^3} = 16\,g.$$

Други део предавања можете пронаћи на сајту проф. Марије Јелић Милутиновић:

