

Теорема Ако f и g нпр. у a , онда $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$.

Теорема Свака елементарна функција је нпр. на свом домену.

Теорема Ако је f нпр. на интервалу $[a, b]$, онда она достиже свој минимум и максимум.

Диференцијални рачун

Пример $Q(t)$ - количина материје која је за време t стигла у реактор

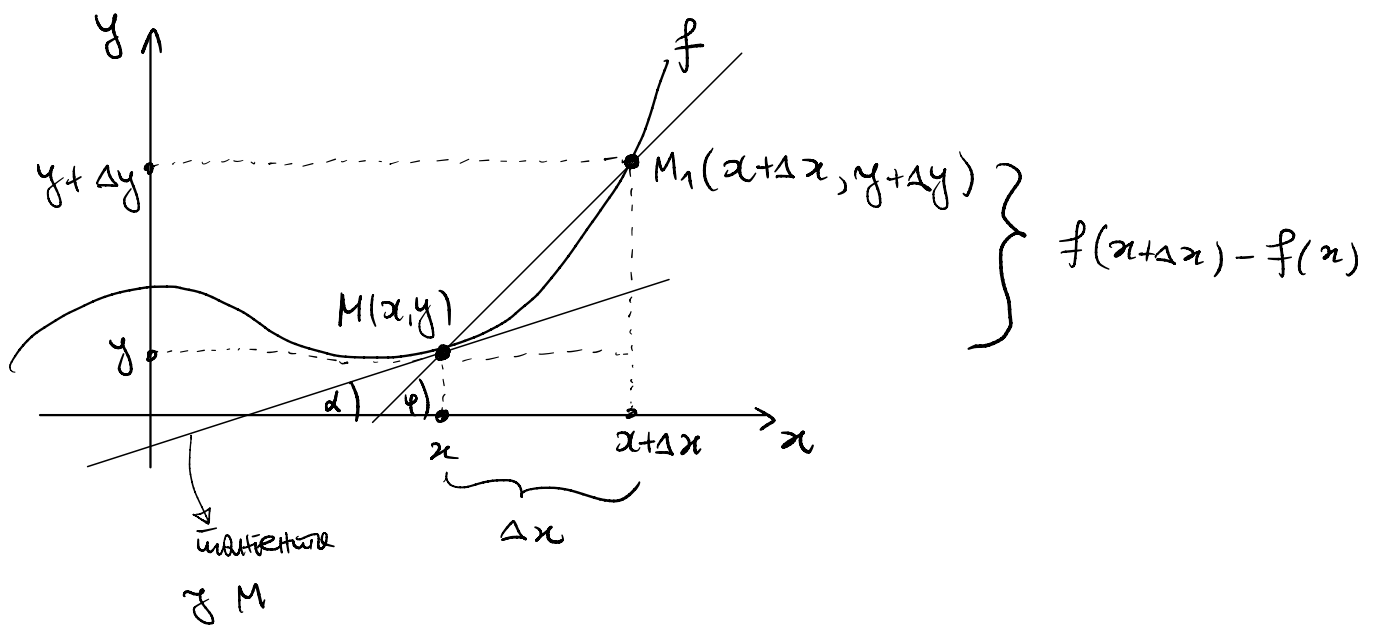
$Q(t + \Delta t)$ - количина материје која је за време $t + \Delta t$ стигла у реактор

средња брзина: $\frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t}$

Како је време Δt све мање нам је прецизнија брзина, па дефинишемо брзину хемијске реакције са

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t}$$

Ова брзина је ништа друго до извод функције Q у тачки t . Сада формално деф. извод.



M_1 приближавамо ке M

φ се смањује ке α

права кроз M и M_1 се приближава тангентној у M

коэффициент правље тангенте је $\operatorname{tg} \alpha$ тј. тангенте је права $y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x + n$

имамо $\operatorname{tg} \varphi = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, то је

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

деф. Извод функције f у тачки x у ознаци $f'(x_0)$ је

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

(често користимо и ознаку h уместо Δx .)

Пример (1) Определим производную от $f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$$

Таким образом, $(x^2)' = 2x$ и непосредственно $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

(2) $f(x) = \sin x$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cdot \cos(x + \frac{h}{2})}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos(x + \frac{h}{2}) = \cos x$$

Таблица производных

$f(x)$	$f'(x)$
C	0
x^a	$a x^{a-1}$
a^x	$a^x \ln a$
e^x	e^x
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Теорема Если $f(x)$ и $g(x)$ имеют производные в x . Тогда

$$(1) (cf(x))' = cf'(x)$$

$$(2) (f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(3) (f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(4) \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$(5) (g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Пример (1) $y = 3x^2 - 2\ln x$, $y' = 6x - \frac{2}{x}$

(2) $y = x \ln x$, $y' = \ln x + 1$

(3) $y = \frac{\ln x}{x}$, $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

(4) $y = \ln(\sin x)$, $y' = \frac{\cos x}{\sin x}$

(5) $y = \frac{x^2 \cdot \cos x}{\sqrt{x}}$, $y' = \frac{1}{2} \sqrt{x} (3\cos x - 2x \sin x)$

(6) $y = x \cdot \ln x \cdot e^x$, $y' = e^x ((x+1)\ln x + 1)$

(7) $y = \arctg(x^3 + 4)$, $y' = \frac{3x^2}{(x^3 + 4)^2 + 1}$

(8) $y = e^{x \cdot \sin x}$, $y' = e^{x \sin x} (\sin x + x \cos x)$

(9) $y = \ln \sqrt{x^2 - 8}$, $y' = \frac{x}{x^2 - 8}$

Usloži kuni pego

$$\begin{aligned} \text{prvu usloži} \quad f''(x) &= (f'(x))' \\ \text{drugu usloži} \quad f'''(x) &= (f''(x))' \\ &\vdots \\ n\text{-tim usloži} \quad f^{(n)}(x) &= (f^{(n-1)}(x))' \end{aligned}$$

Primer (1) $y = \ln \sqrt{x^2 - 8}$, $y'' = ?$

(2) $y = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$, $y^{(5)} = ?$