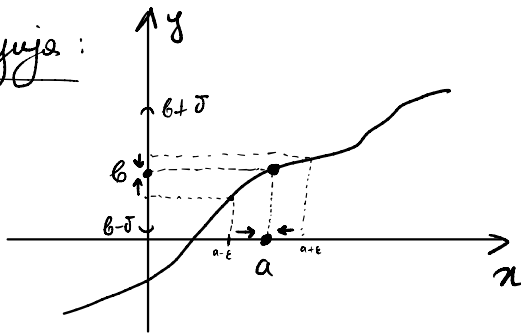


деј Нека је f дефинисана у некој околини тачке $a \in \mathbb{R}$.
 Кажемо да је $b \in \mathbb{R}$ гранична вредност (лимес) функције
 f када x тежи a ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$
 так. за свако x са својством $|x - a| < \delta$ важи

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Потпуно тачно $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$

Илустрација:



Што више се x приближава
 тачки a , то се $f(x)$ приближава
 тачки b .

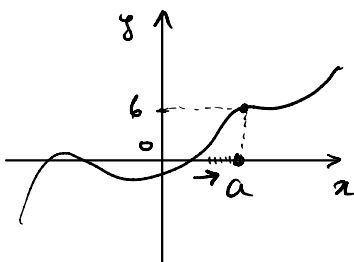
Пример (1) $\lim_{x \rightarrow a} c = c, \quad a, c \in \mathbb{R}$

(2) $\lim_{x \rightarrow a} x = a$

(3) $\lim_{x \rightarrow 5} (3x - 8) = 3 \cdot 5 - 8 = 7$

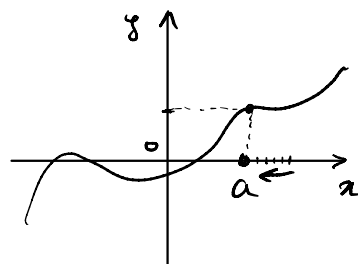
(4) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4$

Лев и десни лимес:



леви лимес $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b$

x се приближава a слева

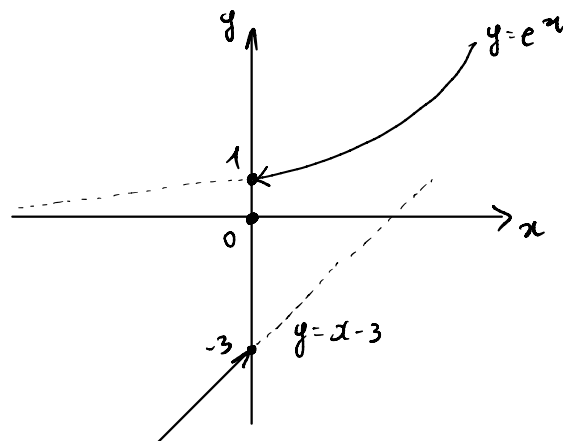


десни лимес $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$

x се приближава a десно

Пример

$$f(x) = \begin{cases} x-3, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ e^x, & x > 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} (x-3) = 0-3 = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} e^x = e^0 = 1$$

геп (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји x_0 так.

за свако $x > x_0$ важи $|f(x) - b| < \varepsilon$.

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји x_1 так.

за свако $x < x_1$ важи $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Пример (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 3x} = \frac{1}{2}$

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \frac{x-1}{x+1} = 0$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x \cdot \frac{x-1}{x+1} = +\infty$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Теорема Нека постоје лимес $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Тда

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right)$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

Заб Нека је $f(x) \geq 0$. Ако постоји $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, онда је $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq 0$.

Пример (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} \right) = 2$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3}{3x^2 - 5} = \frac{5}{3}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 3}{3x^2 - 5} = -1$$

Заб (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

Пример (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \frac{1}{3}$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^x = e^3$$

Асимптотите

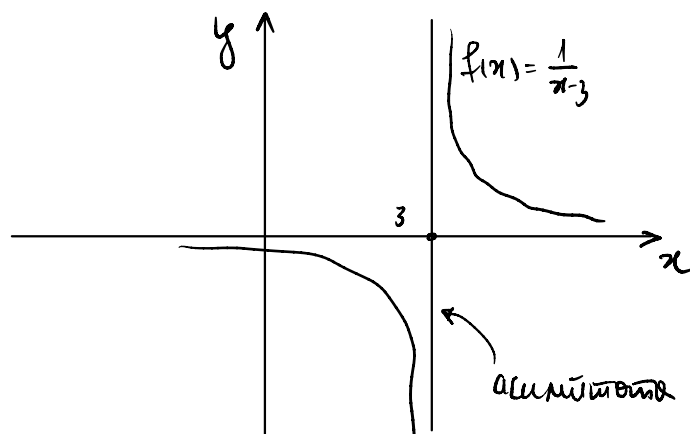
Заб. Кажемо да је нека права асимптота графика функције $y=f(x)$, ако постоје тачке $(x, f(x))$ са графика од те праве тачки 0, кад $x \rightarrow \infty$.

Постоје три врсте асимптота:

(1) вертикалне асимптоте: праве облика $x=a$ тј.

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$$

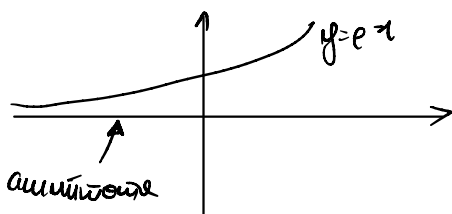
нпр. $f(x) = \frac{1}{x-3}$ има верт. ас. $x=3$:



(2) хоризонталне асимптоте:

ако је $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$, онда је права $y=b$ хор. ас.

нпр. $f(x) = e^x$ има х.а. $y=0$ јер је $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$



(3) Коса асимптота:

ако је $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R}$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = n \in \mathbb{R}$,

(k и n у координати бројева), онда је права

$$y = kx + n$$

коса асимптота.

Напомена (1) Верт. ас. изражено у крајњим границима

(2) ако f има ХА у $\pm \infty$, не може имати и КА и обрнуто

Пример (1) Одредити асимптоте $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 5}{x - 8}$

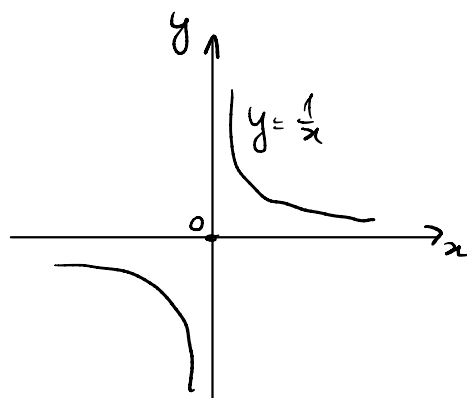
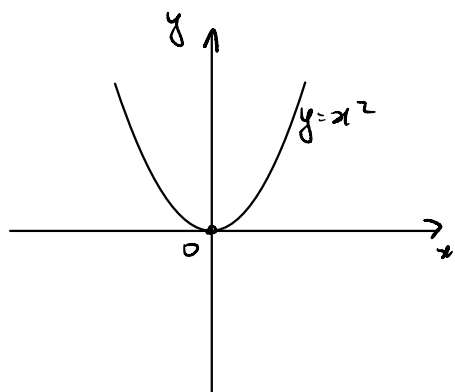
(2) Одредити асимптоте $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

Непреривност

Функција f је непрекидна у x_0 ако је дефинисана у x_0 и $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. f је непр. ако је непр. у свакој тачки свог домена.

Пример (1) $f(x) = x^2$ је непр.

(2) $f(x) = \frac{1}{x}$ није непр. у 0



Теорема Ако су f и g непр. у a_0 , онда су непр. и $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$.

Теорема Свака елементарна функција је непр. на свом домену.

Теорема Ако је f непр. на интервалу $[a, b]$, онда она достиже свој минимум и максимум.