

деф. Нека је (a_n) одајужти нис пиз. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Тада риз
 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ називамо Лјбншцовим ризом.

Ситов Сваки Лјбншцов риз конвертира.

Пример $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots$

Означимо $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Тада је $|a_n| = \frac{1}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ дивертира,

та даши риз не конвертира аисолуито (и не можемо га икористити
итов $AK \Rightarrow K$). Са друге стране, нис $(\frac{1}{n})$ одаи и
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, та је даши риз Лјбншцов тие он конвертира.

Закле овај пример показује да $K \not\Rightarrow AK$.

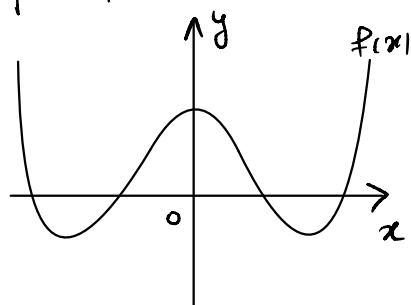
Функције

Дефиницији смо раније подмове функције, гомења, когомeња,...

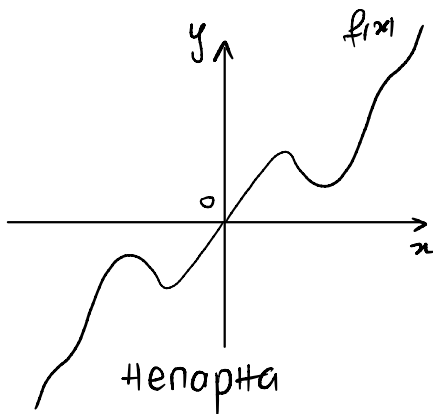
деф. $f: A \rightarrow B$ је парна ако је $f(-x) = f(x)$, $x \in A$

• $f: A \rightarrow B$ је непарна ако је $f(-x) = -f(x)$, $x \in A$

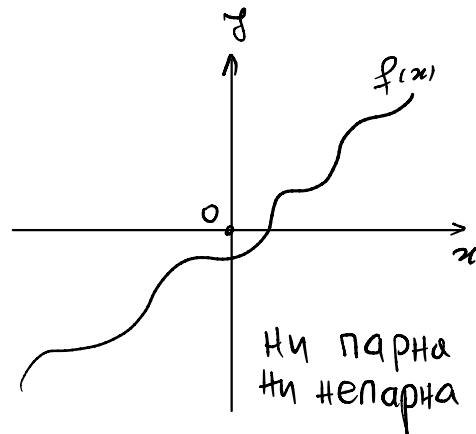
Пример



парна



непарна



ни парна
ни непарна

деф. Функција $f: A \rightarrow B$ је инјекција („1-1“) ако за свако $x_1, x_2 \in A$ твр. $f(x_1) = f(x_2)$ следи $x_1 = x_2$.

(Различити пројекти се сликају у различито.)

деф. Функција $f: A \rightarrow B$ је сурјекција („на“) ако за свако $y \in B$ постоји $x \in A$ твр. $f(x) = y$.

(Кодомен је једнак слици.)

деф. Функција је бијекција ако је „1-1“ и „на“

Пример (1) $f(x) = x^2$, $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$

f је „на“

f није „1-1“ (јер твр. $(-2)^2 = 2^2$, али $-2 \neq 2$)

$$(2) f(x) = x^2, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

f nije „ $\#a$ “ (jer npr. ne postoji $x \in \mathbb{R}$ tak. da $x^2 = -5$)
 f nije „1-1“

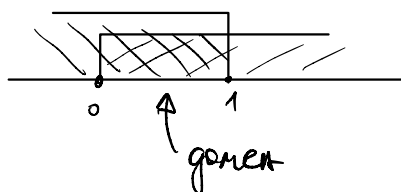
$$(3) f(x) = x^3, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

f je „1-1“
 f je „ $\#a$ “
 $\Rightarrow f$ je bijektivna

Пример [домени функције] (1) $f(x) = \ln x \sqrt{1-x}$

услови: • $x > 0$ (због $\ln$)

• $1-x \geq 0$ тј. $x \leq 1$ (због $\sqrt{\quad}$)



$$D_f = (0, 1]$$

$$(2) f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$$

услови: • $x+1 \neq 0$, тј. $x \neq -1$ (због разломка)

• $\frac{x-1}{x+1} > 0$ (због $\ln$)

$$\frac{x-1}{x+1}$$

$$\frac{x+1}{x+1}$$

$$\frac{x-1}{x+1}$$

$$D_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$$(3) f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{e^x}$$

услови: • $x^2+1 \geq 0$ (због $\sqrt{\quad}$)

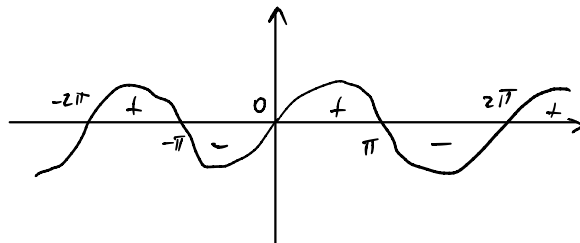
↑ ово гласи ваистину

• $e^x \neq 0$ (због разломка) - гласи ваистину

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$(h) f(x) = \sqrt{\sin x}$$

$$\text{умови: } \sin x \geq 0$$



$$\begin{aligned} D_f &= \dots [-2\pi, -\pi] \cup [0, \pi] \cup [2\pi, 3\pi] \cup [4\pi, 5\pi] \cup \dots \\ &= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi] \end{aligned}$$

деф. Неможемо је $f: A \rightarrow B$ и $g: B \rightarrow A$. Кажемо да је g инверзна функција функције f ако је

$$f(g(x)) = x, \text{ за свако } x \in B$$

$$\text{и } g(f(x)) = x, \text{ за свако } x \in A.$$

Користимо ознаку $f^{-1} = g$.

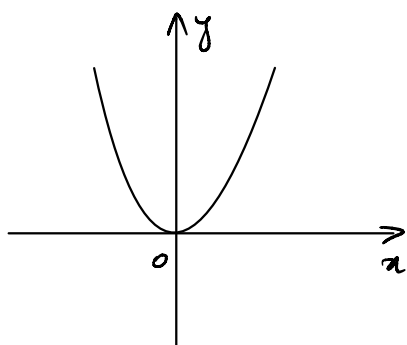
Постоји инверзна функција од f ако и само ако је f биекција.

Пример $f(x) = x^2$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ није биекција, јер није ни „1-1“

ни „на“, можемо га смањити домен и кодомен:

$f(x) = x^2$, $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ јесте биекција!

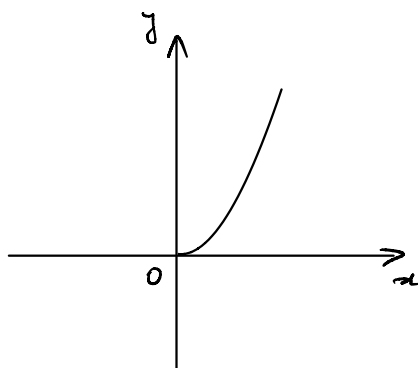
инверзна функција је $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $f^{-1}: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$



$$f(x) = x^2$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

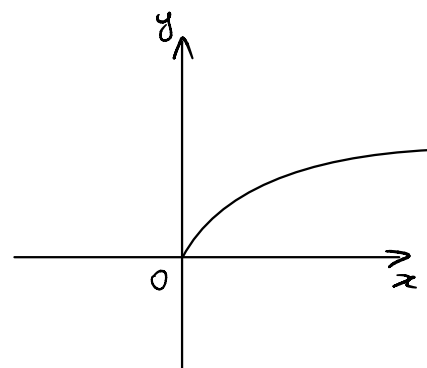
није биекција



$$f(x) = x^2$$

$$f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

јесте биекција

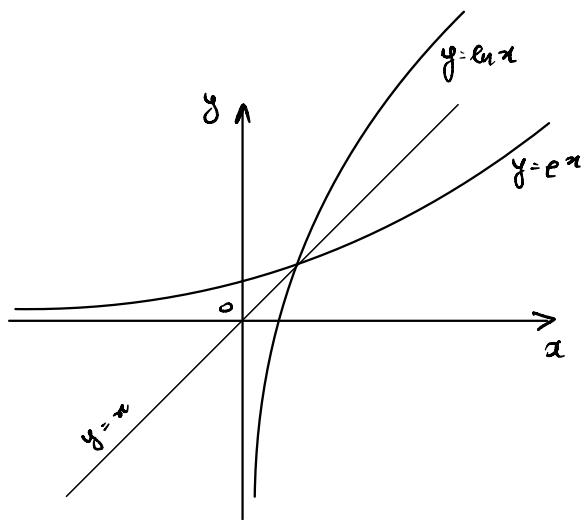
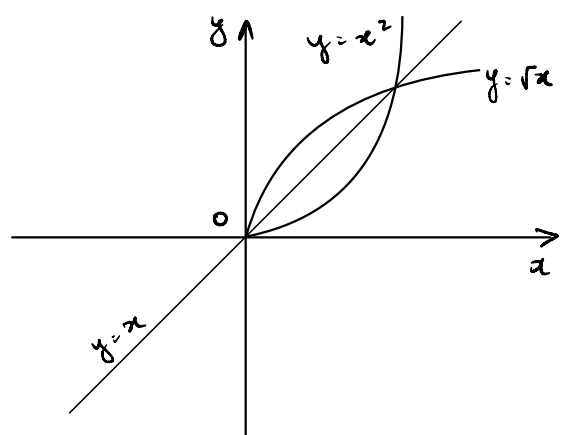


$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

$$f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

јесте биекција

Графици могуће инверзних функција симетрични су y односу на праву $y=x$.



греб (1) f је растућа (опадајућа) на (a,b) ако за свако $x_1, x_2 \in (a,b)$ важи

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) \geq f(x_2))$$

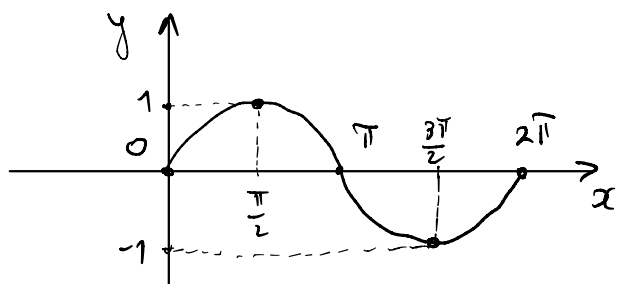
(2) f је ограничена гором (долом) на (a,b) ако постоји $M \in \mathbb{R}$ так. за свако $x \in (a,b)$ важи

$$f(x) \leq M \quad (f(x) \geq M).$$

(3) f је монотона ако расте или опада.

(4) f је стриктно ако је ограничена и гором и долом.

Пример(1) $f(x) = \sin x$, $f: [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1]$



f расте на $(0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$
 f пада на $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

f је ограничена гором са 1, долом са -1.

(2) $f(x) = x$ није ограничена ни гором ни долом.

геф. функција f је позитивна (негативна) на (a, b) ако за свако $x \in (a, b)$ важи $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$).

Пример (1) одредити знак функције $f(x) = (x-7) \ln(x-1)$.

домен: $x > 1$ (због $\ln$) $\Rightarrow D_f = (1, +\infty)$

Повећано одређујемо знак од $x-7$, повећано од $\ln(x-1)$.

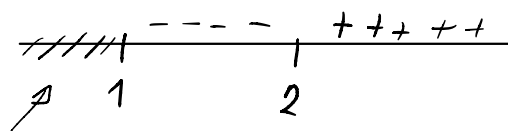
$$\ln(x-1) > 0$$

дакле $\ln(x-1)$ има знак:

$$x-1 > e^0$$

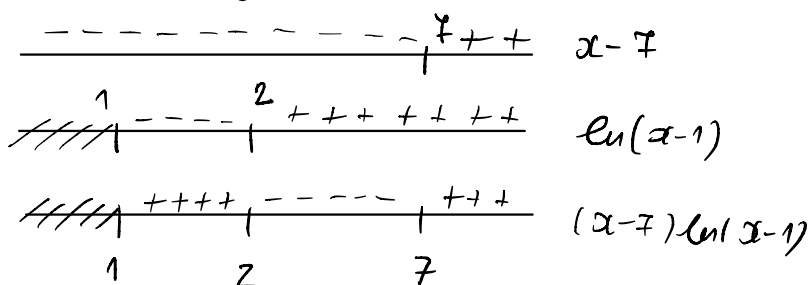
$$x-1 > 1$$

$$x > 2$$



није
геф.

Слично са знаком од $x-7$:



Закључак: $f(x) = 0$ за $x=2$ и $x=7$

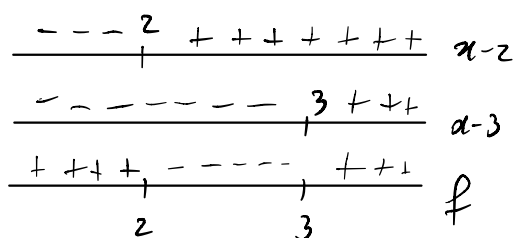
$f(x) > 0$ на $(1, 2) \cup (7, +\infty)$

$f(x) < 0$ на $(2, 7)$.

(2) одредити знак функције $f(x) = x^2 - 5x + 6$ (очигледно $D_f = \mathbb{R}$)

$$x_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 2$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$



Закључак: $f(x) = 0$ за $x=2$, $x=3$

$f(x) > 0$ на $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$

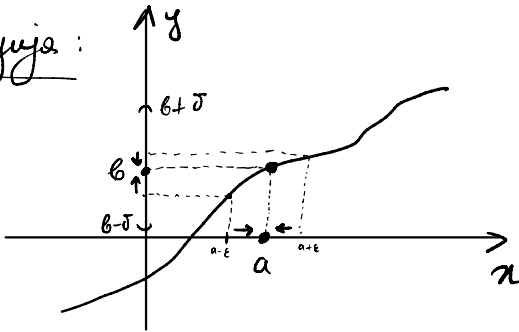
$f(x) < 0$ на $(2, 3)$.

деј Нека је f дефинисана у некој околини тачке $a \in \mathbb{R}$.
 Кажемо да је $b \in \mathbb{R}$ гранична вредност (лимес) функције
 f када x тежи a ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$
 так. за свако x са својством $|x - a| < \delta$ важи

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Потпуно пишемо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$

Илустрација:



Што више се x приближава
 тачки a , то се $f(x)$ приближава
 тачки b .

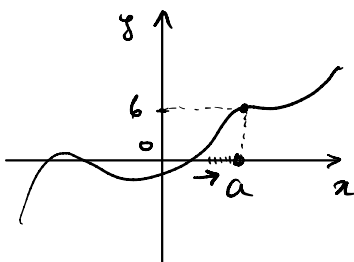
Пример (1) $\lim_{x \rightarrow a} c = c, \quad a, c \in \mathbb{R}$

(2) $\lim_{x \rightarrow a} x = a$

(3) $\lim_{x \rightarrow 5} (3x - 8) = 3 \cdot 5 - 8 = 7$

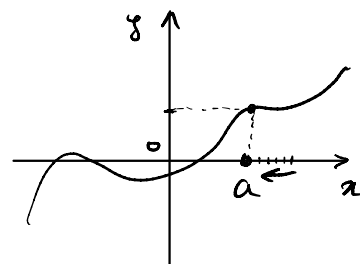
(4) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4$

Лев и десни лимес:



леви лимес $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b$

x се приближава a слева



десни лимес $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$

x се приближава a десно