

Критеријуми за конвергенцију редова са позитивним члановима

Саоп [неопходан услов конвергенције]

(1) Ако ред $\sum a_n$ конв. онда је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

(2) Ако је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, онда $\sum a_n$ дивергира.

Пример Истицати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n}{2n^2+n-1}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{2n^2+n-1} \stackrel{\cdot n^2}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

па ред див. јер није изуштен неопходан услов конв.

Саоп [поредбени критеријум] Нека је $0 \leq a_n \leq b_n$ за $n \geq n_0$. Тада

(1) ако $\sum b_n$ конвертира, онда и $\sum a_n$ конвертира;

(2) ако $\sum a_n$ дивергира, онда и $\sum b_n$ дивергира.

Пример (1) Истицати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} n^3$.

Означимо $a_n = n$, $b_n = n^3$. Како је $0 \leq n \leq n^3$ и знамо да $\sum_{n=1}^{\infty} n$ дивергира, па основу поредбеног критеријума (2) дивергира и $\sum_{n=1}^{\infty} n^3$.

(2) Истицати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$$\text{Означимо } a_n = \frac{1}{n^2} \text{ и } b_n = \frac{1}{n(n-1)}$$

Како је $n^2 \geq n^2 - n$

$$n^2 \geq n(n-1)$$

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$$

$$a_n \leq b_n$$

и $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ конвертира, то конв. и гдш ред не основу поређбеног критеријума (1).

(3) Може се показати да

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^d} \begin{cases} \rightarrow \text{конвертира за } d > 1 \\ \rightarrow \text{дивертира за } d \leq 1 \end{cases}$$

нпр. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}}$ конвертирају, док $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ див.

Теорема [Рајнџев критеријум] Нека је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ред са позитивним члановима такав да постоји $\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$. Тада

(1) ако је $\tau < 1$, ред $\sum a_n$ конв.

(2) ако је $\tau > 1$, ред $\sum a_n$ див.

(3) ако је $\tau = 1$, не можемо рећи ништа о конвергенцији.

Пример (1) Илустрати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}$

Означимо $a_n = \left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}$

$$\begin{aligned} \tau &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}}_{\rightarrow e} \cdot 2 = e^2 > 1, \end{aligned}$$

то ред дивертира на основу Кошијевог критеријума

(2) Ишитајте конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

$$\text{Означимо } a_n = \frac{n}{2^n}.$$

$$\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{1}{2} < 1, \text{ то}$$

даје ред конв. на основу Кошијевог критеријума.

Теорема [Даламберов критеријум] Нека је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ред са позитивним члановима такав да постоји $\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Тада

- (1) ако је $\tau < 1$, ред $\sum a_n$ конв.
- (2) ако је $\tau > 1$, ред $\sum a_n$ див.
- (3) ако је $\tau = 1$, не можемо рећи ништа о конвергенцији.

Пример (1) Ишитајте конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

$$\text{Означимо } a_n = \frac{n}{2^n}.$$

$$\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n(n+1)}{2 \cdot 2^n \cdot n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2} < 1, \text{ то ред}$$

конвергенция на основу Ламбертов критеріума.

(а) Иштити конвенцију реду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$

Означимо $a_n = \frac{3^n}{n!}$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot 3^{n+1}}{(n+1)! \cdot 3^n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n!} \cdot 3 \cdot \cancel{3^n}}{(n+1) \cdot \cancel{n!} \cdot \cancel{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1, \text{ па}$$

реду конвергенция на основу Ламбертов критеріума.

Реду са противоположним члановима

деф. Кажемо да ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ апсолутно конвергенция (АК), ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ конвергенция (К).

Свој Ако ред АК, онда он К.

Пример $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots$

Означимо $a_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$, па је $|a_n| = \left| \frac{(-1)^n}{2^n} \right| = \frac{1}{2^n}$.

Знамо да $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ конв., мито знамо да $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ АК, па

онда он и конвергенция.