

Низови

деф. Низ реалних бројева је функција $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Користимо онакву $a_n = a(n)$ и бројеве $a_1, a_2, a_3, \dots$ називамо члановима низа. Низ кратко означавамо са (a_n)

Пример $a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ је низ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$

деф. (1) Низ (a_n) је ограничен одозго (одоздо) ако постоји $M \in \mathbb{R}$ такав да је $a_n \leq M$ ($a_n \geq M$) за све $n \in \mathbb{N}$.

(2) Низ је ограничен, ако је вр. и одозго и одоздо.

(3) Низ (a_n) је (строго) растући ако $a_{n+1} \geq a_n$ ($a_{n+1} > a_n$), $n \in \mathbb{N}$.

(4) Низ (a_n) је (строго) опадајући ако $a_{n+1} \leq a_n$ ($a_{n+1} < a_n$), $n \in \mathbb{N}$.

(5) Низ (a_n) је монотон ако је растући или опадајући.

(6) Низ (a_n) је позитиван (негативан) ако $a_n > 0$ ($a_n < 0$), $n \in \mathbb{N}$.

Пример (1) $a_n = \frac{1}{n}$ је опадајући, позитиван и ограничен

(2) $a_n = n$ је вр. одоздо, растући, позитиван

Конвергенција низова

деф. Кажемо да је $b \in \mathbb{R}$ гранична вредност (лимес) низа (a_n) ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да за свако $n > n_0$ важи $|a_n - b| < \varepsilon$. Тада кажемо да низ (a_n) конвергира ка b и пишемо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$$

Ако $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ не конвертира, онда дивертира.

Стецијално, ако за свако $M \in \mathbb{R}$ постоји $n \in \mathbb{N}$ т.г. $a_n > M$, онда је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty.$$

Слично, ако за свако $M \in \mathbb{R}$ постоји $n \in \mathbb{N}$ т.г. $a_n < M$, онда је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty.$$

Пример (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} C = C$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ не постоји

Сваб Сваки конвергентан $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ је ограничен.

Сваб Нека је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Тада

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (C \cdot a_n) = C \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = C \cdot a, C \in \mathbb{R}.$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \pm b$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) = a \cdot b$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}$

доказ (1) Нека је $\varepsilon > 0$. Постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ т.г. за све $n > n_0$ важи $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|C|}$

та је $|C a_n - C a| < \varepsilon$ т.г. $\lim_{n \rightarrow \infty} (C a_n) = C \cdot a.$

(2)-(4) слично по дефиницији (убедити се) $\square$

Теорема [2 монотоности] Нека је $a_n \leq c_n \leq b_n$ за $n \in \mathbb{N}$

и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$. Тада и (c_n) конвертира и $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A.$

Лема Нека је $a_n \leq b_n$ за $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Онда је $a \leq b$.

Пример (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0, k \in \mathbb{N}$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} +\infty, & q > 1 \\ 1, & q = 1 \\ 0, & -1 < q < 1 \\ \text{не постоји}, & q \leq -1 \end{cases}$$

нпр. $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,72 \quad \text{Ејлерова константа}$$

Лема Сваки монотон и ограничен низ конвертира.

Пример $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 1}{5n^2 - n - 2} = \frac{3}{5}$

Редови

деф. Ред са члановима $a_1, a_2, a_3, \dots$ дефинише се као формални збир својих чланова и обележава се

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots$$

n -та парцијална зума реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дефинише се као

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

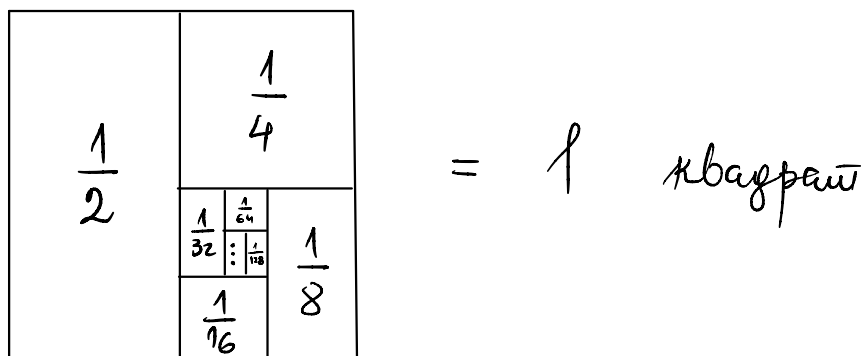
Ако постоји $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, кажемо да ред конвертира и

његова зума је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

Иначе, кажемо да ред дивертира.

Пример $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$

можемо сликовито представити:



Закле, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1$

По дефиницији:

$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$

није омиљено, вучено у следећи пример

та је $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 1 - 0 = 1$

Конечно, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$.

Пример (1) $a_n = c$ константе и $c \neq 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} c = c + c + c + c + \dots$

По дефиницији: $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \underbrace{c + c + \dots + c}_n = nc$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} nc = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$, па ред $\sum_{n=1}^{\infty} c$ дивергира.

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots$$

Применимо $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = a_n$

По геометрији:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \left(\overset{a_1}{\cancel{\frac{1}{1}}} - \cancel{\frac{1}{2}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \overset{a_2}{\cancel{\frac{1}{3}}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \overset{a_3}{\cancel{\frac{1}{4}}} \right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \overset{a_n}{\cancel{\frac{1}{n+1}}} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

Дакле, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - 0 = 1$, па гоме ред
конвертира и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

(3) Геометријски ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n = a_0 + a_0 q + a_0 q^2 + a_0 q^3 + \dots$

$$S_n = a_0 + a_0 q + a_0 q^2 + \dots + a_0 q^n = a_0 \underbrace{\left(1 + q + q^2 + \dots + q^n \right)}_A$$

Плоо одређујемо А.

$$A = 1 + q + q^2 + \dots + q^n \quad / \cdot q$$

$$qA = q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1} \quad / +1$$

$$1 + qA = \underbrace{1 + q + q^2 + \dots + q^n}_A + q^{n+1}$$

$$1+qA = A + q^{n+1}$$

$$A(1-q) = 1 - q^{n+1}$$

$$A = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Враћамо се у S_n :

$$S_n = a_0 A = a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \begin{cases} a_0 \frac{1}{1-q}, & -1 < q < 1 \\ \text{Не постоји,} & |q| \geq 1 \end{cases}$$

Коначно, $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n$ конвертира за $|q| < 1$ и

тада је $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n = \frac{a_0}{1-q}$, а иначе овај ред конвертира.

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

$$S_n = -1 + 1 - 1 + 1 - \dots + (-1)^n = \begin{cases} 0, & n \text{ парно} \\ -1, & n \text{ непарно} \end{cases}$$

S_n је низ: $-1, 0, -1, 0, -1, 0, \dots$ и он конвертира, па конвертира и ред $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$.

Саб Ако редови $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвертирају и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, онда

(1) конвертира и $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ и његова је $A \pm B$;

(2) конвертира и $\sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n)$ и његова је $c \cdot A$.