

## Основни скупи бројева

① Скуп природних бројева  $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

$$N_0 = N \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

② Скуп целих бројева  $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

③ Скуп рационалних бројева  $Q = \{\frac{p}{q} \mid p \in Z, q \in N\}$

④ Скуп ирационалних бројева  $I = \{x \mid x \notin Q\}$  (нпр.  $\sqrt{2}$ ,  $\pi$ )

⑤ Скуп реалних бројева  $R = Q \cup I$

Пример Решити једначину  $x^2 = 4$

(1) у  $R$ :  $x^2 - 4 = 0$

$$(x-2)(x+2) = 0$$

$x = \pm 2 \Rightarrow$  имамо 2 решења  $x = -2$  и  $x = 2$

(2) у  $Z$ : исто све

(3) у  $N$ :  $2 \in N$ , али  $-2 \notin N$ , па имамо само једно решење  $x = 2$ .

Још неке ознаке:  $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$$

$(a, b]$ ,  $(a, b)$  - исто

$$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$$

$$[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}$$

$(-\infty, a)$ ,  $(-\infty, a]$  - исто

$$(-\infty, +\infty) = R$$

## Комплексни бројеви

$i$  = мнимична јединица

$$i^2 = -1 \quad (\text{неформално "i = } \sqrt{-1} \text{"})$$

скуп комплексних бројева  $C = \{a + bi \mid a, b \in R\}$

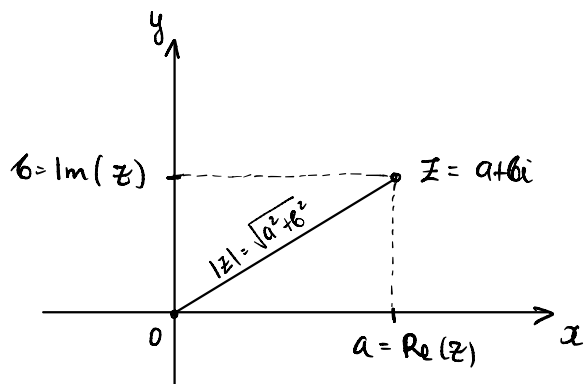
$$\text{сабирање: } (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$$

$$\text{ множење: } (a+bi) \cdot (c+di) = ac - bd + (ad+bc)i$$

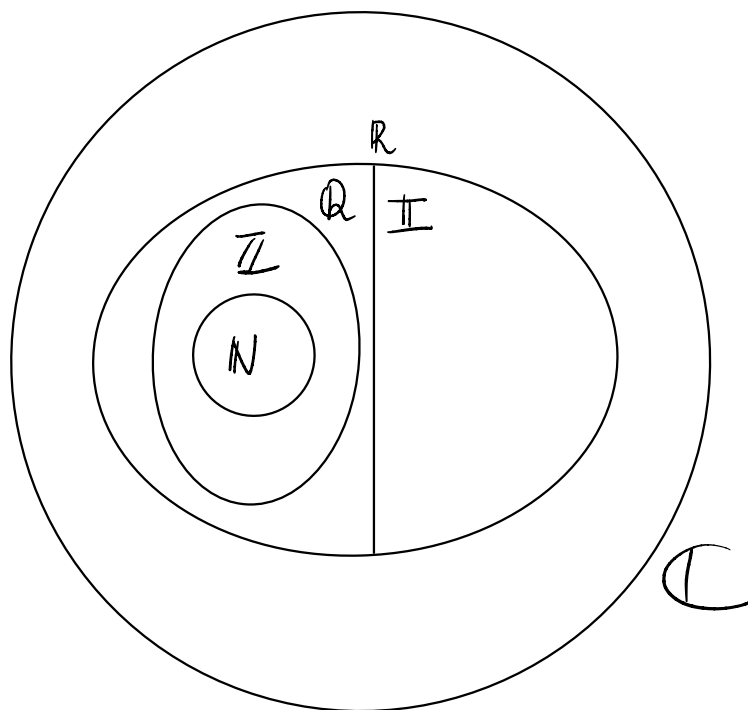
даки реалан број је комплексан, нпр.  $5 = 5 + 0 \cdot i$

Ако је  $z = a + bi$  дефинишемо:

- реални део од  $z$ :  $\operatorname{Re}(z) = a$
- иминарни део од  $z$ :  $\operatorname{Im}(z) = b$
- модуло од  $z$ :  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$



Укључење:

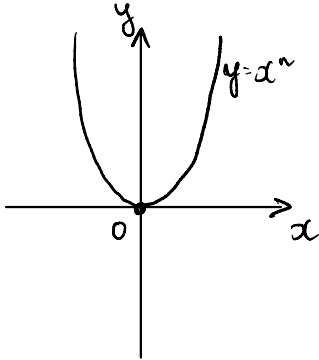


$$\begin{array}{c} \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \\ \mathbb{I} \subseteq \end{array}$$

## Елементарне функције

① Степен функција  $f(x) = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$

$n$  парно

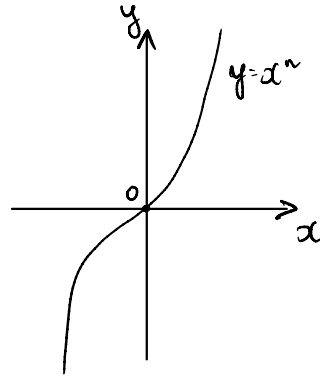


$f$  је парна

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$f(D_f) = [0, +\infty)$$

$n$  непарно



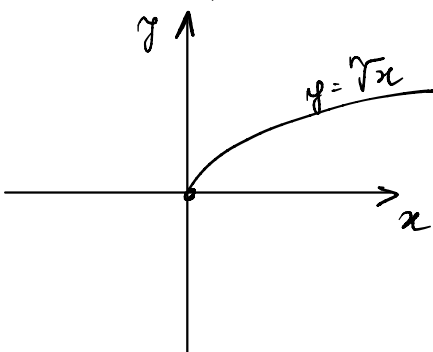
$f$  је непарна

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$f(D_f) = \mathbb{R}$$

② Корен функција  $f(x) = \sqrt[n]{x}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$

$n$  парно

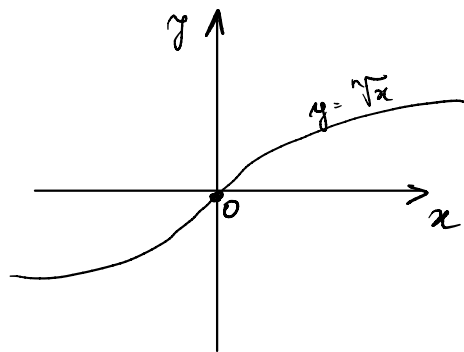


$f$  није ни парна ни непарна

$$D_f = [0, +\infty)$$

$$f(D_f) = [0, +\infty)$$

$n$  непарно



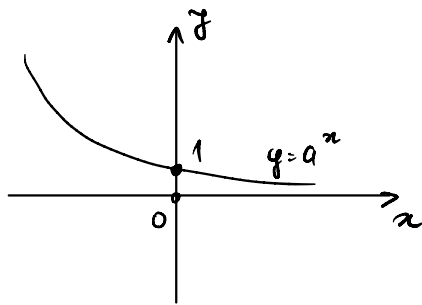
$f$  је непарна

$$D_f = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

$$f(D_f) = \mathbb{R}$$

③ Експоненцијална функција  $f(x) = a^x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$

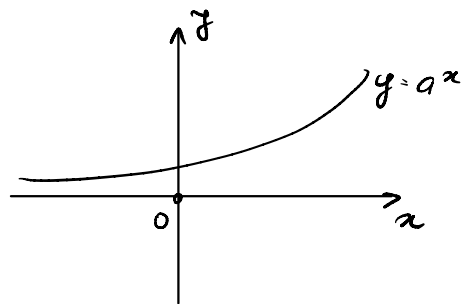
$a \in (0, 1)$ :



$$D_f = \mathbb{R}$$

$$f(D_f) = (0, +\infty)$$

$a > 1$ :

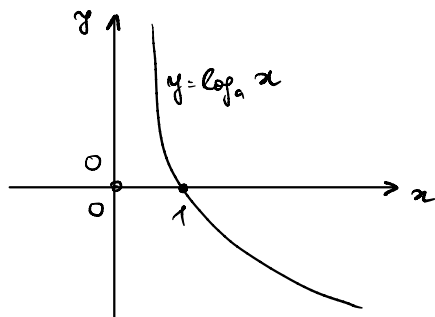


$$D_f = \mathbb{R}$$

$$f(D_f) = (0, +\infty)$$

④ Логаритамска функција  $f(x) = \log_a x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$

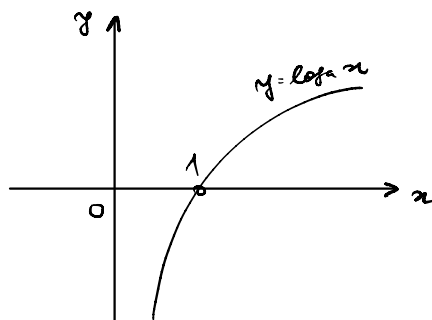
$a \in (0, 1)$ :



$$D_f = (0, +\infty)$$

$$f(D_f) = \mathbb{R}$$

$a > 1$ :



$$D_f = (0, +\infty)$$

$$f(D_f) = \mathbb{R}$$

Следи за  $a = e \approx 2,72$  Елерова константа:  $\log_e x = \ln x$

За сва експоненцијалне и логаритамске функције:

$$\log_a x = b \Leftrightarrow a^b = x$$

особине експоненцијалне и логаритамске функције:

$$1) a^0 = 1$$

$$2) a^1 = a$$

$$3) a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$4) (a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$5) a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$6) a^x \cdot b^x = (ab)^x$$

$$7) \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$1) \log_a 1 = 0$$

$$2) \log_a a = 1$$

$$3) \log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

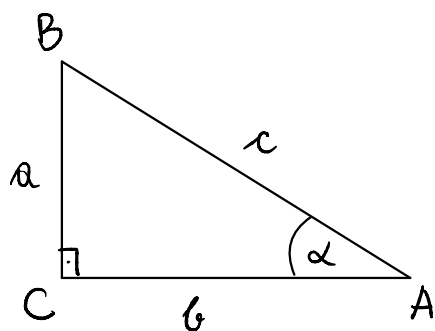
$$4) \log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$5) \log_a (a^y) = y \log_a a$$

$$6) \log_{a^y} x = \frac{1}{y} \log_a x$$

$$7) \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

## Тригонометријске функције



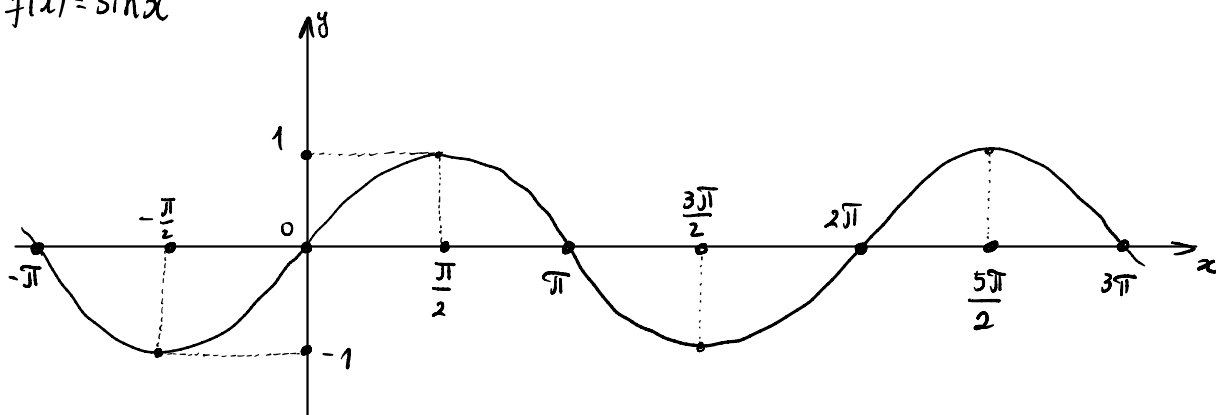
"синус"  $\rightarrow \sin \alpha = \frac{\text{наспрамна катета}}{\text{хипотенуза}} = \frac{a}{c}$

"косинус"  $\rightarrow \cos \alpha = \frac{\text{налегла катета}}{\text{хипотенуза}} = \frac{b}{c}$

"тангенс"  $\rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{наспрамна катета}}{\text{налегла катета}} = \frac{a}{b}$

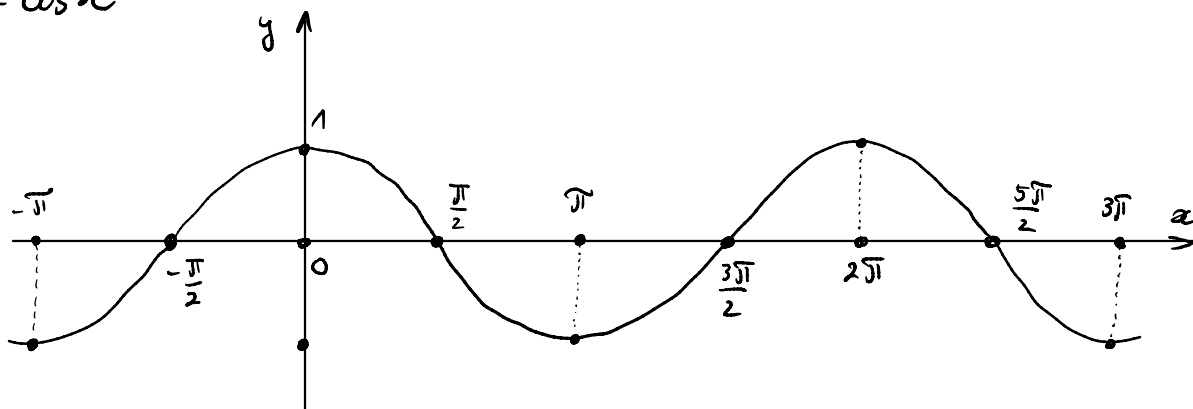
"котангенс"  $\rightarrow \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\text{налегла катета}}{\text{наспрамна катета}} = \frac{b}{a}$

$$\textcircled{1} f(x) = \sin x$$



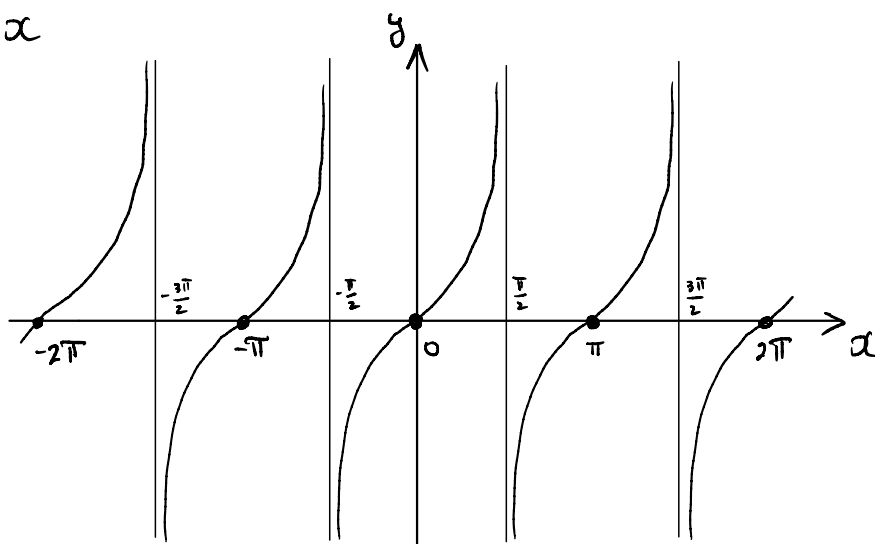
$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}, \quad f(\mathcal{D}_f) = [-1, 1], \quad f \text{ је непарна}$$

②  $f(x) = \cos x$



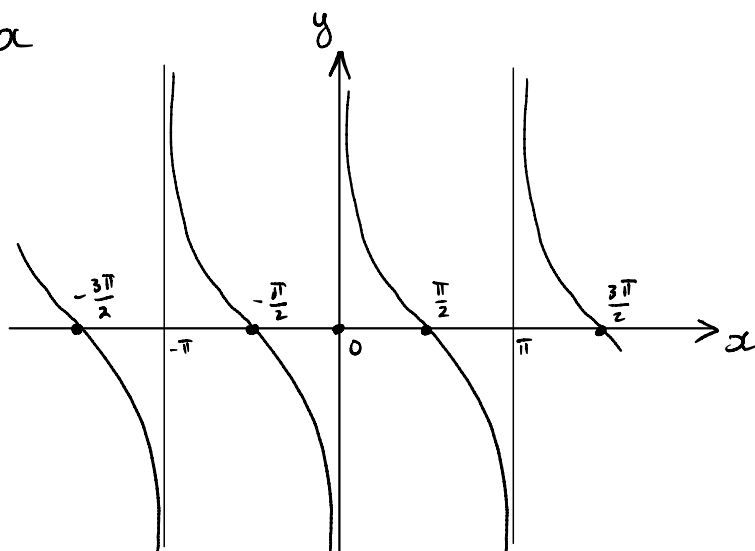
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ ,  $f(\mathcal{D}_f) = [-1, 1]$ ,  $f$  је парна

③  $f(x) = \tan x$



$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ ,  $f(\mathcal{D}_f) = \mathbb{R}$ ,  $f$  је неједнака

④  $f(x) = \cot x$



$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ,  $f(\mathcal{D}_f) = \mathbb{R}$ ,  $f$  је неједнака

## Неки тригонометријски идентитети

$$\textcircled{1} \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\textcircled{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\textcircled{3} \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\textcircled{4} \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\textcircled{5} \sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\textcircled{6} \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

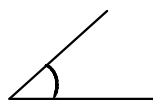
$$\textcircled{7} \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

$$\textcircled{8} \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$$

Бези исмету радијане и степени:  $2\pi \text{ rad} = 360^\circ$



$$30^\circ = \frac{\pi}{6}$$



$$45^\circ = \frac{\pi}{4}$$



$$60^\circ = \frac{\pi}{3}$$



$$90^\circ = \frac{\pi}{2}$$



$$180^\circ = \pi$$

## Таблица неких вредности

| $x$      | 0               | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$           | $2\pi$          |
|----------|-----------------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $\sin x$ | 0               | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               | 0               | 0               |
| $\cos x$ | 1               | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               | -1              | 1               |
| $\tan x$ | 0               | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | није дефинисано | 0               | 0               |
| $\cot x$ | није дефинисано | $\sqrt{3}$           | 1                    | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0               | није дефинисано | није дефинисано |

## Биномиална формула

Твора За две  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  важи

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

где је  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$

$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$  ← „ $n$  факторијел“

нпр.  $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

$\binom{n}{k}$  ← „биномиални коефицијенти“

нпр.  $\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$

Пример (1)  $n=2$ :  $(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(2)  $n=3$ :  $(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3$   
 $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

## Квадратна једначина

Решења квадратне једначине  $ax^2+bx+c=0$  су:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1° ако  $b^2 - 4ac > 0$ , онда имамо 2 различита реална решења

2° ако  $b^2 - 4ac = 0$ , онда имамо 1 реално решење

3° ако  $b^2 - 4ac < 0$ , онда имамо 2 различита комплексна решења