Теореме о непокретној тачки

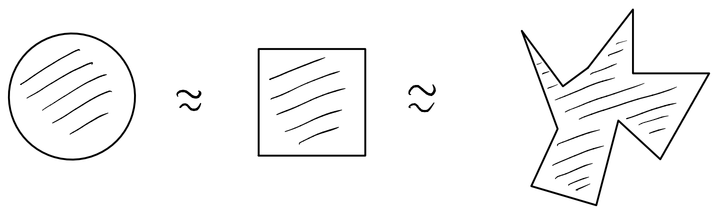
деф. Кажемо да X има својство фиксне тачке (СФТ) ако свако непрекидно пресликавање $f: X \to X$ има фиксну (непокретну) тачку (тј. постоји $x_0 \in X$ тд. $f(x_0) = x_0$).

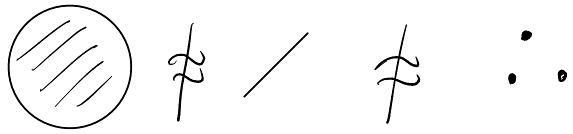
Теорема [Брауер] Нека је $n \in \mathbb{N}_0$. Тада диск D^n има СФТ.
$\left(D^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1 \} \right)$

деф. Кажемо да је $h: X \to Y$ хомеоморфизам ако је непрекидно, бијекција и h^{-1} је непрекидно. Ако постоји хомеоморфизам $h: X \to Y$, кажемо да су X и Y хомеоморфни и пишемо $X \approx Y$.

Може се показати да је $\approx$ релација еквиваленције.

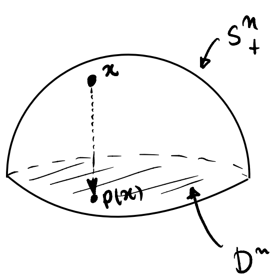
Пример





Пример Полусфера $S^n_+ = \{ (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} \geq 0 \}$ и D^n су хомеоморфни. Заиста, пројекција $p: S^n_+ \to D^n$ дата са

$$p(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n)$$



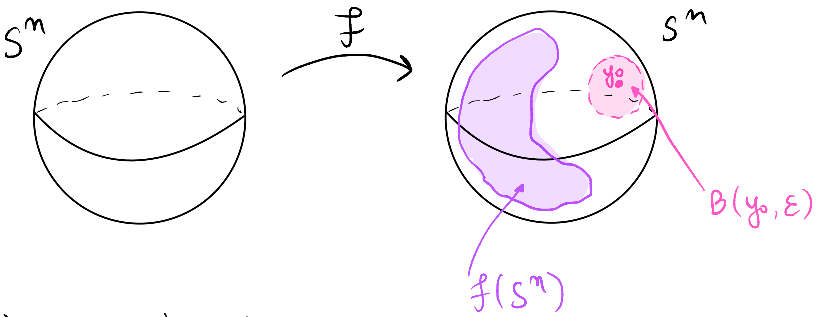
је хомеоморфизам. Инверз:

$$p^{-1}(x_1, \dots, x_n) = \left(x_1, \dots, x_n, \sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2} \right) \in S^n_+$$

Теорема Ако X има СФТ и $X \simeq Y$, онда Y има СФТ

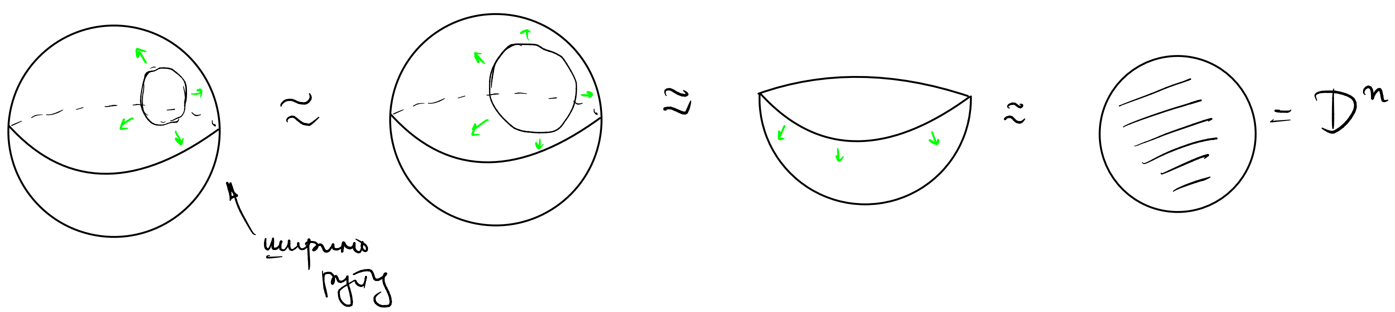
1. Нека је $f: S^n \to S^n$ непрекидно пресликавање које није „на". Доказати да f има фиксну тачку.

решење Како f није „на", то постоји $y_0 \in S^n \setminus f(S^n)$.
f је непр. и S^n компактан, па је и $f(S^n)$ компактан, а самим тим и затворен
$\Rightarrow S^n \setminus f(S^n)$ је отворен.
Како $y_0 \in S^n \setminus f(S^n)$ и $S^n \setminus f(S^n)$ је отворен, то постоји отворена лопта око y_0 која је цела садржана у $S^n \setminus f(S^n)$, тј. постоји $\varepsilon > 0$ тд. $B(y_0, \varepsilon) \cap f(S^n) = \emptyset$.



Дакле $f(S^n) \subseteq S^n \setminus B(y_0, \varepsilon)$.

Шта је $S^n \setminus B(y_0, \varepsilon)$?



Како је $f(S^n) \subseteq S^n \setminus B(y_0, \varepsilon)$, можемо смањити кодомен, тј. $f: S^n \to S^n \setminus B(y_0, \varepsilon)$. Коначно, посматрајмо рестрикцију пресликавања f на $S^n \setminus B(y_0, \varepsilon)$.

$$f|_{S^n \setminus B(y_0,\varepsilon)} : S^n \setminus B(y_0,\varepsilon) \to S^n \setminus B(y_0,\varepsilon)$$

Како је $S^n \setminus B(y_0,\varepsilon) \simeq D^n$, можемо применити Брауерову теорему на $f|_{S^n \setminus B(y_0,\varepsilon)}$, тј. ово пресликавање има фиксну тачку.

Дакле, постоји $x_0 \in S^n \setminus B(y_0,\varepsilon)$ тд.

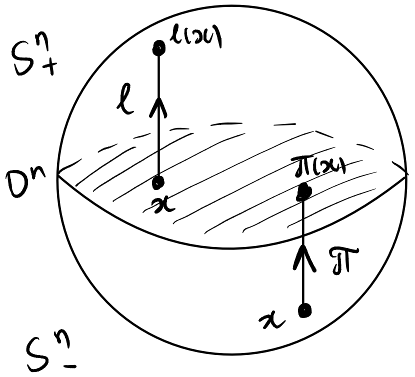
$$f|_{S^n \setminus B(y_0,\varepsilon)}(x_0) = x_0, \quad \text{тј.}$$

$$f(x_0) = x_0. \quad \blacksquare$$

2. Нека је $f : S^n_+ \to S^n_-$ непр. Доказати да постоји $x \in (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n_+$ тд. $f(x) = (x_1, \dots, x_n, -x_{n+1})$.

$\left(S^n_+ = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} \geq 0\},\ S^n_- = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} \leq 0\} \right)$

решење



Нека је $l : D^n \to S^n_+$ дато са:

$$l(x_1, \dots, x_n, 0) := (x_1, \dots, x_n, \sqrt{1 - \|x\|^2})$$

и $\pi : S^n_- \to D^n$ дато са:

$$\pi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) := (x_1, \dots, x_n, 0)$$

Посматрајмо $g := \pi \circ f \circ l : D^n \to D^n$, тј.

$$\begin{tikzcd} D^n \arrow[r, "l"] \arrow[rrr, bend right, dashed, "g"'] & S^n_+ \arrow[r, "f"] & S^n_- \arrow[r, "\pi"] & D^n \end{tikzcd}$$

На основу Брауерове теореме постоји $a \in D^n$ тд. $g(a) = a$.

Тада је $l(a)$ тражена тачка. Заиста, нека је $a = (a_1, \dots, a_n)$.

Одатле је $l(a) = (a_1, \dots, a_n, \sqrt{1 - \|a\|^2})$.

Даље имамо

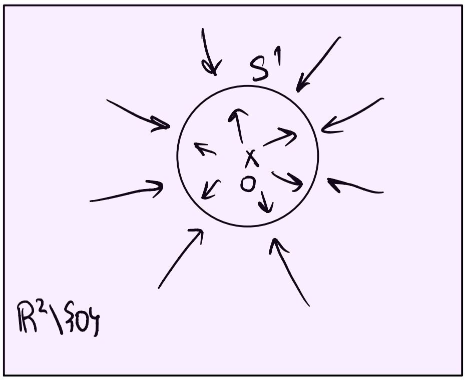
$$a = g(a) = \pi(f(\ell(a))) \Rightarrow f(\ell(a)) = (a_1, \dots, a_n, -\sqrt{1-\|a\|^2}), \text{ тј.}$$

$$f(a_1, \dots, a_n, \sqrt{1-\|a\|^2}) = (a_1, \dots, a_n, -\sqrt{1-\|a\|^2}),$$

па је $x := \ell(a)$ заиста тражена тачка. ■

деф. Нека је $A \subseteq X$. Кажемо да је непрекидно пресликавање $r : X \to A$ ретракција ако $r(a) = a$, за све $a \in A$.
(Дакле, све из $X \setminus A$ се пресликава у A, а све из A остаје фиксирано.) Ако постоји ретракција $r : X \to A$, кажемо да је A ретракт од X.

Пример (1) $r : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to S^1$ дато са $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$ је ретракција



Заиста, r је непрекидно и ако је $a \in S^1$, онда $\|a\| = 1$, па је

$$r(a) = \frac{a}{\|a\|} = a.$$

(2) $r : \mathbb{R} \to (0,1)$ дато са $r(x) = \frac{1}{2}$ није ретракција.
(све се слика унутар $(0,1)$ и r јесте непрекидно, али не важи $r(a) = a$ за све $a \in (0,1)$)

3. Ако X има СФТ и $A \subseteq X$ је ретракт од X, онда и A има СФТ.

решење Нека је $r : X \to A$ ретракција и $f : A \to A$ произвољно.
Желимо да покажемо да f има ФТ.
Посматрајмо следећу композицију:

$$X \xrightarrow{r} A \xrightarrow{f} A \xhookrightarrow{i} X$$

Где је $i: A \to X$ инклузија, тј. $i(a)=a$, $a \in A$

Како X има СФТ, то ово пресликавање има ФТ, тј.

постоји $a \in X$ т.д. $(i \circ f \circ r)(a) = a$. ($\star$)

$\Rightarrow a \in A$ (јер $a = i(\underbrace{f(r(a))}_{\in A}))$

$\Rightarrow r(a) = a$,

па ($\star$) заправо постаје $f(a)=a$, тј. f има ФТ. ∎

4. Доказати да сфера S^{n-1} није ретракт лопте D^n.

решење Претпоставимо супротно да S^{n-1} јесте ретракт од D^n.

Како D^n има СФТ, то на основу 3. задатка и S^{n-1} има СФТ.

Посматрајмо антиподално пресликавање на сфери:

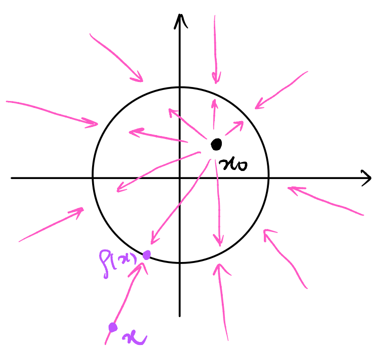
$$a: S^{n-1} \to S^{n-1} \text{ дато са } a(x) = -x.$$

a је очигледно непрекидно и нема ФТ, па S^{n-1} нема СФТ $\lightning$ ∎

5. Нека је $f: D^2 \to \mathbb{R}^2$ непрекидно пресликавање т.д. за свако $x \in S^1$ важи $f(x) = x$. Доказати $D^2 \subseteq f(D^2)$.

решење Претпоставимо супротно да постоји $x_0 \in D^2$ т.д. $x_0 \notin f(D^2)$.

Како је $f(x)=x$ за $x \in S^1 = \mathrm{bd}\, D^2$, онда $x_0 \in \mathrm{int}\, D^2$.



Нека је $\rho: \mathbb{R}^2 \setminus \{x_0\} \to S^1$ радијална пројекција са центром у x_0 (као на слици).

Ако је $x \in S^1$, онда $\rho(x) = x$

(тј. ρ је ретракција).

Посматрајмо композицију

$$D^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \setminus \{x_0\} \xrightarrow{\rho} S^1$$

само смо смањили кодомен од f

$\rho \circ f$ је непрекидно и за $x \in S^1$ имамо

$$\rho(f(x)) = \rho(x) = x$$

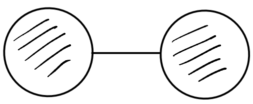
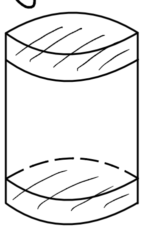
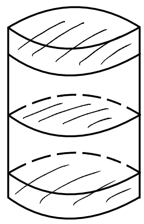
из услова задатка

јер је ρ ретракција

Дакле, $\rho \circ f$ је ретракција D^2 на S^1, а у 4. задатку смо видели да оваква ретракција не постоји ↯

Коначно, $D^2 \subseteq f(D^2)$. ▨

6. Испитати СФТ следећих скупова:

(а) X:  (б) Y:  (в) Z: 

(г) $C = S^1 \times [0,1]$ = цилиндар

(д) M = Мебијусова трака

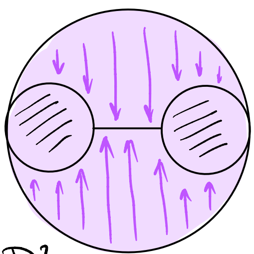
решење Користимо следеће три чињенице:

(1) D^n има СФТ

(2) S^n нема СФТ

(3) X има СФТ, A ретракт од $X \Rightarrow A$ има СФТ

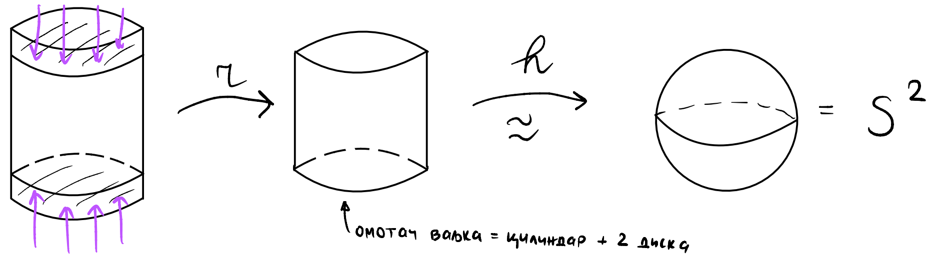
(а) Приметимо да је X ретракт од D^2:



D^2

Како D^2 има СФТ и X је ретракт од D^2, то X има СФТ.

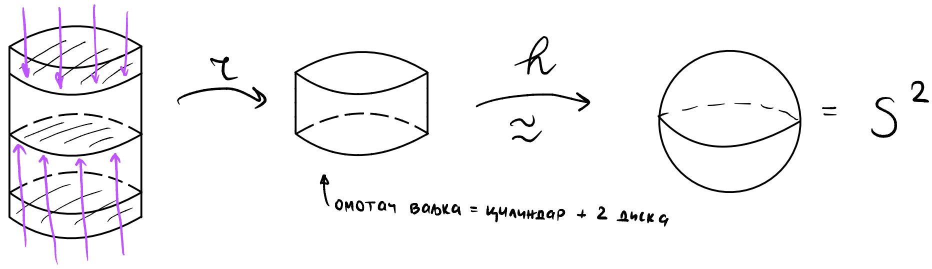
(б) Y:



Имамо ретракцију $r: Y \to$ омотач ваљка, а омотач ваљка је хомеоморфан сфери S^2. Дакле, S^2 је ретракт од Y и S^2 нема СФТ, па ни Y нема СФТ.

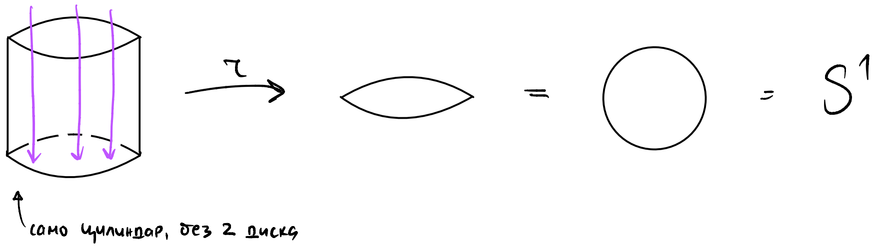
(в) Слично као под (б), само је $r: Z \to$ омотач ваљка мало другачије:

Z:



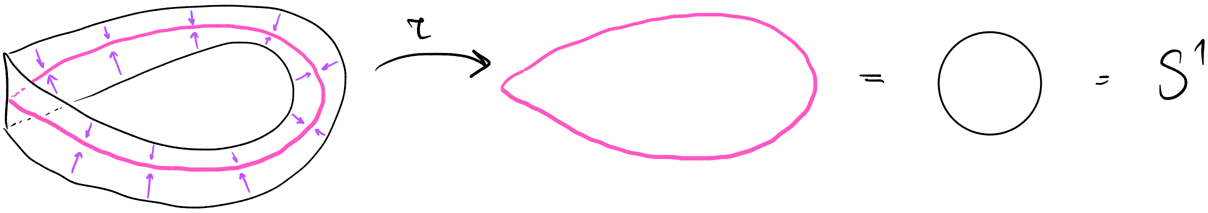
$\Rightarrow$ из истог разлога као под (б), Z нема СФТ.

(г) C =



Имамо ретракцију C на кружницу S^1 која нема СФТ, па ни C нема СФТ.

(д) M =



Имамо ретракцију M на централну кружницу S^1 која нема СФТ, па ни M нема СФТ.