4. Нека је $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ парна функција и $f, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дате са $f(x) = \varphi(\|x\|)$, $g(x) = \varphi^*(\|x\|)$. Доказати $f^* = g$.

решење Нека је $y \in \mathbb{R}^n$

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\langle x, y \rangle - f(x) \right) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\langle x, y \rangle - \varphi(\|x\|) \right) =$$

$$= \sup_{t \geq 0} \sup_{\|x\| = t} \left(\underbrace{\langle x, y \rangle}_{= t \cdot \langle \frac{x}{\|x\|}, y \rangle} - \varphi(\|x\|) \right) =$$

$$= \sup_{t \geq 0} \sup_{\|x\| = 1} \left(t \langle x, y \rangle - \varphi(t) \right) =$$

$$= \sup_{t \geq 0} \left(t \sup_{\|x\| = 1} \langle x, y \rangle - \varphi(t) \right) =$$

$$= \sup_{t \geq 0} \left(t \sup_{\|x\| = 1} \underbrace{\|x\|}_{=1} \cdot \|y\| \cdot \underbrace{\cos \measuredangle (x, y)}_{= 1 \text{ за } x = \frac{y}{\|y\|}} - \varphi(t) \right) =$$

$$= \sup_{t \geq 0} \left(t \cdot \|y\| - \varphi(t) \right) \quad (1)$$

Са друге стране,

$$g(y) = \varphi^*(\|y\|) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left(t \cdot \|y\| - \varphi(t) \right) \overset{(\star)}{=} \sup_{t \geq 0} \left(\underbrace{t \cdot \|y\| - \varphi(t)}_{=: h(t)} \right) \quad (2)$$

$(\star)$: φ је парна, па за $t \geq 0$ је

$$h(-t) = (-t) \cdot \|y\| - \varphi(-t) = -t\|y\| - \varphi(t) < t\|y\| - \varphi(t) = h(t)$$

$$\Rightarrow \sup_{t \in \mathbb{R}} = \sup_{t \geq 0}$$

Коначно, из (1) и (2) закључујемо $f^*(y) = g(y)$. ∎

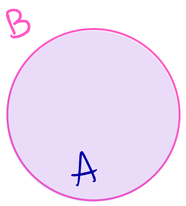
Фамилије конвексних скупова

Нека су $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ компактни. Дефинишемо

$$e(A,B) := \sup_{x \in A} d(x, B)$$

$$D(A,B) := \max\{e(A,B), e(B,A)\}$$

Нпр. $A = D^2$ - диск, $B = \mathrm{bd}(D^2)$ - кружница



$$e(A,B) = \sup_{x \in A} d(x,B) = 1$$

$$e(B,A) = \sup_{x \in B} d(x,A) = 0$$

$$\Rightarrow D(A,B) = \max\{0,1\} = 1$$

Став Ако су $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ компактни, онда је

$$e(A,B) = \min\{r \geq 0 \mid A \subseteq B + B[0,r]\}$$

$$D(A,B) = \min\{r \geq 0 \mid A \subseteq B + B[0,r],\ B \subseteq A + B[0,r]\}$$

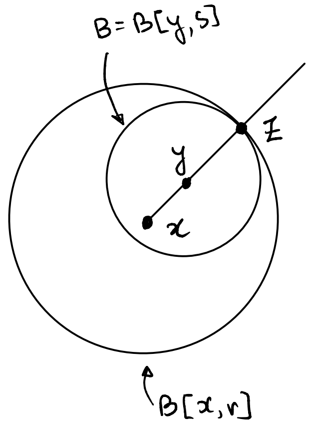
Теорема D је метрика на колекцији непразних компактних скупова у $\mathbb{R}^n$. (D се зове Хаусдорфова метрика)

1. Одредити Хаусдорфову удаљеност између тачке x и лопте $B[y,s]$.

Решење 1° $x \in B[y,s]$: Нека је $B := B[y,s]$

$$D(x,B) = \min\{r \geq 0 \mid \underbrace{\{x\} \subseteq B + B[0,r]}_{\text{увек важи јер } x \in B},\ \underbrace{B \subseteq \{x\} + B[0,r]}_{= B[x,r]}\} =$$

$$= \min\{r \geq 0 \mid B \subseteq B[x,r]\}$$



Дакле, тражимо најмању лопту $B[x,r]$ која садржи лопту B.

$1^\circ 1'$ $x = y \Rightarrow r = s$

$1^\circ 2'$ $x \neq y$

Уочимо полуправу из x кроз y као на слици и нека је z пресек те полуправе и границе од B (тј. сфере $S[y,s]$).

Онда је тражено најмање r заправо

$$d(x,z) \underset{\text{видимо са слике}}{=} d(x,y) + d(y,z) = d(x,y) + s$$

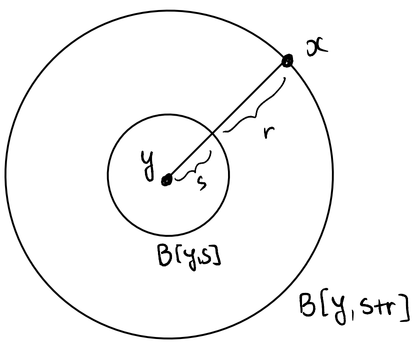
Дакле, за $x \in B$ је $D(x,B) = d(x,y) + s$.

2° $x \notin B[y,s]$:

$$D(x,B) = \min\{ r \geq 0 \mid \underbrace{x \in B + B[0,r]}_{★},\ \underbrace{B \subseteq \underbrace{\{x\} + B[0,r]}_{B[x,r]}}_{★★} \}$$

Услови ★ и ★★ морају бити истовремено задовољени, па тражимо минимално r тд. важи ★, минимално r тд. важи ★★ и онда узмимо веће од та два.

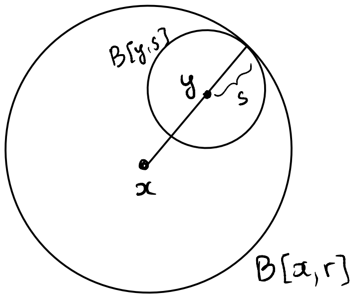
★: $x \in B[y,s] + B[0,r] = B[y, s+r]$



Са слике видимо да је најмање r:

$$r = d(x,y) - s$$

$(\ast\ast)$: $B[y,s] \subseteq B[x,r]$



Најмање r је:

$$r = d(x,y) + s$$

Коначно, узимамо веће од $(\ast)$ и $(\ast\ast)$, па за $x \notin B$ важи

$$D(x, B) = d(x,y) + s.$$

Приметимо да смо у 1° и 2° добили исти резултат, тј. за све x је $D(x,B) = d(x,y) + s$. ▨

2. Нека су A и B два дисјунктна компактна конвексна скупа у $\mathbb{R}^n$ и $d \geq D(A,B)$. Нека је C дат са

$$C := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,A) + d(x,B) \leq d\}.$$

Доказати да је $A \subseteq C$, $B \subseteq C$ и C је конвексан и компактан.

решење Како су A и B компактни, то за свако $x \in \mathbb{R}^n$ постоје $a \in A$, $b \in B$ тј. $d(x,A) = d(x,a)$ и $d(x,B) = d(x,b)$.

$A, B \subseteq C$: Нека је $a \in A$. Тада

$$\underbrace{d(a,A)}_{0} + d(a,B) = d(a,B) \leq e(A,B) \leq D(A,B) \leq d$$

јер $e = \sup\limits_{a \in A} \dots$ јер $D = \max\{e(A,B), e(B,A)\}$

$\Rightarrow a \in C$, тј. $A \subseteq C$.

Слично, $B \subseteq C$.

C компактан: показаћемо да је C затворен и ограничен што је еквивалентно компактности у $\mathbb{R}^n$.

(1) затвореност: Нека је $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ дата са $f(x):=d(x,A)+d(x,B)$.

f је непрекидна па је $C=f^{-1}([0,d])$ затворен као инверзна слика затвореног скупа

(2) ограниченост: за свако $x\in C$ важи $d(x,A)+d(x,B)\le d$, па след. мора да важи и $d(x,A)\le d$

$\Rightarrow C \subseteq \underbrace{A}_{\text{ограничен}} + B[0,d]$ – ограничен

(1)+(2) $\Rightarrow$ C је компактан.

C конвексан: Нека су $x_1,x_2\in C$, $\lambda\in[0,1]$. Показујемо $\tilde{x}:=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\in C$.

Приметили смо раније да постоје $a_1,a_2\in A$, $b_1,b_2\in B$ тд.

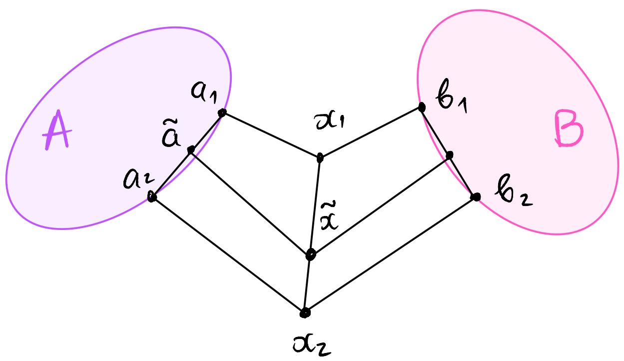
$$d(x_1,A)=d(x_1,a_1),\quad d(x_1,B)=d(x_1,b_1),$$

$$d(x_2,A)=d(x_2,a_2),\quad d(x_2,B)=d(x_2,b_2),$$

па пошто $x_1,x_2\in C$ имамо

$$\left.\begin{aligned} d(x_1,a_1)+d(x_1,b_1)&=d(x_1,A)+d(x_1,B)\le d\\ d(x_2,a_2)+d(x_2,b_2)&=d(x_2,A)+d(x_2,B)\le d \end{aligned}\right\}\ (*)$$

Показујемо $\tilde{x}\in C$, тј. $d(\tilde x,A)+d(\tilde x,B)\le d$.



Уочимо тачке

A конвексан

$$\tilde a:=\lambda a_1+(1-\lambda)a_2\in A$$

$$\tilde b:=\lambda b_1+(1-\lambda)b_2\in B$$

B конвексан

Довољно је показати:

$$d(\tilde x,\tilde a)+d(\tilde x,\tilde b)\le d$$

(јер је $d(\tilde x,A)=\inf\limits_{a\in A} d(\tilde x,a)$, $d(\tilde x,B)=\inf\limits_{b\in B} d(\tilde x,b)$)

$$d(\tilde x,\tilde a)+d(\tilde x,\tilde b)=\|\tilde x-\tilde a\|+\|\tilde x-\tilde b\|=$$

$$=\|\lambda x_1+(1-\lambda)x_2-(\lambda a_1+(1-\lambda)a_2)\|+\|\lambda x_1+(1-\lambda)x_2-(\lambda b_1+(1-\lambda)b_2\|=$$

$$= \|\lambda(x_1-a_1)+(1-\lambda)(x_2-a_2)\| + \|\lambda(x_1-b_1)+(1-\lambda)(x_2-b_2)\| \le$$ ← неједнакост троугла

$$\le \|\lambda(x_1-a_1)\| + \|(1-\lambda)(x_2-a_2)\| + \|\lambda(x_1-b_1)\| + \|(1-\lambda)(x_2-b_2)\| =$$ ← јер $\lambda, 1-\lambda \ge 0$

$$= \lambda\|x_1-a_1\| + (1-\lambda)\|x_2-a_2\| + \lambda\|x_1-b_1\| + (1-\lambda)\|x_2-b_2\| =$$

$$= \lambda\big(\|x_1-a_1\|+\|x_1-b_1\|\big) + (1-\lambda)\big(\|x_2-a_2\|+\|x_2-b_2\|\big) =$$

$$= \lambda\big(d(x_1,a_1)+d(x_1,b_1)\big) + (1-\lambda)\big(d(x_2,a_2)+d(x_2,b_2)\big) \le$$ ← из (*)

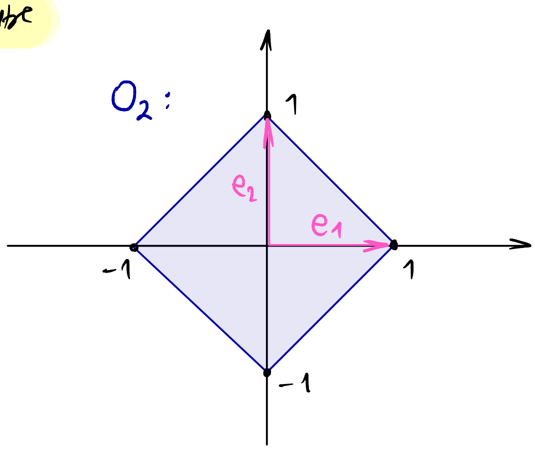
$$\le \lambda d + (1-\lambda) d =$$

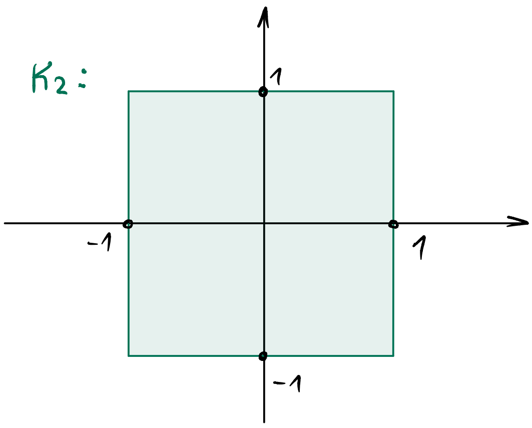
$$= d$$

Коначно, $d(\tilde{x},A)+d(\tilde{x},B) \le d$, па $\tilde{x}\in C$, тј. C је конвексан. ▨

3. Одредити Хауздорфово растојање између хиперкоцке $K_n = [-1,1]^n$ и хипероктаедра $O_n = \operatorname{conv}\{e_1,-e_1,\dots,e_n,-e_n\}$.

решење





Приметимо да је $O_n \subset K_n$, па је

$$D(K_n,O_n) = \min\{r\ge 0 \mid \underbrace{O_n \subseteq K_n + B[0,r]}_{\text{увек важи}},\ K_n \subseteq O_n + B[0,r]\} =$$

$$= \min\{r \ge 0 \mid K_n \subseteq O_n + B[0,r]\}$$

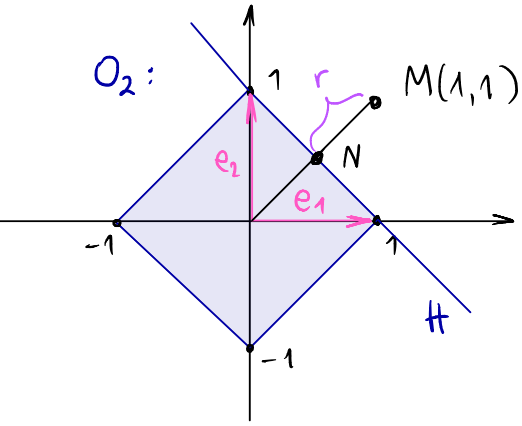
Приметимо да важи

$$\{\text{темена од } K_n\} \subseteq O_n + B[0,r] \implies K_n \subseteq O_n + B[0,r],$$

па тражимо најмање r тј. су темена од K_n у $O_n+B[0,r]$, а пошто је све симетрично, довољно је да се побринемо да је једно теме од K_n у $O_n+B[0,r]$ и важиће $K_n \subseteq O_n + B[0,r]$.

Уочимо теме $M = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n})$ у K_n

Слика за $n=2$:



Најближа тачка из O_n до M је N која се налази у пресеку дужи OM и хиперравни H одређене тачкама $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ тј. њена једначина је

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1.$$

$$N \in OM \Rightarrow N = (x, x, \dots, x)$$

$$N \in H \Rightarrow \underbrace{x + x + \dots + x}_{n} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow N = (\underbrace{\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}, \dots, \tfrac{1}{n}}_{n})$$

минимално r је

$$r = \| MN \| = \sqrt{\underbrace{\left(1 - \tfrac{1}{n}\right)^2 + \dots + \left(1 - \tfrac{1}{n}\right)^2}_{n}} = \sqrt{n \left(1 - \tfrac{1}{n}\right)^2} = \sqrt{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{\sqrt{n}}$$

Коначно, $D(K_n, O_n) = \dfrac{n-1}{\sqrt{n}}$. $\blacksquare$