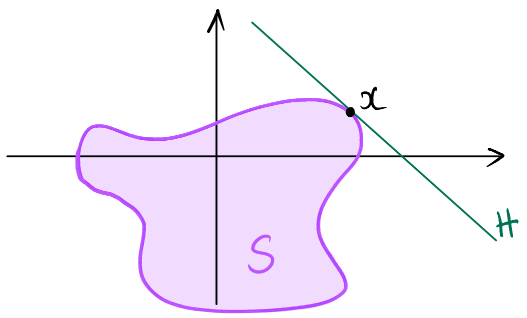
Функције ослонца и удаљености

деф. Нека је $C \neq \emptyset$ конвексан у $\mathbb{R}^n$ и $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sup_{a \in C} \langle a, x \rangle \text{ коначан}\}$.
Функција ослонца скупа C је $h_C : D \to \mathbb{R}$ дата са

$$h_C(x) := \sup_{a \in C} \langle a, x \rangle .$$

деф. Хиперраван H је хиперраван ослонца скупа S у тачки $x \in S$ ако $x \in H$ и ако је S садржан у једном од два затворена полупростора које одређује H.

Нпр.



цео S је са исте стране од H

Пример Нека је C конвексан и ограничен. Онда је $D = \mathbb{R}^n$.

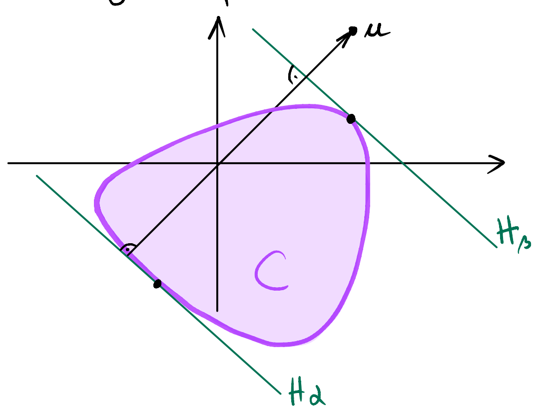
- $u = 0 \Rightarrow h_C(0) = 0$
- $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

Нека су H_α и H_β хиперравни ослонца ортогоналне на u, тј.

$H_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u \rangle = \alpha\}$

$H_\beta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u \rangle = \beta\}$

И нпр. $\alpha \leq \beta$.



Може се показати да је

$h_C(u) = \beta$

$h_C(-u) = -\alpha$

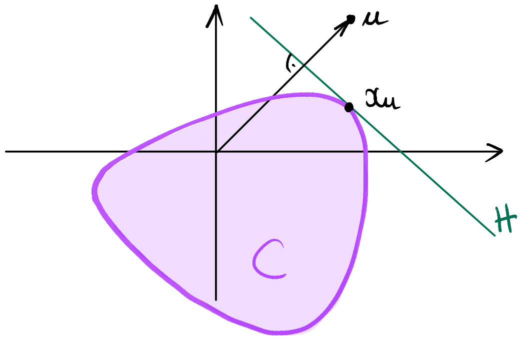
Став (1) D је конус у $\mathbb{R}^n$;

(2) h_C је конвексна;

(3) h_C је позитивно хомогена.

Став Ако је C конвексан, компактан и непразан,

$$(\forall u \in D\setminus\{0\})(\exists x_u \in C)\quad h(u) = \langle x_u, u\rangle$$



деф. $x \in C$ је екстремална ако не постоје $y, z \in C$ т.д. је $x \in (y, z)$. Скуп свих екстремалних тачака од C означавамо са $\operatorname{ext} C$.

Лема Нека је C компактан и конвексан $f : C \to \mathbb{R}$ линеарна. Тада постоје екстремалне тачке $x_0, y_0 \in \operatorname{ext} C$ т.д.

$$f(x_0) = \min_{x\in C} f(x), \qquad f(y_0) = \max_{x \in C} f(x).$$

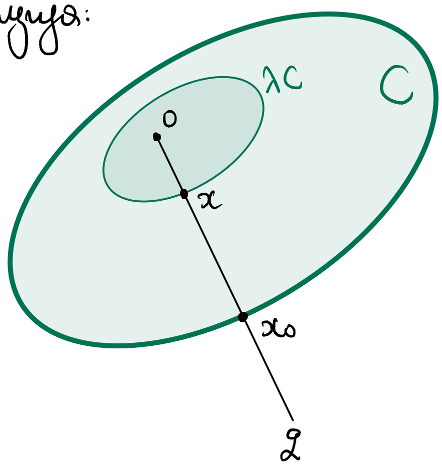
Специјално, ако је C компактан и конвексан,

$$h_C(x) = \sup_{a\in C} \langle a, x\rangle = \max_{a \in C} \langle a, x\rangle = \max_{a \in \operatorname{ext} C} \langle a, x \rangle .$$

деф. Нека је C компактан, конвексан и непразан у $\mathbb{R}^n$, т.д. $0 \in \operatorname{int} C$. Функција удаљености скупа C је $p_C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, дата са

$$p_C(x) = \inf\{\lambda > 0 \mid x \in \lambda C\}.$$

Илустрација:



ℓ = полуправа из O кроз x

$x_0 := \ell \cap \operatorname{bd} C$

$\lambda_0 := \dfrac{\|x\|}{\|x_0\|}$

$x \in \lambda_0 C$ и $x \notin \lambda C$ за $\lambda < \lambda_0$

$\Rightarrow p_C(x) = \lambda_0$

Приметимо: $x \in \operatorname{int} C \Rightarrow p_C(x) \leq 1$

$x \notin C \Rightarrow p_C(x) \geq 1$

Теорема Нека је C компактан, конвексан и $0 \in \operatorname{int} C$. Тада

$$h_C = p_{C^*}, \quad p_C = h_{C^*}.$$

Нпр. имали смо задатак $K_n^* = O_n$ и $O_n^* = K_n$, па је

$$h_{K_n} = p_{K_n^*} = p_{O_n} \quad \text{и} \quad p_{K_n} = h_{K_n^*} = h_{O_n}$$

1. Нека су $A, B \neq \emptyset$ конвексни у $\mathbb{R}^n$, $h_A : D_A \to \mathbb{R}$, $h_B : D_B \to \mathbb{R}$ њихове функције ослонца и нека је $h_{A+B} : D_{A+B} \to \mathbb{R}$ функција ослонца скупа $A+B$. Доказати

(а) $D_{A+B} = D_A \cap D_B$;

(б) $h_{A+B} = h_A + h_B$.

решење (а) Нека је $x \in \mathbb{R}^n$. Тада постоји $\sup\limits_{y \in A+B} \langle x, y \rangle$ ако и само ако постоје $\sup\limits_{y \in A} \langle x, y \rangle$ и $\sup\limits_{y \in B} \langle x, y \rangle$, па је $D_{A+B} = D_A \cap D_B$

(б) Нека је $x \in D_A \cap D_B$ и означимо

$$A_x := \{ \langle a, x \rangle \mid a \in A \}, \quad B_x = \{ \langle b, x \rangle \mid b \in B \}.$$

$$h_{A+B}(x) = \sup_{y \in A+B} \langle y, x \rangle = \sup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} \langle a+b, x \rangle = \sup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} \left(\langle a, x \rangle + \langle b, x \rangle \right) =$$

$$= \sup(A_x + B_x) \underset{\text{Т. из А1}}{=} \sup A_x + \sup B_x = h_A(x) + h_B(x) \quad \blacksquare$$

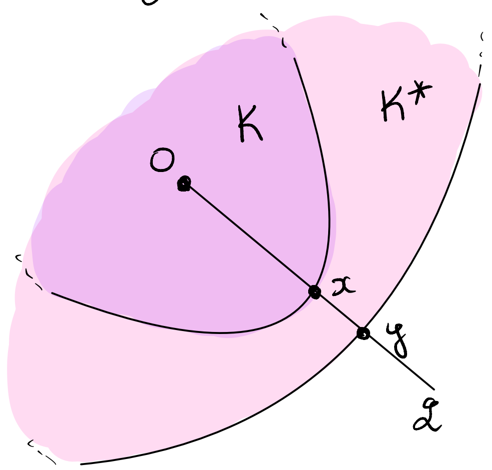
2. Одредити све компактне конвексне скупове $K \subseteq \mathbb{R}^n$ т.д. $0 \in \operatorname{int} K$ и за које је $h_K = p_K$.

решење Знамо да је $h_K = p_{K^*} = p_K$ и $p_K = h_{K^*} = h_K$, па хоћемо да покажемо да је $K = K^*$.

Како је K компактан, конвексан и $0 \in \operatorname{int} K$, то је и K^* компактан, конвексан и $0 \in \operatorname{int} K^*$.

Нека је ℓ произвољна полуправа из 0. Тада су $\ell \cap K$ и $\ell \cap K^*$ дужи (због компактности и конвексности), па нека је
$\ell \cap K = [0, x]$ и $\ell \cap K^* = [0, y]$

Идеја: $K = K^* \iff \ell \cap K = \ell \cap K^*$ за свако ℓ, тј. $x = y$, па
ТМС. Нека је ℓ т.д. $\ell \cap K \neq \ell \cap K^*$, нпр. нека је $x < y$
(случај $y < x$ би се слично решавао)



Приметимо $p_K(x) = 1$:

$x \in K \Rightarrow p_K(x) \leq 1$, а ако би било $p_K(x) = \inf\{\lambda > 0 \mid x \in \lambda K\} < 1$, онда би постојало $\lambda_0 < 1$ т.д. $x \in \lambda_0 K$, али $\lambda_0 K \cap \ell = [0, \lambda_0 x] \not\ni x$, дакле мора бити $p_K(x) = 1$.

Даље, $p_{K^*}(x) = p_K(x) = 1$.

Уочимо сада $\lambda_0 := \frac{\|x\|}{\|y\|} < 1$. Тада $\lambda_0 y \in \lambda_0 K^*$, али

$$\lambda_0 y = \frac{\|x\|}{\|y\|} \cdot y = \underbrace{\frac{y}{\|y\|}}_{\text{јединични вектор истог правца и смера као } x} \cdot \|x\| = x \Rightarrow x \in \lambda_0 K^* \Rightarrow p_{K^*}(x) \leq \lambda_0 < 1 \; ↯$$

Коначно, за свако ℓ је $\ell \cap K = \ell \cap K^*$, па је $K = K^*$.
Из задатка од раније (зад. 5 на стр. 24) знамо да је K онда јединична лопта. ▨

3. Нека је K шестоугао са теменима

$A(2,0)$, $B(1,\sqrt{3})$, $C(-1,\sqrt{3})$, $D(-2,0)$, $E(-1,-\sqrt{3})$, $F(1,-\sqrt{3})$

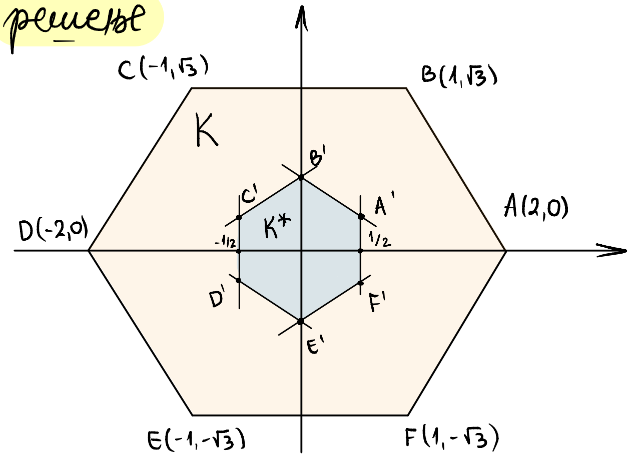
(а) Одредити његов поларни скуп K^*.

(б) Одредити функцију ослонца $h_K(u)$, $u \in \mathbb{R}^2$.

(в) Одредити функцију удаљености $\rho_K\left(-\frac{7\sqrt{3}}{3}, 7\right)$.

(г) Одредити функцију удаљености $\rho_K(u)$, $u \in \mathbb{R}^2$.

решење



K је правилни шестоугао са центром у координатном почетку.

Приметимо:

$K = \operatorname{conv}(\{A,B,C,D,E,F\}) =$

$= \operatorname{conv}(\{A\} \cup \{B\} \cup \{C\} \cup \{D\} \cup \{E\} \cup \{F\})$,

па је

$$K^* = \left(\operatorname{conv}(\{A\} \cup \{B\} \cup \{C\} \cup \{D\} \cup \{E\} \cup \{F\})\right)^* =$$

$$= \{A\}^* \cap \{B\}^* \cap \{C\}^* \cap \{D\}^* \cap \{E\}^* \cap \{F\}^*$$

A је тачка на растојању 2 од коорд. почетка, па је $\{A\}^*$ полураван ортогонално на OA на растојању $\frac{1}{2}$ од O.

Слично важи и за остале тачке, па је K^* пресек ових полуравни

$\Rightarrow K^*$ је шестоугао са теменима (прескачемо рачун):

$A'\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$, $B'\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $C'\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$, $D'\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$, $E'\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $F'\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$.

(б) $$h_K(u) = \sup_{a \in K} \langle a, u\rangle = \max_{a \in \operatorname{ext} K} \langle a, u\rangle = \max_{a \in \{A,B,C,D,E,F\}} \langle a, u\rangle$$

Нека је $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$\langle A, u\rangle = \langle (2,0), (x,y)\rangle = 2x$, $\quad \langle B, u\rangle = x + \sqrt{3}y$,

$\langle C, u\rangle = -x + \sqrt{3}y$, $\quad \langle D, u\rangle = -2x$,

$\langle E, u\rangle = -x - \sqrt{3}y$, $\quad \langle F, u\rangle = x - \sqrt{3}y$, па је

$$h_K(x,y) = \max\{2x, x+\sqrt{3}y, -x+\sqrt{3}y, -2x, -x-\sqrt{3}y, x-\sqrt{3}y\} =$$

$$= \max\{2|x|, |x|+\sqrt{3}|y|\}$$

(в) Приметимо $a = \left(-\frac{7\sqrt{3}}{3}, 7\right) = \frac{7\sqrt{3}}{3} C \in \frac{7\sqrt{3}}{3} K$ и ако је $\lambda < \frac{7\sqrt{3}}{3}$, онда $a \notin \lambda K$, па је $p_K\left(-\frac{7\sqrt{3}}{3}, 7\right) = \frac{7\sqrt{3}}{3}$.

(г) Знамо $p_K(u) = h_{K^*}(u)$, па рачунамо слично као у (б).

$$p_K(u) = h_{K^*}(u) = \sup_{a\in K^*} \langle a,u\rangle = \max_{a\in \operatorname{ext} K^*} \langle a,u\rangle = \max_{a\in\{A',B',C',D',E',F'\}} \langle a,u\rangle$$

Означимо $u=(x,y)$. Онда је

$$p_K(x,y) = \max\left\{\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{6}y, \frac{\sqrt{3}}{3}y, -\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{6}y, -\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{6}y, -\frac{\sqrt{3}}{3}y, \frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{6}y\right\} =$$

$$= \max\left\{\frac{1}{2}|x| + \frac{\sqrt{3}}{6}|y|, \frac{\sqrt{3}}{3}|y|\right\} \quad \blacksquare$$

Конјуговане функције

деф. Нека је $f: C \to \mathbb{R}$ и $D = \{x^* \mid \sup\limits_{x\in C}(\langle x, x^*\rangle - f(x)) \text{ коначан}\}$.
Конјугована функција од f је $f^*: D \to \mathbb{R}$ дата са

$$f^*(x^*) = \sup_{x\in C}\left(\langle x, x^*\rangle - f(x)\right).$$

Теорема Свака конјугована функција је конвексна.

1. Нека је $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ дато са $f(x) = \frac{x^{2024}}{2024}$. Одредити f^*.

решење Нека је $y\in\mathbb{R}$.

$$f^*(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\langle x,y\rangle - f(x)\right) = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left(xy - \frac{x^{2024}}{2024}\right)$$

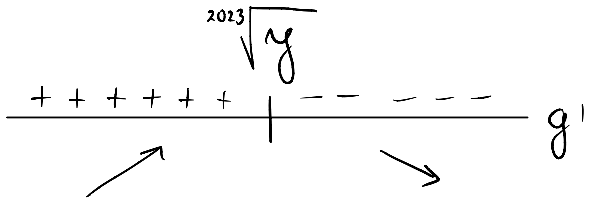
Означимо $g(x) := xy - \frac{x^{2024}}{2024}$ (y - фиксирано)

$$g'(x) = y - x^{2023}$$

$g'(x) > 0$ за $x < \sqrt[2023]{y}$

$g'(x) < 0$ за $x > \sqrt[2023]{y}$

$g'(x) = 0$ за $x = \sqrt[2023]{y}$



$\Rightarrow$ g достиже максимум за $x = \sqrt[2023]{y}$, па је $D = \mathbb{R}$ и

$$f^*(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}} g(x) = \max_{x\in\mathbb{R}} g(x) = g\left(\sqrt[2023]{y}\right) = \sqrt[2023]{y}\cdot y - \frac{\left(\sqrt[2023]{y}\right)^{2024}}{2024} =$$

$$= \frac{2023}{2024}\, y^{\frac{2024}{2023}},\quad y \in D. \blacksquare$$

2. Нека је $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ дато са $f(x) = -\frac{1}{2} - \ln x$. Одредити f^*.

решење Нека је $y \in \mathbb{R}$

$$f^*(y) = \sup_{x\in(0,+\infty)} \left(\langle x, y\rangle - f(x)\right) = \sup_{x\in(0,+\infty)} \left(xy + \frac{1}{2} + \ln x\right)$$

Означимо $g(x) := xy + \frac{1}{2} + \ln x$, за фиксирано y.

Треба да одредимо за које све $y \in \mathbb{R}$ је $\sup\limits_{x\in(0,+\infty)} g(x)$ коначан.

$g'(x) = y + \frac{1}{x}$ – нема глобални макс. као у претходном зад., па морамо детаљније анализирати

1° $y \geq 0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(xy + \frac{1}{2} + \ln x\right) = +\infty$, па је

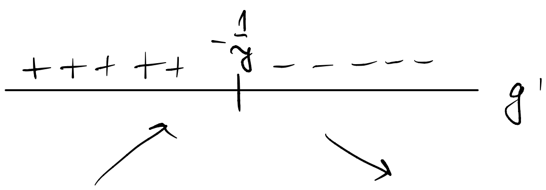
$$\sup_{x\in(0,+\infty)} \left(xy + \frac{1}{2} + \ln x\right) = +\infty$$

$\Rightarrow$ f^* није деф. за $y \geq 0$

2° $y < 0$: $g'(x) > 0$ за $x < -\frac{1}{y}$

$g'(x) < 0$ за $x > -\frac{1}{y}$

$g'(x) = 0$ за $x = -\frac{1}{y}$



$\Rightarrow$ g достиже максимум за $x = -\frac{1}{y}$.

$\Rightarrow$ $D = (-\infty, 0)$ и

$$f^*(y) = \sup_{x\in(0,+\infty)} g(x) = \max_{x\in(0,+\infty)} g(x) = g\left(-\frac{1}{y}\right) = \left(-\frac{1}{y}\right)\cdot y + \frac{1}{2} + \ln\left(-\frac{1}{y}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} - \ln|y|, \quad y \in D. \qquad ▨$$

3. Нека је $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дато са $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$. Одредити f^*.

решење Нека је $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

$$f^*(a,b) = \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \left(\langle (a,b),(x,y)\rangle - f(x,y) \right) = \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \left(ax + by - x^2 - xy - y^2 \right)$$

Означимо $g(x,y) := ax + by - x^2 - xy - y^2$, $a,b \in \mathbb{R}$ фиксирани

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= a - 2x - y = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= b - x - 2y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (x,y) = \left(\frac{2a-b}{3}, \frac{2b-a}{3}\right)$$ је стационарна тачка функције g.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\left(\frac{2a-b}{3}, \frac{2b-a}{3}\right) & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}\left(\frac{2a-b}{3}, \frac{2b-a}{3}\right) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}\left(\frac{2a-b}{3}, \frac{2b-a}{3}\right) & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\left(\frac{2a-b}{3}, \frac{2b-a}{3}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-2) - (-1)\cdot(-1) = 3 > 0$$

Како је $3 > 0$ и $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\left(\frac{2a-b}{3}, \frac{2b-a}{3}\right) = -2 < 0$, то је $\left(\frac{2a-b}{3}, \frac{2b-a}{3}\right)$ тачка максимума функције g.

Коначно, $D = \mathbb{R}^2$ и

$$f^*(a,b) = \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} g(x,y) = \max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} g(x,y) = g\left(\frac{2a-b}{3}, \frac{2b-a}{3}\right) = \frac{a^2 + b^2 - ab}{3}. \qquad ▨$$