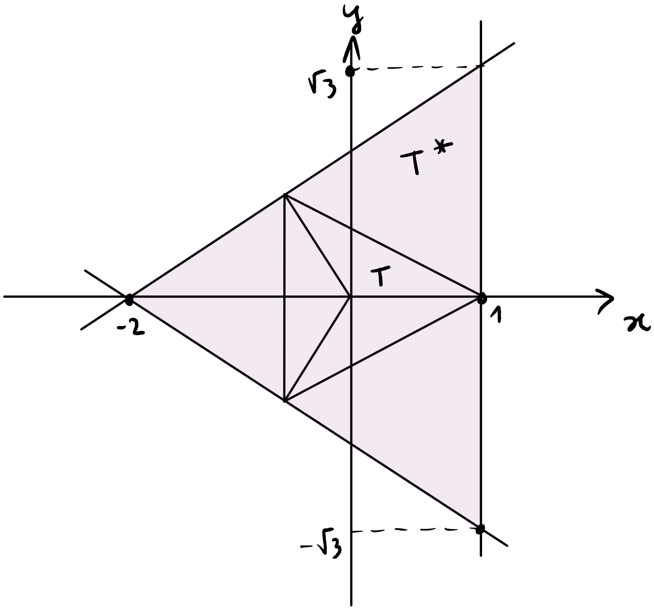


$\Rightarrow$ T^* је троугао са теменима

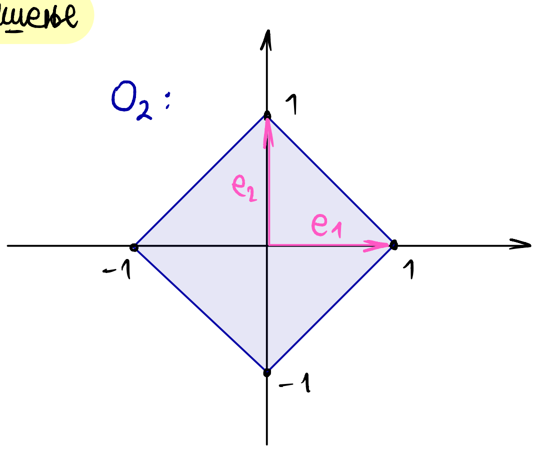
$(-2,0)$, $(1,-\sqrt{3})$ и $(1,\sqrt{3})$

(прескачемо рачун) $\blacksquare$

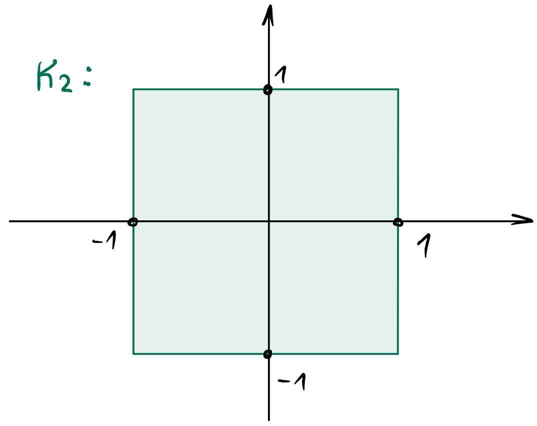
3. Доказати да су хиперкоцка $K_n = \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid \max\limits_{1\le i\le n}|x_i|\le 1\}$ и хипероктаедар $O_n = \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid |x_1|+\dots+|x_n|\le 1\}$ међусобно поларни (тј. $K_n^* = O_n$ и $O_n^* = K_n$)

решење

O_2:



K_2:



Приметимо:

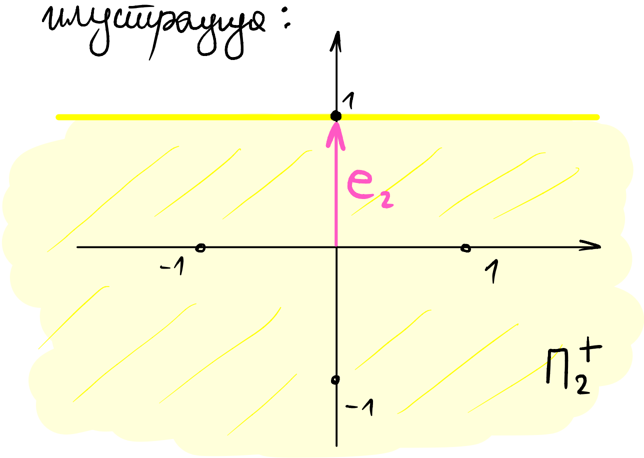
- $O_n = \text{conv}\{e_1, -e_1, e_2, -e_2, \dots, e_n, -e_n\}$

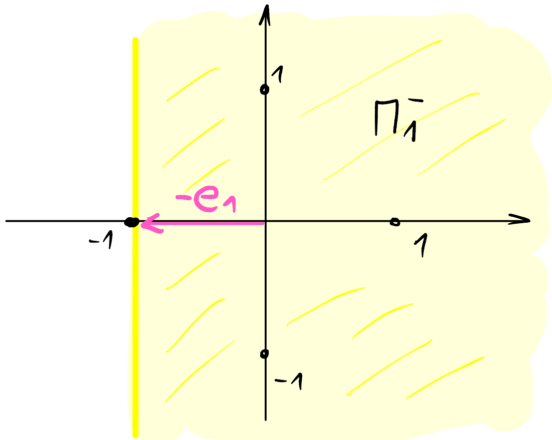
  (где је $e_1 = (1,0,\dots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\dots,0)$, $\dots$, $e_n = (0,\dots,0,1)$)

- K_n = пресек полупростора на растојању 1 од координатних оса, који садрже O

Π_i^+ := полупростор ортогоналан на e_i кроз $(0,\dots,0,\overset{i}{1},0,\dots,0)$ који садржи O

Π_i^- := полупростор ортогоналан на e_i кроз $(0,\dots,0,\overset{i}{-1},0,\dots,0)$ који садржи O илустрација:





Знамо да је $\{e_i\}^*$ = полупростор ортогоналан на e_i на растојању $\frac{1}{\|e_i\|}=1$ од O, па закључујемо $\Pi_i^+=\{e_i\}^*$ и $\Pi_i^-=\{-e_i\}^*$.

Сада имамо

$$O_n^*=\left(\operatorname{conv}\{e_1,-e_1,e_2,-e_2,\dots,e_n,-e_n\}\right)^*=\{e_1\}^*\cap\{-e_1\}^*\cap\dots\cap\{e_n\}^*\cap\{-e_n\}^*=$$
$$=\Pi_1^+\cap\Pi_1^-\cap\dots\cap\Pi_n^+\cap\Pi_n^-=K_n$$

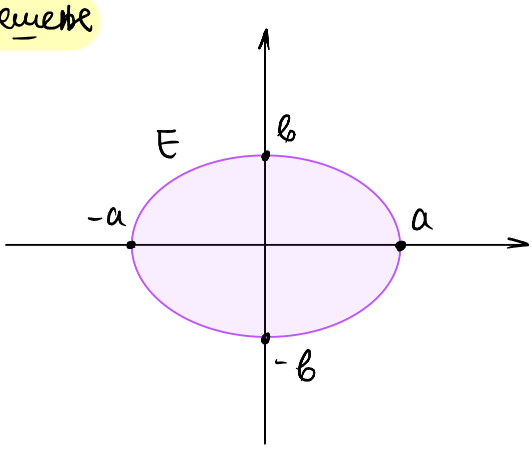
Још остаје да покажемо $K_n^*=O_n$.

Како је O_n затворен, конвексан и садржи O, то је $O_n^{**}=O_n$, па је
$K_n^*=(O_n^*)^*=O_n$. ∎

4. [јун 1 22.] Одредити скуп поларан елипси

$$E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right\}=\operatorname{conv}\{(a\cos\varphi,b\sin\varphi)\mid 0\le\varphi\le 2\pi\}.$$

решење



Из дефиниције добијамо да $(x,y)\in E^*$ ако
$\langle (x,y),(a\cos\varphi,b\sin\varphi)\rangle\le 1$,
за свако $\varphi\in[0,2\pi]$

Приметимо да све тачке облика
$(x,y)=\left(\frac{1}{a}\cos\theta,\frac{1}{b}\sin\theta\right)$, $\theta\in[0,2\pi]$
су у E^*.

Заиста,

$$\langle (x,y), (a\cos\varphi, b\sin\varphi)\rangle = \left\langle \left(\tfrac{1}{a}\cos\theta, \tfrac{1}{b}\sin\theta\right), (a\cos\varphi, b\sin\varphi)\right\rangle =$$
$$= \tfrac{1}{a}\cos\theta \cdot a\cos\varphi + \tfrac{1}{b}\sin\theta \cdot b\sin\varphi =$$
$$= \cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi =$$
$$= \cos(\theta-\varphi) \le 1$$

Даље, како је E^* конвексан (јер је сваки поларан скуп конвексан) и $\{(\tfrac{1}{a}\cos\theta, \tfrac{1}{b}\sin\theta) \mid 0\le\theta\le 2\pi\} \subseteq E^*$, то је и

$E_1 := \operatorname{conv}(\{(\tfrac{1}{a}\cos\theta, \tfrac{1}{b}\sin\theta) \mid 0\le\theta\le 2\pi\}) \subseteq E^*$

(E_1 = елипса са полуосама $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$)

Покажимо да је баш $E^* = E_1$, тј. остаје да покажемо $E^* \subseteq E_1$.

тпс. нека је $(x,y)\in E^*\setminus E_1$. Како $(x,y)\notin E_1$, можемо га представити у облику $(x,y) = \lambda(\tfrac{1}{a}\cos\theta, \tfrac{1}{b}\sin\theta)$, $\lambda>1$, $\theta\in[0,2\pi]$.

Како $(x,y)\in E^*$, то за свако $\varphi\in[0,2\pi]$ важи

$$\langle (x,y), (a\cos\varphi, b\sin\varphi)\rangle \le 1$$

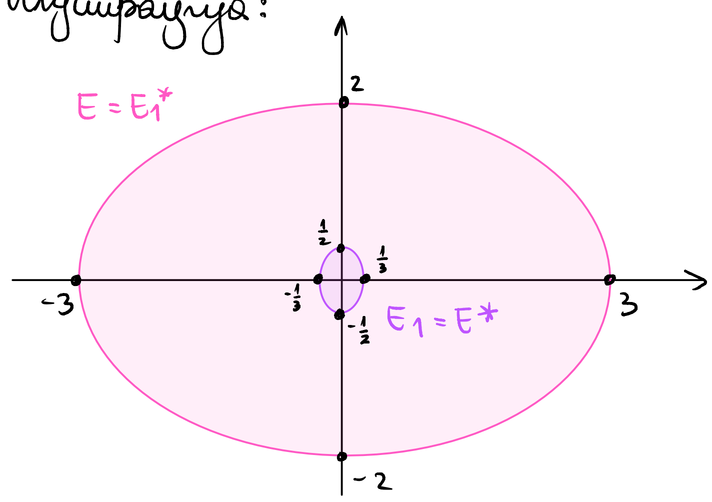
$$\Leftrightarrow \quad \lambda\tfrac{1}{a}\cos\theta\, a\cos\varphi + \lambda\tfrac{1}{b}\sin\theta\, b\sin\varphi \le 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda\cos(\theta-\varphi) \le 1$$

специјално, за $\varphi := \theta$ имамо $\lambda\cos 0 \le 1$, тј. $\lambda \le 1$ ↯.

Дакле, $E^*\subseteq E_1$, па је $E^* = E_1$. ▨

Илустрација:



Приметимо, ако је $C\subseteq R^n$ јединична лопта, онда је $C^* = C$ (јер је C елипса са полуосама $a=b=1$)

5. Доказати да је јединична лопта једини скуп C у $\mathbb{R}^n$ са својством $C^* = C$.

решење Нека је C тд. $C^* = C$ и $B = B[0,1]$ јединична лопта. Показујемо $C = B$.

$C \subseteq B$: Нека је $x \in C = C^*$. Тада за свако $y \in C$ важи $\langle x, y \rangle \le 1$, па специјално за $y := x$ имамо $\langle x, x \rangle = \|x\|^2 \le 1$, тј. $x \in B$.

$B \subseteq C$: Нека је $x \in B$ и $y \in C$ произвољно. Тада

$$\langle x, y \rangle = \underbrace{\|x\|}_{\le 1 \text{ јер } x \in B} \cdot \underbrace{\|y\|}_{\le 1 \text{ јер } y \in C \subseteq B} \cdot \underbrace{\cos \measuredangle (x, y)}_{\le 1 \text{ увек}} \le 1, \text{ па } x \in C^* = C. \quad \blacksquare$$

Конвексне функције

деф. Нека је $C \subseteq \mathbb{R}^n$ конвексан. Функција $f : C \to \mathbb{R}$ је конвексна ако за све $x, y \in C$, $\lambda \in [0,1]$ важи

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \le (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y).$$

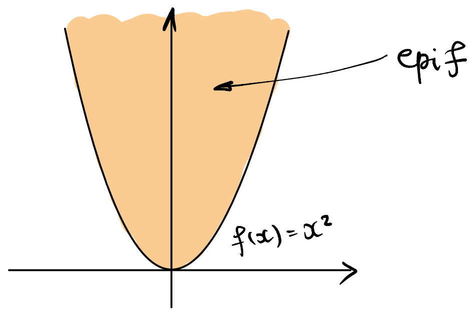
f је конкавна ако је $-f$ конвексна.

деф. Функција $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ је позитивно хомогена ако

$$(\forall x \in \mathbb{R}^d)(\forall \lambda \in (0, +\infty)) \; f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

деф. Надграфик функције $f : C \to \mathbb{R}$ је

$$\operatorname{epi} f := \{(x, \mu) \in C \times \mathbb{R} \mid \mu \ge f(x)\}$$



Став Нека је $f : C \to \mathbb{R}$ два пута диференцијабилна.

f је конвексна $\iff (\forall x \in C) \; f''(x) \ge 0.$

1. [јануар 24.] Нека је $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ конвексна функција и $C\subseteq\mathbb{R}$ конвексан. Доказати да је функција $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ дата са $g(x)=\inf\limits_{y\in C} f(x,y)$ конвексна.

решење Нека су $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, $\lambda\in[0,1]$ и нека је $\varepsilon>0$ произвољно. Тада постоје $y_1,y_2\in C$ т.д.

$$f(x_1,y_1)\le g(x_1)+\varepsilon \quad \text{и} \quad f(x_2,y_2)\le g(x_2)+\varepsilon,$$

па је

$$\begin{aligned}
g(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) &= \inf_{y\in C} f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\, y)\\
&\le f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\, \overbrace{\lambda y_1+(1-\lambda)y_2}^{\in C \text{ јер је } C \text{ конвексан}})\\
&= f(\lambda(x_1,y_1)+(1-\lambda)(x_2,y_2))\\
&\overset{f \text{ конвексна}}{\le} \lambda f(x_1,y_1)+(1-\lambda)f(x_2,y_2)\\
&\le \lambda(g(x_1)+\varepsilon)+(1-\lambda)(g(x_2)+\varepsilon)\\
&= \lambda g(x_1)+(1-\lambda)g(x_2)+\varepsilon
\end{aligned}$$

Како је $\varepsilon>0$ произвољно, закључујемо

$$g(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le \lambda g(x_1)+(1-\lambda)g(x_2),$$

тј. g је конвексна. $\blacksquare$

2. (а) Нека је f позитивно хомогена. Тада

$$f \text{ је конвексна} \iff (\forall x,y\in\mathbb{R}^d)\ f(x+y)\le f(x)+f(y).$$

(б) f је позитивно хомогена $\iff$ epi f је конус у $\mathbb{R}^{d+1}$.

решење $\Rightarrow$: Нека је f конвексна.

$$f(x+y)=f\left(\tfrac12\cdot 2x+\tfrac12\cdot 2y\right)\underset{\substack{\text{конвексност}\\ \lambda=\frac12}}{\le}\tfrac12 f(2x)+\tfrac12 f(2y)\underset{\substack{\text{позитивна}\\ \text{хомогеност}}}{=}\tfrac12\cdot 2f(x)+\tfrac12\cdot 2f(y)=f(x)+f(y)$$

$\Leftarrow$: Показујемо да је f конвексна, тј. да за свако $\lambda \in [0,1]$ важи
$$f((1-\lambda)x+\lambda y) \leq (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y).$$
Ако је $\lambda=0$ или $\lambda=1$, неједнакост очигледно важи.
Нека је $\lambda \in (0,1)$:
$$f((1-\lambda)x+\lambda y) \leq f((1-\lambda)x) + f(\lambda y) \underset{\substack{\text{позитивна} \\ \text{хомогеност}}}{=} (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

(б) $\Rightarrow$: Хоћемо да покажемо да је epi f конус, тј. да за свако $\lambda>0$ и свако $(x,\mu) \in \text{epi} f$ важи $\lambda(x,\mu) \in \text{epi} f$.
$$\begin{aligned}(x,\mu) \in \text{epi} f &\Leftrightarrow \mu \geq f(x) \quad / \cdot \lambda \\ &\Leftrightarrow \lambda\mu \geq \lambda f(x) \underset{\substack{\text{позитивна} \\ \text{хомогеност}}}{=} f(\lambda x) \\ &\Leftrightarrow (\lambda x, \lambda\mu) \in \text{epi} f \\ &\Leftrightarrow \lambda(x,\mu) \in \text{epi} f\end{aligned}$$
Дакле, epi f јесте конус.

$\Leftarrow$: Нека је epi f конус, тј. за $\lambda>0$ важи
$$(x,\mu) \in \text{epi} f \Rightarrow \lambda(x,\mu) \in \text{epi} f,$$
тј. $f(x) \leq \mu \Rightarrow f(\lambda x) \leq \lambda\mu$ (*)

Нека је $x \in \mathbb{R}^d$, $\lambda>0$. Показујемо $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.
Применимо (*) за $\mu := f(x)$:
$$f(\lambda x) \leq \lambda f(x) \quad (1)$$
Са друге стране, $(\lambda x, f(\lambda x)) \in \text{epi} f$, па ако применимо (*) на овај елемент имамо $f(\eta \cdot \lambda x) \leq \eta f(\lambda x)$ за све $\eta>0$, а специјално за $\eta := \frac{1}{\lambda}$ је $f(x) \leq \frac{1}{\lambda} f(\lambda x)$, тј. $f(\lambda x) \geq \lambda f(x)$ (2).
Сада из (1) и (2) добијамо $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, тј. f је позитивно хомогена. ▨

3. Нека је $C \subseteq \mathbb{R}$ конвексан, $f, g : C \to \mathbb{R}$ ненегативне, конвексне, неопадајуће функције. Доказати да је $h := f \cdot g : C \to \mathbb{R}$ конвексна ($h(x) = f(x) \cdot g(x)$, $x \in C$)

решење Нека је $x, y \in C$, нпр. $x < y$ и $\lambda \in [0,1]$.

Показујемо $h((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)h(x) + \lambda h(y)$, тј.

$$\underbrace{f((1-\lambda)x+\lambda y) \cdot g((1-\lambda)x+\lambda y)}_{=: L} \leq \underbrace{(1-\lambda)f(x)g(x) + \lambda f(y)g(y)}_{D}.$$

Како су f и g конвексне, имамо

$$f((1-\lambda)x+\lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \quad \text{и} \quad g((1-\lambda)x+\lambda y) \leq (1-\lambda)g(x) + \lambda g(y),$$

па кад помножимо ове две неједнакости добијамо:

$$\underbrace{f((1-\lambda)x+\lambda y)\, g((1-\lambda)x+\lambda y)}_{= L} \leq \big((1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)\big)\big((1-\lambda)g(x) + \lambda g(y)\big)$$

$$= \underbrace{(1-\lambda)^2 f(x)g(x) + \lambda^2 f(y)g(y) + (1-\lambda)\lambda\big(f(x)g(y) + f(y)g(x)\big)}_{=: D_1}$$

Дакле, имамо да је $L \leq D_1$, а хоћемо да покажемо да је $L \leq D$, па је довољно да видимо да је $D_1 \leq D$, тј. $D - D_1 \geq 0$

$$D - D_1 = \big[(1-\lambda)f(x)g(x) + \lambda f(y)g(y)\big] - \big[(1-\lambda)^2 f(x)g(x) + \lambda^2 f(y)g(y) + (1-\lambda)\lambda\big(f(x)g(y) + f(y)g(x)\big)\big]$$

$$= \underbrace{\big(1-\lambda-(1-\lambda)^2\big)}_{\lambda-\lambda^2} f(x)g(x) + (\lambda-\lambda^2)f(y)g(y) - (\lambda-\lambda^2)\big(f(x)g(y) + f(y)g(x)\big) =$$

$$= (\lambda-\lambda^2)\big(f(x)g(x) + f(y)g(y) - f(x)g(y) - f(y)g(x)\big) =$$

$$= \underbrace{(\lambda-\lambda^2)}_{\geq 0}\ \underbrace{\big(f(x)-f(y)\big)}_{\leq 0}\ \underbrace{\big(g(x)-g(y)\big)}_{\leq 0} \geq 0 \qquad \blacksquare$$

$\lambda \in [0,1]$ — f неопадајућа и $x < y$ — g неопадајућа и $x < y$

Коментар Може се показати индукцијом да тврђење из претходног задатка важи и кад је h производ коначно много ненегативних, конвексних и неопадајућих функција.

4. Одредити $a, b, c \in \mathbb{R}$ за које је функција $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дата са $f(x) = a e^{2x} + b e^{x} + c$ конвексна.

Решење Како је f два пута диференцијабилна, то

$$f \text{ је конвексна } \Leftrightarrow f''(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 2a e^{2x} + b e^{x}$$

$$f''(x) = 4a e^{2x} + b e^{x} \geq 0$$

тј. $4a e^{x} + b \geq 0$ (A)

Одмах примећујемо да се c не појављује у f'', па не утиче на конвексност.

1° $a = 0$: (A) $\Leftrightarrow$ $b \geq 0$

2° $a < 0$: (A) $\Leftrightarrow$ $-4|a|e^{x} + b \geq 0, \ \forall x$

$$b \geq 4|a|e^{x}, \ \forall x$$

$$b \geq \sup_{x \in \mathbb{R}} 4|a|e^{x} = +\infty \Rightarrow \text{ не постоји овакво } b$$

3° $a > 0$: (A) $\Leftrightarrow$ $4a e^{x} + b \geq 0, \ \forall x$

$$b \geq -4a e^{x}, \ \forall x$$

$$b \geq \sup_{x \in \mathbb{R}} (-4a e^{x}) = 0$$

Коначно, кад спојимо 1°, 2° и 3°, добијамо

$$\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a \geq 0, b \geq 0\}.$$