(2) збир коефицијената у ⊛ је 1:

$$\sum_{i=0}^{m} (\lambda_i - \rho\alpha_i) - \rho\alpha = \sum_{i=0}^{m}\lambda_i - \rho\cdot\left(\sum_{i=0}^{m}\alpha_i + \alpha\right) = 1-\rho\cdot 0 = 1$$

(1) + (2) $\Rightarrow$ ⊛ је конвексна комбинација тачака $x_0,\dots,x_n,a$.

Шта је коефицијент уз $x_0$ у ⊛?

$$\lambda_0 - \rho\alpha_0 = \lambda_0 - \frac{\lambda_0}{\alpha_0}\alpha_0 = 0$$

$\Rightarrow$ ⊛ је конвексна комб. тачака $x_1,\dots,x_n,a$

$\Rightarrow$ $x\in \mathrm{conv}\{x_1,\dots,x_n,a\}$. ∎

4. Нека је $X$ скуп од $n$ тачака у $\mathbb{R}^d$, $n,d\in\mathbb{N}$.

(а) Ако је $\mathcal{C}$ фамилија свих отворених полупростора $\mathcal{H}$ т.д.

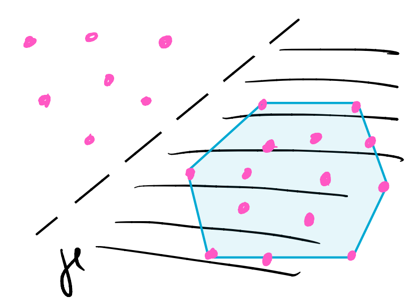
$$|X\cap\mathcal{H}| > \frac{d}{d+1}\cdot n,$$

доказати да је $\bigcap\mathcal{C}\neq\emptyset$.

(б) Доказати да постоји централна тачка скупа $X$, тј. тачка $\tilde{x}\in\mathbb{R}^d$ са својством да сваки затворени полупростор који садржи $\tilde{x}$, садржи бар $\frac{n}{d+1}$ тачака скупа $X$.

решење (а) Не можемо да применимо Хелијеву теорему на фамилију $\mathcal{C}$ јер скупови нису затворени, па посматрамо другу фамилију:

$$\mathcal{F} = \{\mathrm{conv}(X\cap\mathcal{H}) \mid \mathcal{H}\in\mathcal{C}\} = \{\mathrm{conv}(X\cap\mathcal{H}) \mid \mathcal{H}\text{ - отворен полупростор}, |X\cap\mathcal{H}| > \tfrac{d}{d+1}\cdot n\}$$



$X$ = тачке

$\mathcal{H}$ = полупростор

Сви скупови у $\mathcal{F}$ су конвексни и компактни, па нам за Хелијеву теорему треба само да за све $\mathcal{H}_1,\dots,\mathcal{H}_{d+1}\in\mathcal{C}$ важи

$$\mathrm{conv}(X\cap\mathcal{H}_1)\cap\dots\cap\mathrm{conv}(X\cap\mathcal{H}_{d+1})\neq\emptyset.$$

Довољно је показати

$$(X\cap\mathcal{H}_1)\cap\dots\cap(X\cap\mathcal{H}_{d+1})\neq\emptyset. \quad ⊛$$

тис. $(\exists \mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_{d+1} \in \mathcal{C})\ (X\cap \mathcal{H}_1)\cap \dots \cap (X\cap \mathcal{H}_{d+1}) = \phi$

уочимо комплементе у $X$ (тиу важи $(X\cap\mathcal{H})^c = X\setminus\mathcal{H}$)

$$\Big((X\cap\mathcal{H}_1)\cap\dots\cap(X\cap\mathcal{H}_{d+1})\Big)^c = \phi^c \quad \leftarrow \text{комплемент у } X$$

$$(X\cap\mathcal{H}_1)^c\cup\dots\cup(X\cap\mathcal{H}_{d+1})^c = X$$

$$(X\setminus\mathcal{H}_1)\cup\dots\cup(X\setminus\mathcal{H}_{d+1}) = X$$

Како $|X\cap\mathcal{H}_i| > \frac{d}{d+1}\cdot n$, то $|X\setminus\mathcal{H}_i| < n - \frac{d}{d+1}\cdot n = \frac{1}{d+1}\cdot n$, $i=\overline{1,d+1}$

$$\Rightarrow n = |X| = |(X\setminus\mathcal{H}_1)\cup\dots\cup(X\setminus\mathcal{H}_{d+1})| \le |X\setminus\mathcal{H}_1| + \dots + |X\setminus\mathcal{H}_{d+1}| < \underbrace{\frac{1}{d+1}\cdot n + \dots + \frac{1}{d+1}\cdot n}_{d+1} = n \ \lightning$$

$\Rightarrow$ важи $(*)$ $\Rightarrow$ из Хелијеве теореме добијамо $\cap\mathcal{F}\neq\phi$.

Како је $\operatorname{conv}(X\cap\mathcal{H})\subseteq\mathcal{H}$, то је $\cap\mathcal{F}\subseteq\cap\mathcal{C}$, па је и $\cap\mathcal{C}\neq\phi$.

(б) Показаћемо да произвољно $\tilde{x}\in\cap\mathcal{C}$ задовољава тражено својство.

тис. нека постоји затворен полупростор тд. $\tilde{x}\in\alpha$ и $|\alpha\cap X| < \frac{n}{d+1}$

Нека је $\mathcal{H} := \alpha^c$ – отворен полупростор. Како је

$$|X\cap\mathcal{H}| = \underbrace{|X|}_{n} - \underbrace{|\alpha\cap X|}_{<\frac{n}{d+1}} > n - \frac{n}{d+1} = \frac{d}{d+1}\cdot n$$

$\Rightarrow \mathcal{H}\in\mathcal{C} \Rightarrow \tilde{x}\in\mathcal{H}$ $\lightning$ јер $\tilde{x}\in\alpha=\mathcal{H}^c$.

$\Rightarrow$ $\tilde{x}$ задовољава тражено својство. ▨

5. [јун 22.] Нека је $S\subseteq\mathbb{R}^2$ коначан скуп тд. се сваке три тачке из $S$ могу покрити јединичним диском. Доказати да се цео скуп $S$ може покрити јединичним диском.

решење Нека је $\mathcal{F} = \{ B(x,1) \mid x\in S\}$

јединични диск са центром у $x$

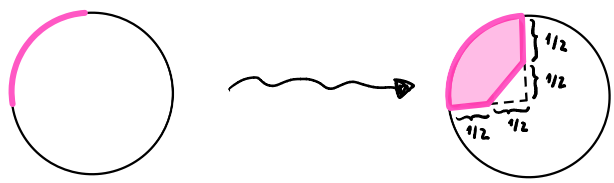
На основу услова задатка имамо да свака три диска из $\mathcal{F}$ имају непразан пресек.

$\Rightarrow$ Хелијева теорема нам даје $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

Нека је $a \in \bigcap \mathcal{F}$. Тада $S \subseteq B(a,1)$. ▨

6. (јун 23.) Нека је $\mathcal{F}$ коначна фамилија кружних лукова на јединичној кружници $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ тд. је дужина сваког од њих мања од пола кружнице. Ако свака три лука имају заједничку тачку, доказати да постоји тачка заједничка тачка свим луковима из $\mathcal{F}$.

решење Сваки лук одређује један конвексан скуп:



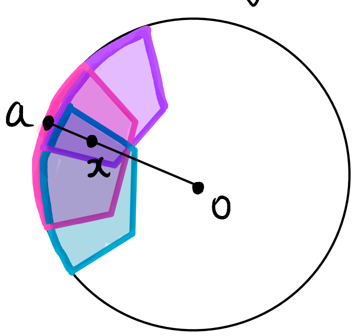

Нека је $\mathcal{C} = \{$сви овако добијени скупови од лукова из $\mathcal{F}\}$

Како нема лукова дужих од пола кружнице, сви скупови у $\mathcal{C}$ су конвексни, а и компактни.

Из услова задатка, свака три скупа из $\mathcal{C}$ имају непразан пресек, па на основу Хелијеве теореме је $\bigcap \mathcal{C} \neq \emptyset$.

Нека је $x \in \bigcap \mathcal{C} \neq \emptyset$. Тада је $Ox \cap S^1 \subseteq \bigcap \mathcal{F}$. ▨

Илустрација:




Коментар: за скупове у $\mathcal{C}$ нисмо могли да узмемо целе кружне исечке јер би у њиховом пресеку била O, а O не одређује ниједан полупречник једнозначно.

# Поларни скупови

**деф.** Нека је $S \subseteq \mathbb{R}^n$ непразан. Поларни скуп скупа $S$ је

$$S^* := \{ y \in \mathbb{R}^n \mid (\forall x \in S)\ \langle x, y \rangle \le 1 \}$$

$$= \bigcap_{x \in S} \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle \le 1 \}$$

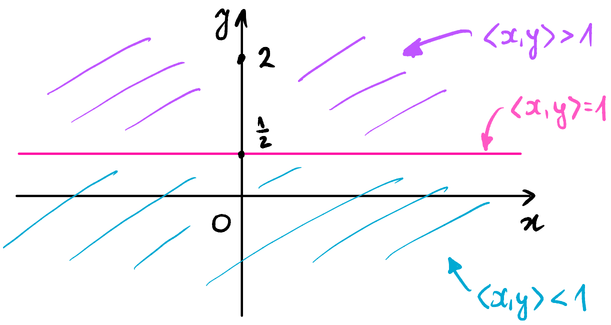
Шта је скуп $\{ y \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle = 1 \}$ за фиксирано $x$?

То је хиперраван ортогонална на $x$ на растојању $\frac{1}{\|x\|}$ од координатног почетка.

**Пример** (1) $x = (0,2)$, $y = (a, b)$

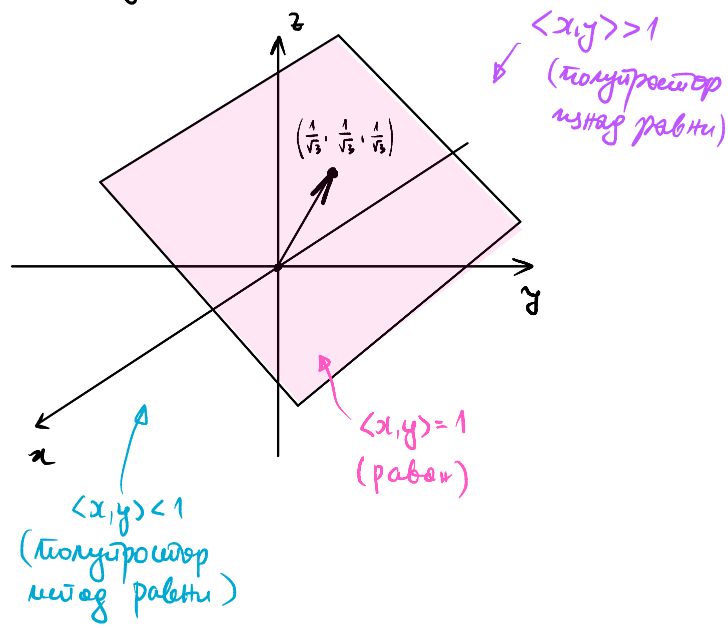
$$1 = \langle x, y \rangle = \langle (0,2), (a,b) \rangle$$

$$= 0 \cdot a + 2 \cdot b = 2b \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$




(2) $x = (1,1,1)$, $y = (a, b, c)$

$$1 = \langle x, y \rangle = a + b + c$$




**Пример** (1) $S = \{x\}$, $x \in \mathbb{R}^n$

$x \neq 0 \Rightarrow S^* =$ затворени полупростор на растојању $\frac{1}{\|x\|}$ (садржи $0$)

$x = 0 \Rightarrow S^* = \mathbb{R}^n$

(2) $S = [a, b] \subseteq \mathbb{R}^n$ $\quad (a, b \in \mathbb{R}^n)$

$S^* = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, y \rangle \le 1 \} \cap \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \langle b, y \rangle \le 1 \}$ – пресек два полупростора

(3) $S$ = потпростор $\Rightarrow$ $S^* = S^\perp$

(4) $S = K[0,r] \Rightarrow S^* = K[0, \frac{1}{r}]$

затворена лопта са центром у $O$, полупречника $r$

(5) $S = \{\lambda a \mid \lambda \leq 0\}$ = полуправа, $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$\Rightarrow S^* = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, y \rangle \geq 0\}$

**Теорема** Нека су $S, S_1, S_2, S_i$ $(i \in I)$ непразни у $\mathbb{R}^n$. Тада

(1) $\left(\operatorname{conv}\left(\bigcup_{i\in I} S_i\right)\right)^* = \bigcap_{i \in I} S_i^*$

(2) $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow S_2^* \subseteq S_1^*$

(3) $\lambda > 0 \Rightarrow (\lambda S)^* = \frac{1}{\lambda} S^*$

**Теорема** Нека је $C$ компактан, конвексан т.д. $0 \in \operatorname{int} C$. Тада је $C^*$ компактан и $0 \in \operatorname{int} C^*$.

**Теорема** Ако је $A \subseteq \mathbb{R}^n$ непразан, онда $A^{**} = \operatorname{cl}(\operatorname{conv}(A \cup \{0\}))$.

**Последица** Нека је $C \subseteq \mathbb{R}^n$ непразан.

(1) Ако је $C$ затворен, конвексан и садржи $0$, онда $C^{**} = C$.

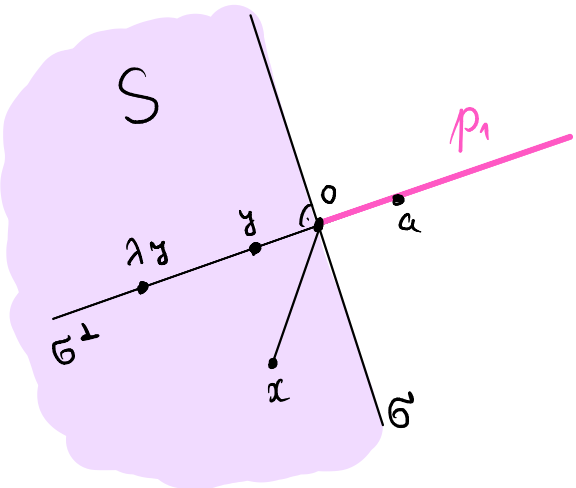
(2) $C^{***} = C^*$.

**Последица** Нека је $\{C_i \mid i \in I\}$ фамилија непразних затворених конвексних скупова у $\mathbb{R}^n$ т.д. $0 \in C_i$, $i \in I$. Тада

$$\left(\bigcap_{i \in I} C_i\right)^* = \operatorname{cl}\left(\operatorname{conv} \bigcup_{i \in I} C_i^*\right).$$

**1.** Нека је $S$ затворен полупростор у $\mathbb{R}^n$ тд. $0$ припада граничној хиперравни од $S$. Одредити $S^*$.

**решење** Нека је $\sigma$ гранична хиперраван од $S$ $(0 \in \sigma)$




$\sigma$ је потпростор од $\mathbb{R}^n \Rightarrow \sigma^* = \sigma^\perp$

$\sigma^\perp$ = права кроз $0$ ортогонална на $\sigma$

$\sigma \subseteq S \Rightarrow S^* \subseteq \sigma^* = \sigma^\perp$

Тврдимо: $S^*$ је полуправа $p_1$ из $0$ на правој $\sigma^\perp$ које није унутар $S$, тј.

$p_1 = \{\lambda a \mid \lambda \geq 0\}$, где је $a \in \sigma^\perp \setminus S$

произвољно.

**$p_1 \subseteq S^*$:** $\lambda a \in p_1$ произвољна тачка, $\lambda > 0$, $x \in S$ произвољно

$$\langle x, \lambda a \rangle \leq 0 < 1 \Rightarrow \lambda a \in S^*$$

јер је $\measuredangle(x, \lambda a)$ прав или туп

**$S^* \subseteq p_1$:** $y \in S^*$ и тпс. $y \notin p_1$, тј. $y \in \sigma^\perp \setminus p_1$

Нека је $\lambda > \frac{1}{\|y\|^2}$. Како $\lambda > 0$, то $\lambda y \in S$.

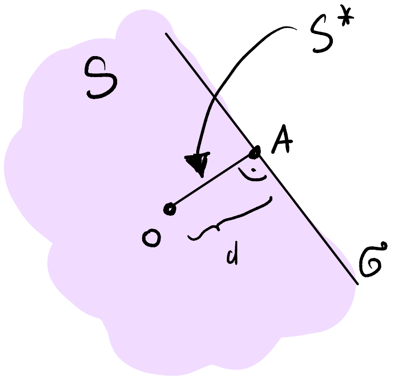
$$\langle \underbrace{\lambda y}_{\in S}, y \rangle = \lambda \cdot \|y\|^2 > 1 \Rightarrow y \notin S^* \quad (\text{јер у } S^* \text{ је } \langle \cdot, \cdot \rangle \leq 1) \ \lightning$$

Коначно, $S^* = p_1$.

**II начин** Из примера (5) имамо $p_1^* = S$, а из 1. последице тог (1) је $p_1^{**} = p_1$ (јер је $p_1$ затворен, конвексан и $0 \in p_1$)

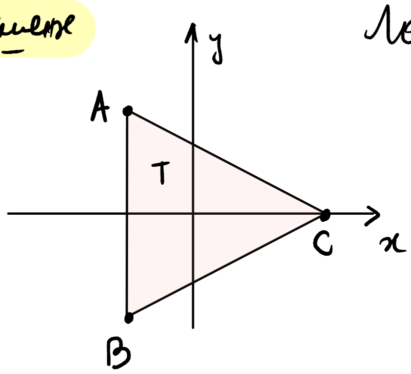
$$\Rightarrow S^* = p_1^{**} = p_1 \quad \blacksquare$$

Лема Нека је $S$ затворен полупростор тд. $O \in \operatorname{int} S$, $\sigma$ гранична хиперраван од $S$ на растојању $d>0$ од координатног почетка. Тада је $S^*$ дуж $[0,A]$, где је $A$ подножје нормале из $O$ на $\sigma$.




2. Одредити поларни скуп троугла $T$ у равни са теменима $(1,0)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ и $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

решење




Лако се види да је $T$ једнакостраничан.

$T = \operatorname{conv}\{A, B, C\}$

$\Rightarrow T^* = \{A\}^* \cap \{B\}^* \cap \{C\}^*$

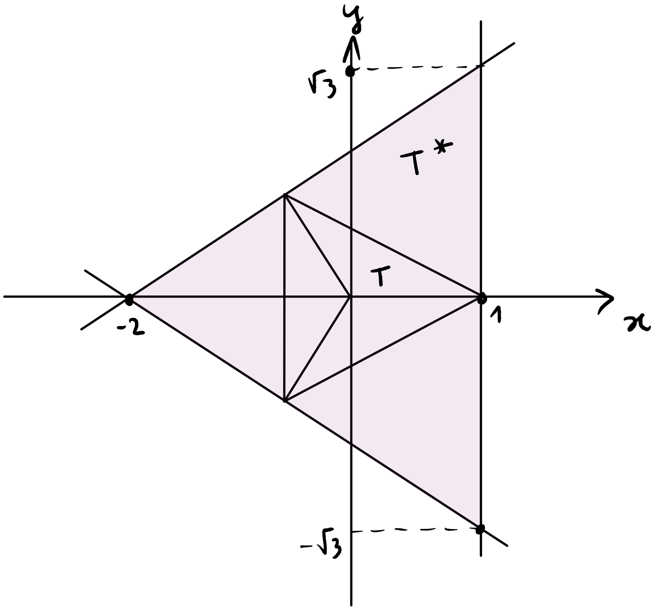
$\{A\}^* =$ полураван $\alpha$ чија је гранична права ортогонална на $OA$ и на растојању $\frac{1}{\|A\|}$ од $O$

$\|A\| = 1 \Rightarrow \frac{1}{\|A\|} = 1 \Rightarrow$ гранична права од $\alpha$ пролази кроз $A$.

($\{A\}^*$ генерално не мора садржати $A$, овде је то због $\|A\|=1$)

Слично $\|B\| = \|C\| = 1$, па су $\{B\}^*$ и $\{C\}^*$ полуравни чије су граничне праве орто. на $OB$ и $OC$ и пролазе кроз $B$ и $C$, редом.

$\Rightarrow T^*$ је пресек ове 3 полуравни




$\Rightarrow$ $T^*$ је троугао са теменима

$(-2,0)$, $(1,-\sqrt{3})$ и $(1,\sqrt{3})$

(прескачемо рачун) $\blacksquare$