Нека је $S \subseteq \mathbb{R}^n$ и $B := B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^n$ јединична лопта са центром у 0.

$$\operatorname{int} S := \{ x \in S \mid (\exists \varepsilon > 0)\ \underbrace{x + \varepsilon B}_{\substack{\text{лопта полупречника } \varepsilon \\ \text{са центром у } x}} \subseteq S \}$$ – унутрашњост скупа S

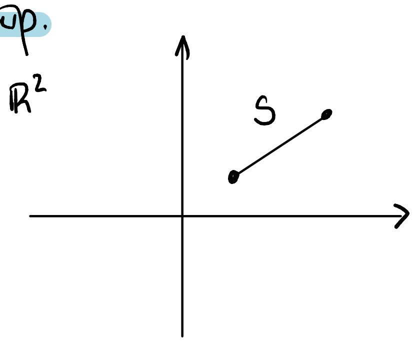
$$\operatorname{cl} S := \bigcap_{\varepsilon > 0} (S + \varepsilon B)$$ – затворење скупа S

$$\operatorname{bd} S := \operatorname{cl} S \setminus \operatorname{int} S$$ – граница скупа S

$$\operatorname{relint} S := \{ x \in S \mid (\exists \varepsilon > 0)\ (x + \varepsilon B) \cap \operatorname{aff}(S) \subseteq S \}$$ – релативна унутрашњост скупа S

$$\operatorname{relbd} S := \operatorname{cl}(S) \setminus \operatorname{relint}(S)$$ – релативна граница скупа S

Пр.



$\operatorname{int} S = \emptyset$

$\operatorname{cl} S =$

$\operatorname{bd} S =$

$\operatorname{relint} S =$

$\operatorname{relbd} =$

Теорема Ако је $C \subseteq \mathbb{R}^n$ непразан и конвексан, онда $\operatorname{relint} C \neq \emptyset$.

7. Ако је C конвексан, тада је $\operatorname{relint} C$ конвексан.

Решење Нека су $x, y \in \operatorname{relint} C$, $\lambda \in [0,1]$.

$$x \in \operatorname{relint} C \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0)\ (x + \varepsilon B) \cap \operatorname{aff} C \subseteq C.$$

Показујемо $\lambda x + (1-\lambda) y \in \operatorname{relint} C$, а за то је довољно да покажемо:

$$\underbrace{(\lambda x + (1-\lambda) y + \lambda \varepsilon B) \cap \operatorname{aff} C}_{=: L} \subseteq C.$$

Нека је $\lambda x + (1-\lambda) y + \lambda \varepsilon z \in L$, где је $z \in B$.

тј. имамо $\underbrace{\lambda(x+\varepsilon z)}_{\substack{\cap \\ (x+\varepsilon B)\cap \operatorname{aff} C \subseteq C}} + (1-\lambda) y \in C$ ← јер је C конвексан.

$\Rightarrow L \subseteq C$, па $\lambda x + (1-\lambda) y \in \operatorname{relint} C$, тј. $\operatorname{relint} C$ је конвексан. ▨

8. Ако је C конвексан, онда је $\operatorname{cl} C$ конвексан.

решење Нека су $x, y \in \operatorname{cl} C$, $\lambda \in [0,1]$. $\operatorname{cl} C$ је затворен, па постоје низови (x_n), (y_n) у C тд. $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, $y = \lim_{n\to\infty} y_n$.

Тада
$$\lim_{n\to\infty} \Big(\underbrace{\lambda x_n + (1-\lambda) y_n}_{\substack{\cap \\ C \text{ јер је } C \\ \text{конвексан}}} \Big) = \lambda x + (1-\lambda) y \in \operatorname{cl} C. \quad ▨$$

Теорема Ако је C непразан конвексан скуп, онда
$$\operatorname{cl}(\operatorname{relint} C) = \operatorname{cl} C, \quad \operatorname{relint}(\operatorname{cl} C) = \operatorname{relint} C.$$

9. [септембар 22.] Нека је $C \subseteq \mathbb{R}^k$ конвексан, $V \subseteq \mathbb{R}^k$ отворен. Ако $V \cap \operatorname{cl} C \neq \emptyset$, доказати $V \cap \operatorname{relint} C \neq \emptyset$.

решење Нека је $x \in V \cap \operatorname{cl} C = V \cap \operatorname{cl}(\operatorname{relint} C)$.

Тада постоје $x_n \in \operatorname{relint} C$ тд. $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Како је V отворен, постоји неко $n_0 \in \mathbb{N}$ тд. $x_n \in V$ за свако $n \geq n_0$. Уочимо нпр. x_{n_0}. Онда $x_{n_0} \in V \cap \operatorname{relint} C$. ▨

10. [јануар 22.] Нека је $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Доказати да је $\operatorname{int} S = \operatorname{relint} S$ или $\operatorname{int} S = \emptyset$.

решење Афини омотач $\operatorname{aff}(S)$ можемо представити као
$$\operatorname{aff}(S) = x_0 + L,$$

где је L векторски простор, а $x_0 \in aff(S)$ произвољан (можемо узети баш $x_0 \in S$).

$1°$ $\dim L = n$: тада је $aff(S) = \mathbb{R}^n$ и за свако $x \in S$, $\varepsilon > 0$ важи $(x + \varepsilon B) \cap aff(S) = x + \varepsilon B$, па се дефинишује за $\operatorname{int} S$ и $\operatorname{relint} S$ поклапају, тј. $\operatorname{int} S = \operatorname{relint} S$.

$2°$ $\dim L = m < n$: Нека су $x_0, \dots, x_m$ афино независне тачке у S. Тада је $x_1 - x_0, \dots, x_m - x_0$ база од L. Нека је $x \in \mathbb{R}^n$ тј. $x - x_0 \in L^\perp$ и $x - x_0 \neq 0$ (овакав x постоји јер $\dim L^\perp = n - m > 0$).

Показаћемо $\operatorname{int}(aff\, S) = \phi$. Нека је $y \in \operatorname{int}(aff\, S)$ произвољна. Тада $y = x_0 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (x_i - x_0)$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ и постоји $\varepsilon > 0$ тд. важи $y + \varepsilon B \subseteq aff\, S$. Следујући имамо $x - x_0 \in L^\perp$ од раније и $\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|} \in B$, па

$$y + \varepsilon \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|} = x_0 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (x_i - x_0) + \varepsilon \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|} \in aff(S)$$

$$\Rightarrow x_0 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (x_i - x_0) + \varepsilon \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|} = x_0 + \sum_{i=1}^{m} \mu_i (x_i - x_0), \text{ за неке } \mu_i \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ одавде можемо да изразимо $x - x_0$ као линеарну комбинацију вектора $x_1 - x_0, \dots, x_m - x_0$, што је контрадикција јер је $\{x_1 - x_0, \dots, x_m - x_0\}$ база од L, а $x - x_0 \in L^\perp$.

Дакле, не постоји $y \in \operatorname{int}(aff\, S)$, па је $\operatorname{int}(aff\, S) = \phi$, а како је $S \subseteq aff\, S$, тим пре је и $\operatorname{int} S = \phi$. ▨

11. Нека је $K \subseteq \mathbb{R}^n$ конвексан и затворен и $\operatorname{int} K \neq \phi$. Доказати $cl(\operatorname{int} K) = K$.

решење Из претходног задатка је $\operatorname{int} K = \operatorname{relint} K$, па је

$$cl(\operatorname{int} K) = \underset{\text{Теорема на стр. 9}}{cl(\operatorname{relint} K) =} \; cl\, K \underset{\text{јер је } K \text{ затворен}}{=} K \quad ▨$$

Комбинаторна својства

Теорема [Каратеодори] Нека је $S \subseteq \mathbb{R}^n$ непразан. Тада за свако $x \in \operatorname{conv}(S)$ постоје $x_0, x_1, \dots, x_n \in S$ и $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ тј. $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$ и $\lambda_i \geq 0$, $i = \overline{0,n}$ (тј. x се може представити као конвексна комбинација $n+1$ тачке из S).

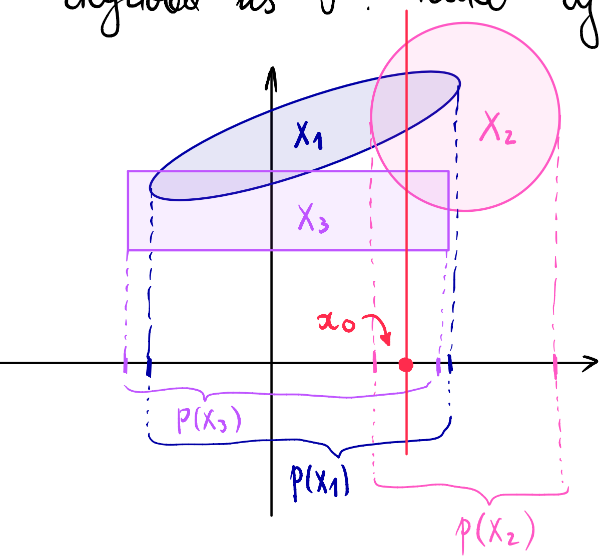
Теорема [Хелијева] Нека је $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_m\}$ коначна фамилија конвексних скупова у $\mathbb{R}^n$ и нека је $m \geq n+1$. Ако свака подфамилија фамилије $\mathcal{C}$ од $n+1$ елемената има непразан пресек, онда је и $C_1 \cap \dots \cap C_m \neq \emptyset$.

Теорема [Хелијева] Нека је $\mathcal{C}$ фамилија затворених конвексних скупова у $\mathbb{R}^n$ од којих је бар један компактан и има их бар $n+1$ (а може их бити и бесконачно). Ако свака подфамилија фамилије $\mathcal{C}$ од $n+1$ елемената има непразан пресек, онда је и $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \emptyset$.

1. Нека је $\mathcal{F}$ фамилија компактних конвексних скупова у $\mathbb{R}^2$ од којих се свака 2 секу. Ако је ℓ произвољна права у равни, доказати да постоји права паралелна ℓ која сече све скупове фамилије $\mathcal{F}$.

решење Без умањења општости нека је ℓ y-оса, па тражимо праву паралелну y-оси која сече све скупове из $\mathcal{F}$.
Нека је $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ пројекција на x-осу (тј. $p(x,y) = x$).
Посматрајмо фамилију $\mathcal{C} = \{ p(X) \mid X \in \mathcal{F} \}$ свих пројекција

скупова из $\mathcal{F}$. Како су сви $X \in \mathcal{F}$ компактни и конвексни и p је непрекидно, онда су сви $p(X)$ такође компактни и конвексни ($p(X)$ ће бити затворена дуж).



Из компактности $p(X)$ следи затвореност. Дакле, скупови из $\mathcal{C}$ су компактни, затворени и конвексни у $\mathbb{R}$ и свака два се секу, па на основу Хелијеве теореме $\bigcap \mathcal{C} \neq \emptyset$.

$\Rightarrow$ постоји $x_0 \in \bigcap \mathcal{C}$, тј. $x_0 \in p(X)$, за свако $X \in \mathcal{F}$, па је права кроз x_0 нормална на x-осу тражена права. ▨

2. Нека је $\mathcal{F}$ коначна фамилија од бар $n+1$ отворених полупростора у $\mathbb{R}^n$ који покривају $\mathbb{R}^n$. Доказати да постоји неких $n+1$ елемената у $\mathcal{F}$ који покривају $\mathbb{R}^n$.

решење: Нека је $\mathcal{F} = \{X_1, \dots, X_m\}$, $m \geq n+1$.

Посматрајмо фамилију $\mathcal{C} = \{X_1^c, \dots, X_m^c\}$

- $|\mathcal{C}| = |\mathcal{F}| = m \geq n+1$
- $X_1 \cup \dots \cup X_m = \mathbb{R}^n \ /^c \Rightarrow X_1^c \cap \dots \cap X_m^c = \emptyset$ (**)

Хоћемо да покажемо да постоји неких $n+1$ полуравни у $\mathcal{F}$ који покривају цео $\mathbb{R}^n$, па ппс.

$$X_{i_1} \cup \dots \cup X_{i_{n+1}} \neq \mathbb{R}^n \quad \text{за све } i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, m\}$$

$$\Rightarrow X_{i_1}^c \cap \dots \cap X_{i_{n+1}}^c \neq \emptyset \quad (*)$$

Сваки X_i^c је затворен полупростор, па је конвексан.

Из (*) следи да можемо да применимо Хелијеву теорему

$\Rightarrow X_1^c \cap \dots \cap X_m^c \neq \emptyset$, али то је у контрадикцији са (**). ▨

3. Нека је $S \subseteq \mathbb{R}^n$ непразан, $a \in S$ и $x \in \operatorname{conv} S$. Доказати да постоје $a_1, \dots, a_k \in S$, $k \le n$, тј. $x \in \operatorname{conv}\{a, a_1, \dots, a_k\}$

решење Из теореме Каратеодорија постоје тачке $x_0, \dots, x_n$ тј. је $x = \lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_n x_n$ конвексна комбинација (тј. $\lambda_i \ge 0$, $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$)

1° $\lambda_i = 0$, за неко $i \in \{0, \dots, n\}$

$$\Rightarrow x \in \operatorname{conv}\{x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n\} \Rightarrow x \in \operatorname{conv}\{a, \underbrace{x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n}_{\text{одаберемо ових } n \text{ тачака за } a_1, \dots, a_n}\}$$

2° $\lambda_i \neq 0$, за свако $i \in \{0, \dots, n\}$

- ако $a \in \{x_0, \dots, x_n\}$ ✓
- претпоставимо сада $a \notin \{x_0, \dots, x_n\}$

$\Rightarrow$ $a, x_0, \dots, x_n$ су афино зависне (јер их има $n+2$, а налазимо се у $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow (\exists\, \alpha_0, \dots, \alpha_n, \alpha \in \mathbb{R})$ $\alpha_0 + \dots + \alpha_n + \alpha = 0$ и $\alpha_0 x_0 + \dots + \alpha_n x_n + \alpha a = 0$

Можемо претпоставити $\alpha \le 0$ (ако је $\alpha > 0$, само помножимо са (-1)).

Нека је $\rho = \min\left\{ \frac{\lambda_i}{\alpha_i} \mid \alpha_i > 0 \right\}$, без умањења општости, $\rho = \frac{\lambda_0}{\alpha_0}$.

Сада имамо:

$$x = x - \rho \cdot 0 = (\lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_n x_n) - \rho\left(\alpha_0 x_0 + \dots + \alpha_n x_n + \alpha a\right) =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} (\lambda_i - \rho \alpha_i) x_i - \rho \alpha a \quad (*)$$

Приметимо:

(1) сви коеф. у $(*)$ су ≥ 0:

- $\underset{\ge 0}{-\rho}\, \underset{\le 0}{\alpha} \ge 0$ ✓
- ако $\alpha_i > 0$: $\lambda_i - \rho \alpha_i \ge \lambda_i - \frac{\lambda_i}{\alpha_i} \cdot \alpha_i = 0$ ✓
- ако $\alpha_i \le 0$: $\lambda_i - \underset{\ge 0}{\rho}\, \underset{\le 0}{\alpha_i} \ge \lambda_i \ge 0$ ✓

(2) збир коефицијената у ⊛ је 1:

$$\sum_{i=0}^{n} (\lambda_i - \rho\alpha_i) - \rho\alpha = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i - \rho\cdot\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i + \alpha\right) = 1 - \rho\cdot 0 = 1$$

(1) + (2) $\Rightarrow$ ⊛ је конвексна комбинација тачака $x_0, \dots, x_n, a$.

Шта је коефицијент уз x_0 у ⊛ ?

$$\lambda_0 - \rho\alpha_0 = \lambda_0 - \frac{\lambda_0}{\alpha_0}\alpha_0 = 0$$

$\Rightarrow$ ⊛ је конвексна комб. тачака $x_1, \dots, x_n, a$

$\Rightarrow$ $x \in \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_n, a\}$. ▨