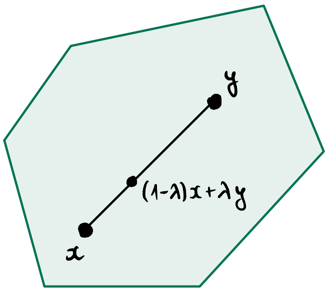
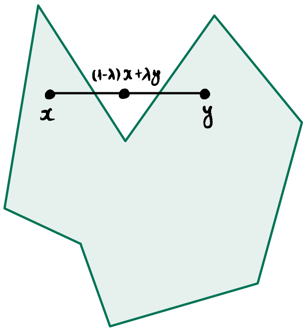
Конвексни скупови

деф. Скуп C је конвексан ако
$$(\forall x, y \in C)(\forall \lambda \in [0,1]) \quad \lambda x + (1-\lambda) y \in C.$$

конвексан:



није конвексан:



деф. • $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1 \Rightarrow \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ је афина комбинација тачака $x_1, \dots, x_n$;

• $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \Rightarrow \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ је конвексна комбинација тачака $x_1, \dots, x_n$.

Став C је конвексан $\Leftrightarrow$ свака конвексна комбинација тачака из C припада C.

деф. A - скуп, конвексни омотач од A је:

$$\mathrm{conv}(A) \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{\substack{C \text{ конвексан}, \\ A \subseteq C}} C =$$

пресек свих конвексних који садрже A

$$= \{ \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \mid n \in \mathbb{N}, \lambda_i \geq 0, x_i \in A \}$$

све конвексне комбинације тачака из A

1. Нека је $S \subseteq \mathbb{R}^m$ и $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ афино пресликавање

(тј. $\varphi(x) \overset{def}{=} Ax + b$, $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^m$).

Доказати да важи $\varphi(conv(S)) = conv(\varphi(S))$

решење $\supseteq$: Покажимо најпре да линеарна пресликавања чувају конвексност, тј. да важи: S конвексан $\Rightarrow$ $A(S)$ конвексан

Нека су $y_1, y_2 \in A(S)$ и $\lambda \in [0,1]$. Тада постоје $x_1, x_2 \in S$ тд. $y_1 = Ax_1$, $y_2 = Ax_2$, па је

$$(1-\lambda)y_1 + \lambda y_2 = (1-\lambda)Ax_1 + \lambda A x_2 = A\Big(\underbrace{(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2}_{\in S \text{ јер је конвексан}}\Big) \in A(S)$$

$\Rightarrow$ $A(S)$ је конвексан

φ још транслира $A(S)$ за вектор b, али то не утиче на конвексност $\Rightarrow$ и афина пресликавања чувају конвексност.

$conv(S)$ је конвексан $\Rightarrow$ $\varphi(conv(S))$ је конвексан

$$\varphi(S) \subseteq \underbrace{\varphi(conv(S))}_{\text{конвексан}} \Rightarrow conv(\varphi(S)) \subseteq \varphi(conv(S))$$

$\subseteq$: Нека је $y \in \varphi(conv(S))$. Тада постоји $x \in conv(S)$ тд. $y = \varphi(x)$.

$x \in conv(S) \Rightarrow \exists x_1, \dots, x_k \in S$, $\exists \lambda_i \geq 0$ тд. $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$

и $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k$.

Сада је

$$y = \varphi(x) = \varphi(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k) = A(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k) + b =$$

$$= \lambda_1 A x_1 + \dots + \lambda_k A x_k + \underbrace{(\lambda_1 + \dots + \lambda_k)}_{1} b =$$

$$= \lambda_1 (Ax_1 + b) + \dots + \lambda_k (Ax_k + b) =$$

$$= \lambda_1 \varphi(x_1) + \dots + \lambda_k \varphi(x_k) \in conv(\varphi(S)). \ \blacksquare$$

2. Нека су $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}^k$. Доказати $\mathrm{conv}(S_1+S_2) = \mathrm{conv}(S_1)+\mathrm{conv}(S_2)$.

решење

$$S_1+S_2 \overset{def}{=} \{x_1+x_2 \mid x_1 \in S_1,\ x_2 \in S_2\}$$

$\subseteq$: $x \in \mathrm{conv}(S_1+S_2) \Rightarrow \exists \lambda_i \geq 0,\ \lambda_1+\dots+\lambda_n = 1,\ a_i \in S_1, b_i \in S_2$

$$x = \lambda_1(a_1+b_1)+\dots+\lambda_n(a_n+b_n) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i}_{\in\ \mathrm{conv}(S_1)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i}_{\in\ \mathrm{conv}(S_2)} \in \mathrm{conv}(S_1)+\mathrm{conv}(S_2)$$

$\supseteq$: $x \in \mathrm{conv}(S_1)$, $y \in \mathrm{conv}(S_2)$

$$\Rightarrow \quad x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0$$

$$y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i, \quad \sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1, \quad \mu_i \geq 0$$

(генерално је $x = \sum_{i=1}^{m}$, $y = \sum_{i=1}^{k}$, али узмемо $n = \max\{m, k\}$ и допунимо нулама — $\lambda_i = 0$ за $i > m$, $\mu_i = 0$ за $i > k$)

Приметимо
$$x + b_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i + \underbrace{(\lambda_1+\dots+\lambda_n)}_{1} b_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\underbrace{a_i+b_j}_{\in\ S_1+S_2}) \in \mathrm{conv}(S_1+S_2)$$

$$x+y = \underbrace{(\mu_1+\dots+\mu_n)}_{1} x + \sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i (\underbrace{x+b_i}_{\in\ \mathrm{conv}(S_1+S_2)}) \in \mathrm{conv}(\mathrm{conv}(S_1+S_2)),$$

али $\mathrm{conv}(\mathrm{conv}(S_1+S_2)) = \mathrm{conv}(S_1+S_2)$, па коначно

$x+y \in \mathrm{conv}(S_1+S_2)$. ■

3. Ако је $S \subseteq \mathbb{R}^n$ конвексан, доказати $\operatorname{conv}(S) = S$.

решење Свакако важи $S \subseteq \operatorname{conv}(S)$, то показујемо $\supseteq$.

Нека је $x \in \operatorname{conv}(S) \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$, $x_i \in S$.

Показујемо да је $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \in S$ индукцијом по n.

база индукције: $n=2$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \Rightarrow \lambda_2 = 1 - \lambda_1$

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1) x_2 \in S \quad \text{(по деф. конвексности)}$$

инд. хипотеза: Нека тврђење важи за све бројеве мање од n

инд. корак: покажимо да тврђење важи и за n $(n \geq 3)$

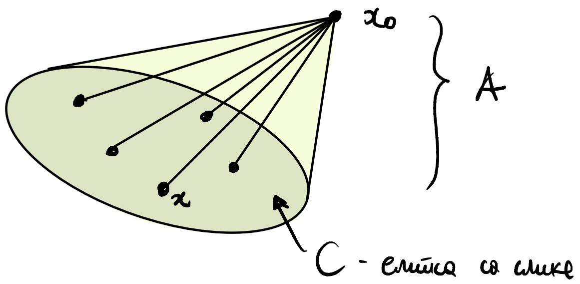
$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = (1-\lambda_n)\underbrace{\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_n} x_1 + \dots + \frac{\lambda_{n-1}}{1-\lambda_n} x_{n-1}\right)}_{\in S \text{ по и.х.}} + \lambda_n x_n \in S$$

$\blacksquare$

4. Нека је $x_0 \in \mathbb{R}^k$ и $C \subseteq \mathbb{R}^k$ конвексан. Доказати да је

$$\operatorname{conv}(C \cup \{x_0\}) = \{\lambda x_0 + (1-\lambda)x \mid x \in C,\ \lambda \in [0,1]\} =: A$$

решење Приметимо, скуп A се састоји од свих дужи које спајају x_0 са тачкама из C:



$\operatorname{conv}(C \cup \{x_0\}) \subseteq A$:

Нека је $x \in \operatorname{conv}(C \cup \{x_0\})$. Тада је $x = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m$, где $x_1, \dots, x_m \in C$, $\lambda_i \geq 0$, $\lambda_0 + \dots + \lambda_m = 1$.

1° $\lambda_0 = 1 \Rightarrow x = x_0 \in A$ ✓

2° $\lambda_0 \neq 1 \Rightarrow$ $$x = \lambda_0 x_0 + (1-\lambda_0)\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_0} x_i}_{= y} \quad (*)$$

Приметимо $\sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_0} = \frac{1-\lambda_0}{1-\lambda_0} = 1$, па $y \in C$.

Сада из (A) закључујемо $x \in A$.

$A \subseteq conv(C \cup \{x_0\})$:

$conv(C \cup \{x_0\})$ је конвексан, па за свако $x, y \in conv(C \cup \{x_0\})$, $\lambda \in [0,1]$ важи $\lambda x + (1-\lambda) y \in conv(C \cup \{x_0\})$. Специјално, за $x \in C$, $\lambda \in [0,1]$ имамо $\lambda x_0 + (1-\lambda) x \in conv(C \cup \{x_0\})$, тј. $A \subseteq conv(C \cup \{x_0\})$. ∎

5. Нека је $C \subseteq \mathbb{R}^k$ затворен скуп за који важи

$$(\forall a, b \in C)\ \frac{a+b}{2} \in C.$$

Доказати да је C конвексан.

решење Приметимо: $\frac{a+b}{2}$ је средина дужи $\overline{ab}$.

Нека је $a, b \in C$, $\lambda \in [0,1]$. Показујемо $\lambda a + (1-\lambda) b \in C$.

Имамо да $\frac{a+b}{2} \in C$, али и $\frac{a + \frac{a+b}{2}}{2} = \frac{3a+b}{4} \in C$, $\frac{a+3b}{4} \in C, \dots$

Генерално, $\frac{k}{2^l} a + \left(1 - \frac{k}{2^l}\right) b \in C$, $k, l \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le 2^l$

формирамо низ $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ т.д. су сви λ_n облика $\frac{k}{2^l}$ и да је $\lim_{n \to \infty} \lambda_n = \lambda$. Најпре дефинишемо скупове X_i :

$$X_0 := [0,1]$$

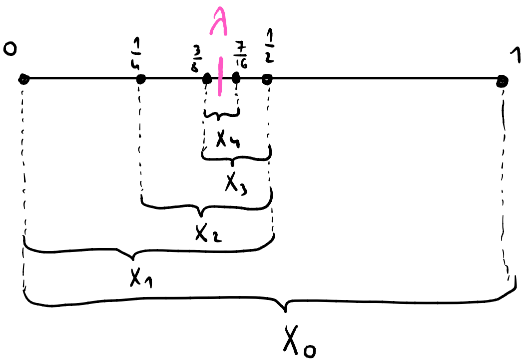
$$X_1 := \begin{cases} [0, \frac{1}{2}], & \lambda \in [0, \frac{1}{2}] \\ [\frac{1}{2}, 1], & \lambda \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$\vdots$

$$X_i = [x, y]$$

$$X_{i+1} = \begin{cases} [x, \frac{x+y}{2}], & \lambda \in [x, \frac{x+y}{2}] \\ [\frac{x+y}{2}, y], & \lambda \in (\frac{x+y}{2}, y] \end{cases}$$

$\vdots$



Нека је $\lambda_n := \max X_n$. Тада $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$ и из дефиниције низа (λ_n) видимо да

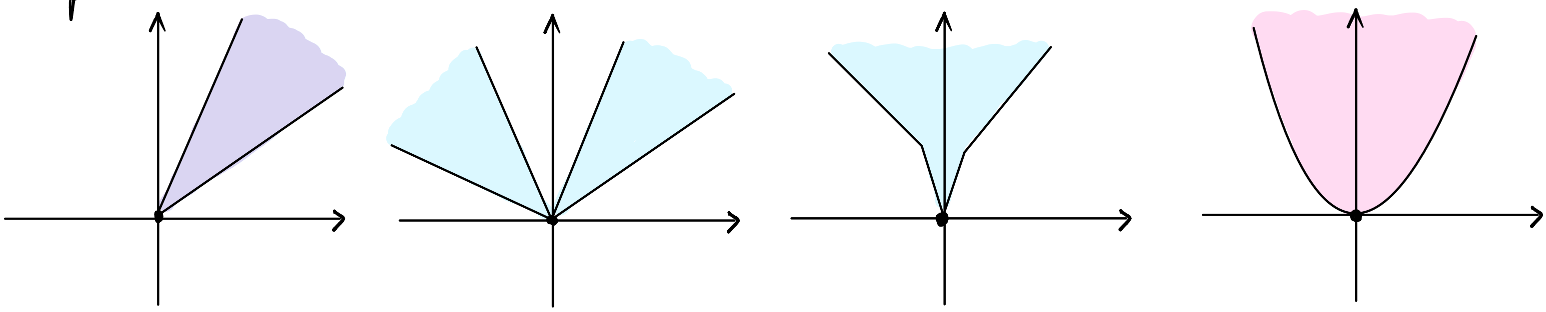
$$(\forall n\in\mathbb{N}) \quad \lambda_n a + (1-\lambda_n) b \in C.$$

Како је C затворен, онда

$$\lambda a + (1-\lambda) b = \lim_{n\to\infty} \left(\lambda_n a + (1-\lambda_n) b\right) \in C. \quad \blacksquare$$

деф. Скуп $K \subseteq \mathbb{R}^n$ је конус са теменом у 0 ако за свако $x \in K$, $\lambda > 0$ важи $\lambda x \in K$.

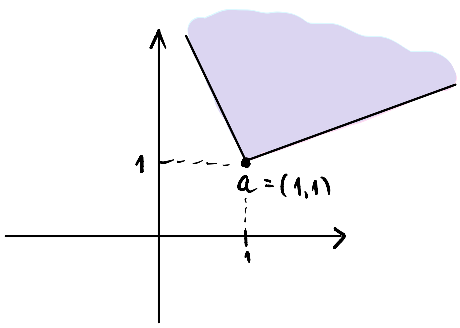
нпр.



конус, конвексан | конус, није конвексан | конус, није конвексан | није конус, конвексан

деф. Конус са теменом у $a \in \mathbb{R}^n$ је транслат конуса са теменом у 0.

нпр.



деф. Конусни омотач скупа S је $\operatorname{cone}(S) := \bigcap\limits_{\substack{S\subseteq K \\ K\text{ - конус}}} K$

деф. Позитивни омотач скупа S је

$$\operatorname{pos}(S) := \{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \mid n\in\mathbb{N},\ \alpha_i \geq 0,\ x_i \in S\}.$$

6. Нека је $S \in \mathbb{R}^k$

(а) $pos(S) = cone(conv(S))$;

(б) $pos(S) \cap aff(S) = conv(S)$.

решење (а) $\subseteq$: $x \in pos(S) \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, $\alpha_i \geq 0$, $x_i \in S$. Тада је

$$x = \underbrace{(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} x_i}_{\in\, conv(S)} \in cone(conv(S))$$

$\supseteq$: Очигледно $conv(S) \subseteq pos(S)$. Такође, $pos(S)$ је конус јер

$$(\forall \lambda \geq 0)\ \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \underset{\uparrow\, \alpha_i \geq 0,\ x_i \in S}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda \alpha_i x_i \in pos(S).$$

Како је $cone(conv(S))$ најмањи конус који садржи $conv(S)$, то је $cone(conv(S)) \subseteq pos(S)$.

(б) $\supseteq$: очигледно важи јер $conv(S) \subseteq pos(S)$ и $conv(S) \subseteq aff(S)$.

$\subseteq$: Нека је $x \in pos(S) \cap aff(S)$. Из $x \in pos(S)$ следи да је

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \quad \alpha_i \geq 0, \quad x_i \in S.$$

1° $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \Rightarrow x \in conv(S)$ ✓

2° $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 1$: Нека је $y := \frac{1}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ (приметимо $y \in aff(S)$)

Како $x, y \in aff(S)$, то $\frac{1}{1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i} x + \left(1 - \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i}\right) y \in aff(S)$, али

$$\frac{1}{1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \left(1 - \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i}\right) \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 \notin aff(S)\ ↯$$

∎

Нека је $S \subseteq \mathbb{R}^n$ и $B := B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^n$ јединична лопта са центром у 0.

$$\operatorname{int} S := \{x \in S \mid (\exists \varepsilon > 0)\ \underbrace{x + \varepsilon B}_{\text{лопта полупречника } \varepsilon \text{ са центром у } x} \subseteq S\}$$ – унутрашњост скупа S

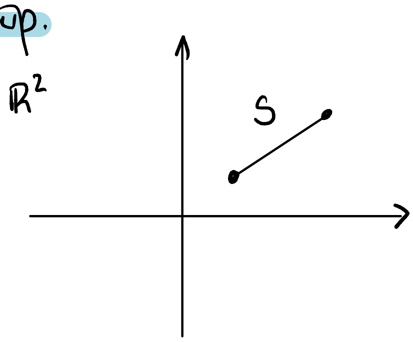
$$\operatorname{cl} S := \bigcap_{\varepsilon > 0} (S + \varepsilon B)$$ – затворење скупа S

$$\operatorname{bd} S := \operatorname{cl} S \setminus \operatorname{int} S$$ – граница скупа S

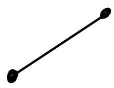
$$\operatorname{relint} S := \{x \in S \mid (\exists \varepsilon > 0)\ (x + \varepsilon B) \cap \operatorname{aff}(S) \subseteq S\}$$ – релативна унутрашњост скупа S

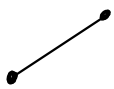
$$\operatorname{relbd} S := \operatorname{cl}(S) \setminus \operatorname{relint}(S)$$ – релативна граница скупа S

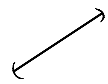
Нпр.



$\operatorname{int} S = \emptyset$

$\operatorname{cl} S =$ 

$\operatorname{bd} S =$ 

$\operatorname{relint} S =$ 

$\operatorname{relbd} =$