

1. Израчунати

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}} dx.$$

2. Испитати апсолутну и условну конвергенцију следећих редова

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}, \quad (b) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^{\frac{3}{4}} + (-1)^{3n}}.$$

3. Дата је функција

$$f(x) = \frac{1+2x}{(1-2x)^3}.$$

(a) Развити функцију у Маклоренов ред.

(b) Одредити област конвергенције добијеног степеног реда.

(в) Израчунати суму $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{2^n}$.

РЕШЕЊА

1. Једини сингуларитет датог несвојственог интеграла је $+\infty$. Како је

$$\frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}} \sim \frac{1}{x^2}, \quad x \rightarrow \infty,$$

то дати интеграл конвергира па га можемо рачунати.

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}} dx &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}} dx = \left[\begin{array}{l} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} = t \\ x = \frac{\sqrt{3}\operatorname{tg} t - 1}{2} \\ dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt \\ x = -\frac{1}{2} \rightarrow t = 0 \\ x = +\infty \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right] \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 t}}{\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg} t + 1}{2} \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^2 t + 1}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{\frac{\sqrt{3} \sin t + 1}{2} \cdot \frac{1}{\cos t}} dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{3} \sin t + \cos t} dt = \left[\begin{array}{l} p = \operatorname{tg} \frac{t}{2} \\ t = 2 \operatorname{arctg} p \\ dt = \frac{2dp}{1+p^2} \\ \sin t = \frac{2p}{1+p^2} \\ \cos t = \frac{1-p^2}{1+p^2} \\ t = 0 \rightarrow p = 0 \\ t = \frac{\pi}{2} \rightarrow p = 1 \end{array} \right] = 2 \int_0^1 \frac{\frac{2}{1+p^2}}{\frac{2\sqrt{3}p}{1+p^2} + \frac{1-p^2}{1+p^2}} dp \\ &= -4 \int_0^1 \frac{1}{p^2 - 2\sqrt{3}p - 1} dp = -4 \int_0^1 \frac{1}{(p - \sqrt{3} - 2)(p - \sqrt{3} + 2)} dp \\ &= - \int_0^1 \left(\frac{1}{p - \sqrt{3} - 2} - \frac{1}{p - \sqrt{3} + 2} \right) dp = \ln \left| \frac{p - \sqrt{3} + 2}{p - \sqrt{3} - 2} \right| \Big|_0^1 \\ &= \ln \frac{3 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} - \ln \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \ln \frac{(3 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} \end{aligned}$$

Други начин: Ојлерова смена $\sqrt{x^2+x+1} = t - x \dots$

Трећи начин: Смена $\frac{2x+1}{\sqrt{3}} = \sinh t \dots$

2. (а) Дати ред је ред са позитивним члановима. Означимо $a_n = \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}$. Како је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n \sqrt[n]{n}}}{e^{n^2 \cdot \frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{e}} = 1 \neq 0,$$

то дати ред дивергира јер није испуњен неопходан услов конвергенције.

(б) Означимо $a_n = \frac{\cos(n\pi)}{n^{\frac{3}{4}+(-1)^{3n}}} = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}+(-1)^n}}$. Искористили смо да је $\cos(n\pi) = (-1)^n$ и $(-1)^{3n} = (-1)^n$.

Апсолутна конвергенција:

$$|a_n| = \frac{1}{n^{\frac{3}{4}+(-1)^n}} \geq \frac{1}{n^{\frac{3}{4}+1}} \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}} n \rightarrow \infty,$$

па дати ред не конвергира апсолутно (на основу првог и другог проедбеног критеријума).

Условна конвергенција:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}+(-1)^n}} = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}}} \sim \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}}\right) = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}} - \frac{1}{n^{\frac{6}{4}}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Ред $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}}$ конвергира на основу Лајбницевог критеријума, а ред $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{6}{4}}}$ конвергира јер је $\frac{3}{2} > 1$, па дати ред конвергира условно.

3. (а) Користимо познати развој

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n,$$

за $\alpha = -3$. Приметимо да је

$$\binom{-3}{n} = \frac{(-3)(-4)(-5) \cdots (-(n+1))(-(n+2))}{n!} = \frac{(-1)^n (n+2)!}{2n!} = \frac{(-1)^n (n+2)(n+1)}{2}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+2x)(1-2x)^{-3} = (1+2x) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-3}{n} (-2x)^n \\ &= (1+2x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)(n+1)}{2} \cdot (-1)^n \cdot 2^n \cdot x^n \\ &= (1+2x) \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) 2^{n-1} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) 2^{n-1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) 2^n x^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) 2^{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)n 2^{n-1} x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} ((n+2)(n+1) + (n+1)n) 2^{n-1} x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 2^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 2^n x^n \end{aligned}$$

(б) Означимо $a_n = (n+1)^2 2^n$. Како је

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sqrt[n]{(n+1)^2}} = \frac{1}{2},$$

то је $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \subseteq D$. Када убацимо $x = -\frac{1}{2}$ и $x = \frac{1}{2}$ у добијени степени ред, добијамо бројне редове $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)^2$ и $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2$ који дивергирају, па је коначно тражена област конвергенције $D = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

(в) Приметимо

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{2^n},$$

па је тражена сума

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{2^n} = f\left(\frac{1}{4}\right) - 1 - 2 = 9.$$