

1. У зависности од реалног параметра $a \in (1, 2)$ израчунати

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^a(x) \sin^{4-2a} \left(\frac{x}{2} \right) \operatorname{tg}(x) dx.$$

2. Испитати условну и апсолутну конвергенцију следећих редова:

$$(a) \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + (-1)^n}, \quad (б) \sum_{n=1}^{+\infty} \sin \left(\frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n}.$$

3.

(а) Развити функцију $f(x) = \cosh x$ у Фуријеов ред на интервалу $[-\pi, \pi]$.

(б) Израчунати суму $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 + 1}$.

РЕШЕЊА

1.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^a(x) \sin^{4-2a} \left(\frac{x}{2} \right) \operatorname{tg}(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^a(x) \left(\sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) \right)^{2-a} \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{a-1}(x) \left(\frac{1 - \cos x}{2} \right)^{2-a} \sin x dx \\ &= \left[\begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ x = 0 \rightarrow t = 1 \\ x = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 0 \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{2^{2-a}} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{2-a} dt \\ &= \frac{1}{2^{2-a}} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{3-a-1} dt \\ &= \frac{1}{2^{2-a}} B(a, 3-a) \\ &= \frac{1}{2^{2-a}} \frac{\Gamma(a)\Gamma(3-a)}{\Gamma(a+3-a)} \\ &= \frac{1}{2^{2-a}} \frac{\Gamma(a)(2-a)(1-a)\Gamma(1-a)}{2!} \\ &= \frac{(2-a)(1-a)}{2^{3-a}} \cdot \frac{\pi}{\sin(a\pi)} \end{aligned}$$

2. (а) Означимо $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + (-1)^n}$. Како је

$$|a_n| = \frac{1}{\sqrt{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + (-1)^n} > \frac{1}{\sqrt{n} - 1} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

и ред $\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ дивергира, то дати ред не конвергира апсолутно. Испитајмо условну конвергенцију. Не можемо применити Лајбницов критеријум на дати ред јер $\frac{1}{\sqrt{[\frac{n}{2}] + (-1)^n}}$ не опада.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{[\frac{n}{2}] + (-1)^n}} \\ &\sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} \\ &\sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) \\ &= \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{2}}}$ конвергира на основу Лајбницовог критеријума, али ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ дивергира, па дати ред не конвергира ни условно.

(б) Означимо $a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}$. Како је $a_n > 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$, у питању је ред са позитивним члановима па је условна уједно и апсолутна конвергенција. Имамо

$$a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n^3},$$

па како $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ конвергира, то и дати ред конвергира апсолутно.

3. Можемо користити особине хиперболичких функција (нпр. $(\sinh x)' = \cosh x$ итд.), а можемо и искористити дефиницију $f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Одредимо коефицијенте Фуријеовог реда.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \frac{1}{\pi} (e^x - e^{-x}) \Big|_0^{\pi} = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi},$$

$b_n = 0$ јер је $f(x)$ парна,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cos(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \underbrace{(e^x + e^{-x}) \cos(nx)}_I dx \\ &= \left[\begin{array}{ll} u = \cos(nx) & dv = (e^x + e^{-x}) dx \\ du = -n \sin(nx) dx & v = e^x - e^{-x} \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\cos(nx)(e^x - e^{-x}) \Big|_0^{\pi} + n \int_0^{\pi} (e^x - e^{-x}) \sin(nx) dx \right) \\ &= \frac{(-1)^n (e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi} + \frac{n}{\pi} \int_0^{\pi} (e^x - e^{-x}) \sin(nx) dx \\ &= \left[\begin{array}{ll} u = \sin(nx) & dv = (e^x - e^{-x}) dx \\ du = n \cos(nx) dx & v = e^x + e^{-x} \end{array} \right] \\ &= \frac{(-1)^n (e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi} + \frac{n}{\pi} \left(\sin(nx)(e^x + e^{-x}) \Big|_0^{\pi} - n \int_0^{\pi} (e^x + e^{-x}) \cos(nx) dx \right) \\ &= \frac{(-1)^n (e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi} - \frac{n^2}{\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} (e^x + e^{-x}) \cos(nx) dx}_I \end{aligned}$$

Дакле,

$$\frac{1}{\pi}I = \frac{(-1)^n(e^\pi - e^{-\pi})}{\pi} - \frac{n^2}{\pi}I$$

$$I = (-1)^n(e^\pi - e^{-\pi}) - n^2I,$$

па је

$$I = \frac{(-1)^n(e^\pi - e^{-\pi})}{1 + n^2}.$$

Коначно,

$$a_n = \frac{1}{\pi}I = \frac{(-1)^n(e^\pi - e^{-\pi})}{\pi(1 + n^2)}.$$

Одавде је тражени Фуријеов ред

$$\begin{aligned} S_f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \\ &= \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(e^\pi - e^{-\pi})}{\pi(1 + n^2)} \cdot \cos(nx) \end{aligned}$$

(б) Означимо тражену суму са

$$A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 + 1}.$$

Израчунајмо $S_f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Имамо да је

$$\cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n \text{ непарно} \\ (-1)^{\frac{n}{2}}, & n \text{ парно} \end{cases}$$

па је

$$S_f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}(e^\pi - e^{-\pi})}{\pi(1 + (2n)^2)} \cdot (-1)^n = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi} + \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi} \cdot A.$$

Знамо да је

$$S_f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{f\left(\frac{\pi}{2}^+\right) + f\left(\frac{\pi}{2}^-\right)}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}}{2},$$

па је тражена сума

$$A = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}}{e^\pi - e^{-\pi}} - \frac{1}{2}.$$