

1. Израчунати интеграл $\int_{-10\pi}^{10\pi} \frac{\sin|\frac{x}{2}| + \sin\frac{x}{2}}{\cos x + 2} dx$.

2. Испитати условну и апсолутну конвергенцију следећих редова:

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \cdot \ln n}{(n-1)!}, \quad (b) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}.$$

3. Дат је степени ред $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{(n-1)!}$.

(a) Одредити његову област конвергенције.

(б) Наћи функцију $f(x)$ чији је ово степени ред.

(в) Израчунати $\int_0^1 f(x) dx$.

РЕШЕЊА

1.

$$\begin{aligned} \int_{-10\pi}^{10\pi} \frac{\sin|\frac{x}{2}| + \sin\frac{x}{2}}{\cos x + 2} dx &= \underbrace{\int_{-10\pi}^{10\pi} \frac{\sin|\frac{x}{2}|}{\cos x + 2} dx}_{\text{парна}} + \underbrace{\int_{-10\pi}^{10\pi} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos x + 2} dx}_{\text{непарна}} = \\ &= 2 \int_0^{10\pi} \frac{\sin|\frac{x}{2}|}{\cos x + 2} dx = 2 \underbrace{\int_0^{10\pi} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos x + 2} dx}_{4\pi \text{ периодична}} = 2 \int_{-4\pi}^{6\pi} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos x + 2} dx = \\ &= 2 \underbrace{\int_{-4\pi}^{4\pi} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos x + 2} dx}_{\text{непарна}} + 2 \underbrace{\int_{4\pi}^{6\pi} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos x + 2} dx}_{4\pi \text{ периодична}} = \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} + 2} dx = 2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2} + 1} dx = \\ &= \left[\begin{array}{l} t = \cos\frac{x}{2} \\ dt = -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} dx \\ x = 0 \rightarrow t = 1 \\ x = 2\pi \rightarrow t = -1 \end{array} \right] = \\ &= 4 \int_{-1}^1 \frac{dt}{2t^2 + 1} = 4 \int_{-1}^1 \frac{dt}{(t\sqrt{2})^2 + 1} = \\ &= \left[\begin{array}{l} p = t\sqrt{2} \\ dp = \sqrt{2} dt \\ t = -1 \rightarrow p = -\sqrt{2} \\ t = 1 \rightarrow p = \sqrt{2} \end{array} \right] = \\ &= \frac{4}{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{dp}{p^2 + 1} = 2\sqrt{2} \arctg p \Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \arctg \sqrt{2} \end{aligned}$$

2. (a) Означимо $a_n = \frac{n \cdot \ln n}{(n-1)!}$. Како је

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1) \cdot \ln(n+1)}{n!}}{\frac{n \cdot \ln n}{(n-1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\ln(n(1 + \frac{1}{n}))}{\ln n} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \cdot \frac{\ln n \cdot \ln(1 + \frac{1}{n})}{\ln n} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 < 1, \end{aligned}$$

то дати ред конвергира на основу Даламберовог теста (и то апсолутно јер је у питању ред са позитивним члановима).

(б) Означимо $a_n = \frac{1}{\ln n}$. Како a_n опада и тежи нули, то дати ред конвергира условно на основу Лајбницевог критеријума. Са друге стране, он не конвергира апсолутно јер ред $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ дивергира.

(Задатак са вежби: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln^q n}$ конвергира за $p > 1$ или $p = 1$ и $q > 1$, а овде је $p = 0$.)

3. (а) Имамо да је

$$a_{2n-1} = \frac{1}{(n-1)!}, \quad a_{2n} = 0,$$

где је $\sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n$ дати ред. Због тога радијус конвергенције рачунамо формулом

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n-1]{\frac{1}{(n-1)!}}} = +\infty,$$

па је област конвергенције датог реда $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

(б)

$$\begin{aligned} \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{(n-1)!} &= x \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^{2n-2}}{(n-1)!} \\ &= x \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(x^2)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= x \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} \\ &= x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} - 1 - x^2 \right) \\ &= x(e^{x^2} - 1 - x^2) \\ &= xe^{x^2} - x - x^3 \end{aligned}$$

(в)

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (xe^{x^2} - x - x^3) dx = \frac{1}{2}e^{x^2} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3 \Big|_0^1 = \frac{2e-5}{4}.$$

(Други начин: ред је равномерно конвергентан на целом \mathbb{R} па смо га могли интегралити члан по члан.)