Писмени испит из Анализе 2 за И смер **ЈАНУАР 2 2022**

1. Израчунати запремину обртног тела насталог ротацијом функције $f(x) = \sqrt{\dfrac{x\ln(1+x)}{x^4+8x^2+16}}$, $x \in [0,1]$ око x-осе.

2. Испитати конвергенцију следећих интеграла:

$$\text{(а)} \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4-x}}\mathrm{d}x, \qquad \text{(б)} \int_2^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^2\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}\mathrm{d}x.$$

3. Дат је степени ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n(n+2)}$.

(а) Одредити његову област конвергенције.
(б) Наћи функцију чији је ово степени ред.
(в) Израчунати $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n(n+2)}$.

РЕШЕЊА

1.

$$\begin{aligned}
V &= \pi\int_0^1 \big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^1 \frac{x\ln(1+x)}{x^4+8x^2+16}\mathrm{d}x = \pi\int_0^1 \frac{x\ln(1+x)}{(x^2+4)^2}\mathrm{d}x \\
&= \begin{bmatrix} u = \ln(1+x) & \mathrm{d}v = \frac{x}{(x^2+4)}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{1+x} & v = -\frac{1}{2(x^2+4)} \end{bmatrix} = \pi\left(-\frac{\ln(1+x)}{2(x^2+4)}\bigg|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+4)}\right) \\
&= -\frac{\pi\ln 2}{10} + \frac{\pi}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{5(x+1)} + \frac{1-x}{5(x^2+4)}\right)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\pi\ln 2}{10} + \frac{\pi}{10}\ln(x+1)\bigg|_0^1 + \frac{\pi}{10}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4} - \frac{\pi}{10}\int_0^1 \frac{x}{x^2+4}\mathrm{d}x \\
&= \cancel{-\frac{\pi\ln 2}{10}} + \cancel{\frac{\pi\ln 2}{10}} + \frac{\pi}{20}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}\bigg|_0^1 - \frac{\pi}{20}\ln(x^2+4)\bigg|_0^1 \\
&= \frac{\pi\mathrm{arctg}\frac{1}{2}}{20} - \frac{\pi\ln 5}{20} + \frac{\pi\ln 4}{20} = \frac{\pi}{20}\left(\mathrm{arctg}\frac{1}{2} + \ln\frac{4}{5}\right)
\end{aligned}$$

2. (а) Сингуларитети датог интеграла су 1 и $+\infty$ па поделимо интеграл тако да у сваком интегралу буде тачно један сингуларитет:

$$\underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4-x}}\mathrm{d}x}_{I} = \underbrace{\int_1^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4-x}}\mathrm{d}x}_{I_1} + \underbrace{\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4-x}}\mathrm{d}x}_{I_2}$$

<u>Конвергенција I_1</u>: Уведимо смену да сингуларитет пребацимо из 1 у 0.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x(x^3-1)}}\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t = x-1 \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \\ x=1 \longrightarrow t=0 \\ x=2 \longrightarrow t=1 \end{bmatrix} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[3]{(t+1)((t+1)^3-1)}} \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[3]{(t+1)(t^3+3t^2+3t+1-1)}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[3]{(t+1)t(t^2+3t+3)}}
\end{aligned}$$

Како је

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(t+1)t(t^2+3t+3)}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{1\cdot t\cdot 3}} \sim \frac{1}{t^{\frac{1}{3}}},\ t \to 0,$$

а интеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}t$ конвергира, то I_1 конвергира на основу другог поредбеног критеријума.

Конвергенција I_2:
Како је

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x(x^3-1)}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}},\ x \to +\infty,$$

а интеграл $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}\mathrm{d}x$ конвергира, то I_2 конвергира на основу другог поредбеног критеријума.

Коначно, како оба интеграла I_1 и I_2 конвергирају, то конвергира и дати интеграл I.

(б) Интеграл има само сингуларитет у ∞ (потенцијални сингуларитети су нуле функције $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, али то су бројеви облика $\frac{1}{k^2\pi^2}$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ и ниједан од тих бројева није у области интеграције $[2, +\infty)$ па самим тим то нису сингуларитети).

Како је

$$\frac{\ln(1+x)}{x^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} \sim \frac{\ln x}{x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}\,(\ln x)^{-1}}, \quad x \to +\infty$$

и знамо да $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}\,(\ln x)^{-1}}\mathrm{d}x$ конвергира (задатак са вежби каже да интеграл $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^p \ln^q x}\mathrm{d}x$ конвергира за $p > 1$ или $p = 0$ и $q > 1$, а овде је $p = \frac{3}{2} > 1$), па на основу другог поредбеног критеријума конвергира и дати интеграл.

3. (а) Означимо $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+2)}$. Како је

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n(n+2)}}{\frac{1}{(n+1)(n+3)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+3)}{n(n+2)} = 1,$$

то је $(-1,1) \subset D$. Испитајмо конвергенцију у тачкама ± 1.

конвергенција за $x = 1$: низ $\left(\frac{1}{n(n+2)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ опада и тежи нули, па на основу Лајбницовог теста конвергира ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+2)}$.

конвергенција за $x = -1$: како је $\frac{1}{n(n+2)} \sim \frac{1}{n^2}$, $n \to +\infty$ то ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot(-1)^n}{n(n+2)} = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+2)}$ конвергира на основу другог поредбеног критеријума.

Дакле, област конвергенције датог степеног реда је $D = [-1, 1]$.

(б) Означимо $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n(n+2)}$. Степени ред је равномерно конвергентан у својој области дефинисаности па га можемо диференцирати члан по члан на D.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n(n+2)}\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cancel{n}x^{n-1}}{\cancel{n}(n+2)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{n-1}}{n+2}\\
&= \frac{1}{x^3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{n+2}}{n+2} = \frac{1}{x^3}\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = \frac{1}{x^3}\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}\\
&= \frac{1}{x^3}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} - \frac{(-1)^{1+1}x^1}{1} - \frac{(-1)^{2+1}x^2}{2}\right) = \frac{1}{x^3}\left(\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}\right)\\
&= \frac{\ln(1+x)}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x}
\end{aligned}$$

Претходни рачун важи за $x \neq 0$ (да бисмо могли да извучемо фактор $\frac{1}{x^3}$).
Сада је

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\frac{\ln(1+t)}{t^3} - \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2t}\right)\mathrm{d}t$$

Лако се провери да је $f(0)=0$ (убацимо $x=0$ у степени ред). Интеграл $\int_0^x \left(\frac{\ln(1+t)}{t^3}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{2t}\right)\mathrm{d}t$ ћемо посебно рачунати. Израчунајмо прво неодређени интеграл $I=\int\left(\frac{\ln(1+t)}{t^3}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{2t}\right)\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{t}+\frac{1}{2}\ln|t|+\int\frac{\ln(1+t)}{t^3}\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} u=\ln(1+t) & \mathrm{d}v=\frac{1}{t^3}\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}t}{1+t} & v=\frac{-1}{2t^2}\end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{t}+\frac{\ln|t|}{2}-\frac{\ln(1+t)}{2t^2}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(1+t)t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{t}+\frac{\ln|t|}{2}-\frac{\ln(1+t)}{2t^2}+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{t}+\cancel{\frac{\ln|t|}{2}}-\frac{\ln(1+t)}{2t^2}+\frac{\ln(t+1)}{2}-\cancel{\frac{\ln|t|}{2}}-\frac{1}{2t} = \frac{(t^2-1)\ln(t+1)+t}{2t^2}
\end{aligned}$$

Одавде је

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0)+\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t = \int_0^x\left(\frac{\ln(1+t)}{t^3}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{2t}\right)\mathrm{d}t = \left.\frac{(t^2-1)\ln(t+1)+t}{2t^2}\right|_0^x \\
&= \frac{(x^2-1)\ln(x+1)+x}{2x^2}-\lim_{t\to 0+}\frac{(t^2-1)\ln(t+1)+t}{2t^2} \\
&\underset{\frac{0}{0}}{\overset{L.P.}{=}} \frac{(x^2-1)\ln(x+1)+x}{2x^2}-\lim_{t\to 0+}\frac{2t\ln(t+1)+\frac{t^2-1}{t+1}+1}{4t} \\
&= \frac{(x^2-1)\ln(x+1)+x}{2x^2}-\lim_{t\to 0+}\frac{2t\ln(t+1)+\frac{t^2-1}{t+1}+1}{4t} \\
&= \frac{(x^2-1)\ln(x+1)+x}{2x^2}-\lim_{t\to 0+}\left(\frac{\ln(t+1)}{2}+\frac{t^2+t}{4t(t+1)}\right) \\
&= \frac{(x^2-1)\ln(x+1)+x}{2x^2}-\lim_{t\to 0+}\frac{t+1}{4(t+1)} \\
&= \frac{(x^2-1)\ln(x+1)+x}{2x^2}-\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Дакле,

$$f(x)=\begin{cases}\frac{(x^2-1)\ln(x+1)+x}{2x^2}-\frac{1}{4} & x\in[-1,0)\cup(0,1] \\ 0, & x=0\end{cases}$$

(в)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n n(n+2)} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{n(n+2)} = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{n(n+2)} = -f\left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= -\left(\frac{\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2-1\right)\ln\left(-\frac{1}{2}+1\right)-\frac{1}{2}}{2\left(-\frac{1}{2}\right)^2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4}-\frac{3}{2}\ln 2
\end{aligned}$$