1. Израчунати интеграл $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

2. Испитати апсолутну конвергенцију следећих редова:

$$\text{(а)}\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n^2+1)}, \qquad \text{(б)}\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{2^n n^2}.$$

3. Функцију $f(x)=x^3$ развити у Фуријеов ред на $(-\pi,\pi)$ и израчунати $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(6-\pi^2(2n+1)^2\right)}{(2n+1)^3}$.

РЕШЕЊА

1.

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2+1}\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} x=\sin t \\ \mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t\end{bmatrix} = \int \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin^2 t+1}\cos t\mathrm{d}t = \int \frac{\cos^2 t}{2-\cos^2 t}\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} p=\mathrm{tg}t \\ \mathrm{d}t=\frac{1}{p^2+1}\mathrm{d}p \\ \cos^2 t=\frac{1}{p^2+1}\end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{p^2+1}}{2-\frac{1}{p^2+1}}\cdot\frac{1}{p^2+1}\mathrm{d}p = \int\frac{1}{(p^2+1)(2p^2+1)}\mathrm{d}p = 2\int\frac{\mathrm{d}p}{2p^2+1}-\int\frac{\mathrm{d}p}{p^2+1} =$$

$$= \sqrt{2}\mathrm{arctg}\left(p\sqrt{2}\right)-\mathrm{arctg}p+c = \sqrt{2}\mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}(\arcsin x)\sqrt{2}\right)-\mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}(\arcsin x)\right)+c =$$

$$= \sqrt{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)-\arcsin x+c$$

2. (а) Означимо $a_n=\dfrac{(-1)^n}{\ln(n^2+1)}$. Како је

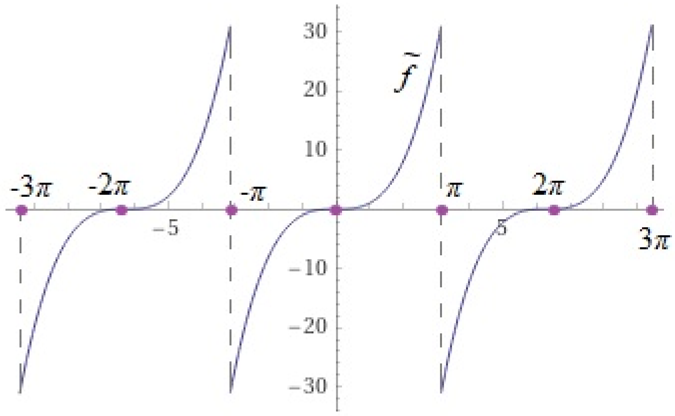
$$|a_n| = \frac{1}{\ln(n^2+1)} \sim \frac{1}{\ln(n^2)} = \frac{1}{2\ln n} \sim \frac{1}{\ln n}, \quad n\to+\infty,$$

и знамо да ред $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\ln n}$ дивергира јер $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^p\ln^q n}$ конвергира за $p>1$ или $p=1$ и $q>1$ (овде је $p=0,\ q=1$), то дати ред не конвергира апсолутно на основу другог поредбеног критеријума.

Са друге стране, ред конвергира условно. Заиста, низ $\left(\dfrac{1}{\ln(n^2+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ монотоно опада и тежи 0, па на основу Лајбницовог теста дати ред конвергира.

(б) Означимо $a_n=\dfrac{n!}{2^n n^2}$. Како је $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=+\infty\neq 0$, то дати ред дивергира јер није испуњен неопходан услов конвергенције. (Исти резултат се могао добити коришћењем Даламберовог теста).

3. Проширимо рестрикцију функције $f(x)=x^3$ на $(-\pi,\pi)$ на цео скуп $\mathbb{R}$ тако да буде 2π-периодична као на слици. Означимо то продужење са $\tilde{f}$.



Одредимо сада коефицијенте $a_0,\ a_n$ и b_n.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\mathrm{d}x = 0$$

јер је функција $\tilde{f}(x)$ непарна на $(-\pi, \pi)$.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\cos(nx)\mathrm{d}x = 0$$

јер је функција $\tilde{f}(x)\cos(nx)$ непарна на $(-\pi, \pi)$.

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\sin(nx)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^3\sin(nx)\mathrm{d}x \\
&= \begin{bmatrix} u = x^3 & \mathrm{d}v = \sin(nx)\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = 3x^2\mathrm{d}x & v = -\frac{1}{n}\cos(nx) \end{bmatrix} = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x^3}{n}\cos(nx)\Big|_0^{\pi} + \frac{3}{n}\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)\mathrm{d}x\right) \\
&= \begin{bmatrix} u = x^2 & \mathrm{d}v = \cos(nx)\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x & v = \frac{1}{n}\sin(nx) \end{bmatrix} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^3(-1)^{n+1}}{n} + \frac{3}{n}\left(\underbrace{\frac{x^2}{n}\sin(nx)\Big|_0^{\pi}}_{0} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\mathrm{d}x\right)\right) \\
&= \begin{bmatrix} u = x & \mathrm{d}v = \sin(nx)\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x & v = -\frac{1}{n}\cos(nx) \end{bmatrix} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^3(-1)^{n+1}}{n} - \frac{6}{n^2}\left(-\frac{x}{n}\cos(nx)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\underbrace{\int_0^{\pi}\cos(nx)\mathrm{d}x}_{0}\right)\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^3(-1)^{n+1}}{n} - \frac{6}{n^2}\cdot\frac{\pi(-1)^{n+1}}{n}\right) = \frac{2(-1)^n(6-\pi^2n^2)}{n^3}
\end{aligned}$$

Фуријеов ред дате функције је

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^n(6-\pi^2n^2)}{n^3}\sin(nx).$$

Да бисмо израчунали $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(6-\pi^2(2n+1)^2\right)}{(2n+1)^3}$, одредимо шта је $S_f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Са једне стране, пошто је f непрекидна у $x = \frac{\pi}{2}$, то је

$$S_f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{f\left(\frac{\pi}{2}^+\right) + f\left(\frac{\pi}{2}^-\right)}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 = \frac{\pi^3}{8}.$$

Са друге стране,

$$\begin{aligned}
S_f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n(6-\pi^2 n^2)}{n^3} \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{2n+1}(6-\pi^2(2n+1)^2)}{(2n+1)^3} \cdot (-1)^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-2(6-\pi^2(2n+1)^2)}{(2n+1)^3} \cdot (-1)^n
\end{aligned}$$

јер је

$$\sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}}, & n \text{ непарно} \\ 0, & n \text{ парно} \end{cases}$$

Дакле,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-2(6-\pi^2(2n+1)^2)}{(2n+1)^3} \cdot (-1)^n = \frac{\pi^3}{8},$$

одакле је

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(6-\pi^2(2n+1)^2\right)}{(2n+1)^3} = -\frac{\pi^3}{16},$$

а нама се тражи сума од 1 до $+\infty$ и то је

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(6-\pi^2(2n+1)^2\right)}{(2n+1)^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(6-\pi^2(2n+1)^2\right)}{(2n+1)^3} - \frac{(-1)^0 \left(6-\pi^2(2\cdot 0+1)^2\right)}{(2\cdot 0+1)^3} = -\frac{\pi^3}{16} - 6 + \pi^2.$$