

АНАЛИЗА 2

2021/2022

И смер

асистент: *Милица Јовановић*

e-mail : *milica-jovanovic@math.rs*

кабинет: 824

Садржај

Неодређени интеграли	1
Интеграција рационалних функција	20
Интеграл облика $\int R(\sin x, \cos x) dx$	28
Интеграл облика $\int R(\sqrt{ax^2+bx+c}, x) dx$	32
Интеграл облика $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx$	42
Интеграл облика $\int R(x, \sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx$	44
Чебишевљеви интеграл	46
Одређени интеграл	52
Примена одређених интеграла	78
Несвојствени интеграл	95
Гама и Бета функције	119
Редови	125
Бројни редови	125
Редови са позитивним члановима	136
Редови са произвољним члановима	157
Функционални редови	167
Степени редови	169
Фурјеови редови	193

Неодређени интеграл

Дефиниција Нека је $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ и нека је

$F: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилна функција т.д. је $F'(x) = f(x)$, за свако $x \in (a, b)$. Тада функцију F називамо примитивном функцијом функције f .

Пример Ако је $f(x) = 3x^2$, онда је једна њена примитивна функција $F(x) = x^3$.

Приметимо и $F_1(x) = x^3 + 5$, $F_2(x) = x^3 - 7$, ... су такође примитивне функције.

Штавише,

F примитивна ф-ја за $f \Rightarrow (\forall c \in \mathbb{R}) F + c$ је такође примитивна

Зашто, $(F + c)' = F' + 0 = f$.

Дефиниција Нека је F једна примитивна ф-ја за f . Тада се фамилија $\{F + c \mid c \in \mathbb{R}\}$ зове неодређени интеграл функције f и означава се са $\int f(x) dx$.

Пишемо: $\int f(x) dx = F(x) + c$

Стаб Нека је F примитивна функција функције f .

Тада важи:

$$(1) \int f'(x) dx = F(x) + C;$$

$$(2) \int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx, \quad k \in \mathbb{R};$$

$$(3) \int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

Теорема (Смена променливе)

$$\int f(x) dx \stackrel{x=\varphi(t)}{=} \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

Теорема (Парцијална интеграција)

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

$f(x)$	$\int f(x) dx$
$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
e^x	$e^x + C$
$a^x, a > 0, a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$

$f(x)$	$\int f(x) dx$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctg x + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}$	$\ln x + \sqrt{x^2 \pm 1} + C$
$\frac{1}{x^2 - 1}$	$\frac{1}{2} \ln \left \frac{1-x}{1+x} \right + C$

1. (a) $\int x(\sqrt{x}+1)dx$; (б) $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$; (в) $\int \frac{x^2+x+1}{x} dx$.

решение

$$\begin{aligned} (a) \int x(\sqrt{x}+1)dx &= \int \left(x^{\frac{3}{2}}+x\right) dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx + \int x dx = \\ &= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + \frac{x^2}{2} + C = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2} x^2 + C \end{aligned}$$

корично!

$$\begin{aligned} (б) \int \frac{x^2}{x^2+1} dx &= \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \\ &= x - \arctg x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (в) \int \frac{x^2+x+1}{x} dx &= \int \left(x+1+\frac{1}{x}\right) dx = \int x dx + \int 1 dx + \int \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x| + C \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2. (a) $\int e^{7x-5} dx$; (б) $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$; (в) $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$, $a \neq 0$

решение (a) $\int e^{7x-5} dx = \left[\begin{array}{l} t=7x-5 /' \\ dt=7dx \\ dx=\frac{1}{7} dt \end{array} \right] = \int e^t \cdot \frac{1}{7} dt =$

$$= \frac{1}{7} e^t + C = \frac{1}{7} e^{7x-5} + C$$

$$(б) \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \int \frac{dx}{a^2\left(\frac{x^2}{a^2}+1\right)} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} = \left[\begin{array}{l} t=\frac{x}{a} /' \\ dt=\frac{1}{a} dx \\ dx=a dt \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{a}{t^2+1} dt = \frac{1}{a} \arctg t + C = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C$$

лучше на
 $\int \frac{dx}{x^2+1}$
из таблицы

$$(b) \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \int \frac{dx}{a^2 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right)} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a} \right)^2 - 1} = \left[\begin{array}{l} t = \frac{x}{a} \\ dt = \frac{1}{a} dx \\ dx = a dt \end{array} \right] =$$

мы на
 $\int \frac{dx}{x^2 - 1}$ из
 таблицы

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{a}{t^2 - 1} dt = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-t}{1+t} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{1 - \frac{x}{a}}{1 + \frac{x}{a}} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a-x}{a+x} \right| + C \quad \square$$

Из нашей таблицы се може добити:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

3. (a) $\int \frac{dx}{2x^2 + 1}$; (б) $\int \frac{dx}{x^2 + x + 1}$; (в) $\int \frac{x}{1+x^2} dx$

решение

$$(a) \int \frac{dx}{2x^2 + 1} = \int \frac{dx}{(x\sqrt{2})^2 + 1} = \left[\begin{array}{l} t = x\sqrt{2} \\ dx = \frac{1}{\sqrt{2}} dt \end{array} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{t^2 + 1} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} t + C = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}(x\sqrt{2}) + C$$

$$(5) \int \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1} = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} =$$

ог прва два
правилно
квадрат
диференцијала

Наменићемо на
облик $A^2 + 1$

$$= \int \frac{dx}{\frac{3}{4} \left(\frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{3}{4}} + 1 \right)} = \frac{4}{3} \int \frac{dx}{\left(\frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right)^2 + 1} =$$

$$= \frac{4}{3} \int \frac{dx}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1} = \left[t = \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right. \\ \left. dx = \frac{\sqrt{3}}{2} dt \right] =$$

$$= \frac{4}{3} \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{t^2 + 1} dt = \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} t + c = \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$$

Напомена: унесмо $x^2 + x + 1$ је могао бити
било који квадратни полином који
нема реалних нула и постојак он
може бити.

$$(6) \int \frac{x}{x^2+1} dx = \left[t = x^2+1 \right. \\ \left. dt = 2x dx \right. \\ \left. x dx = \frac{1}{2} dt \right] = \int \frac{\frac{1}{2} dt}{t} = \frac{1}{2} \ln |t| + c =$$

принекујемо
 $(x^2+1)' = 2x$, а
 x се појављује
у бројоцу

$$= \frac{1}{2} \ln |x^2+1| + c = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c.$$

увек је
позитивно

4. (a) $\int \frac{\ln x}{x} dx$; (б) $\int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)}$

решение

$$(a) \int \frac{\ln x}{x} dx = \left[\begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{array} \right] = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C$$

примечание
 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$$(б) \int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} = \left[\begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t \cdot \ln t} = \left[\begin{array}{l} p = \ln t \\ dp = \frac{1}{t} dt \end{array} \right] =$$

$$= \int \frac{dp}{p} = \ln |p| + C = \ln |\ln t| + C = \ln |\ln(\ln x)| + C$$

5. (a) $\int x e^{-x^2} dx$; (б) $\int \sin^3 x$; (в) $\int \sin^4 x dx$; (г) $\int \operatorname{tg} x dx$.

решение

$$(a) \int x e^{-x^2} dx = \left[\begin{array}{l} t = -x^2 \\ dt = -2x dx \\ x dx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right] = -\frac{1}{2} \int e^t dt = -\frac{1}{2} e^t + C = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$$

$$(б) \int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx =$$

поскольку в данном случае
 берем (израз cos) $\cdot \sin x$,
 то делаем замену $t = \cos x$
 или
 (израз sin) $\cdot \cos x$, то
 делаем замену $t = \sin x$

$$= \left[\begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right] =$$

$$= - \int (1 - t^2) dt =$$

$$= \int (t^2 - 1) dt =$$

$$= \frac{t^3}{3} - t + C =$$

$$= \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C$$

$$(b) \int \sin^4 x dx = \int (\sin^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos^2 2x \right) dx =$$

$$= \frac{1}{4} x - \frac{1}{2} \underbrace{\int \cos 2x dx}_{I_1} + \frac{1}{4} \underbrace{\int \cos^2 2x dx}_{I_2} \quad (\star)$$

$$I_1 = \int \cos 2x dx = \left[\begin{array}{l} t=2x \\ dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int \cos t dt = \frac{1}{2} \sin 2x + C_1$$

смена $t=1/x$
↓

$$I_2 = \int \cos^2 2x dx = \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \int \cos 4x dx =$$

$$= \frac{1}{2} x + \frac{1}{8} \sin 4x + C_2$$

Вставляем в $\star$:

$$\int \sin^4 x dx = \frac{1}{4} x - \frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{4} I_2 =$$

$$= \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{2} C_1 + \frac{1}{8} x + \frac{1}{32} \sin 4x + \frac{1}{4} C_2 =$$

$$= \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C$$

$$(r) \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left[\begin{array}{l} t = \cos x \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right] =$$

$$= - \int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C$$



6. (a) $\int \operatorname{tg}^4 x \, dx$; (б) $\int \cos^7 x \sin^4 x \, dx$; (в) $\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} \, dx$

пешере

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \int \operatorname{tg}^4 x \, dx &= \left[\begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ x = \operatorname{arctg} t \quad /' \\ dx = \frac{1}{1+t^2} dt \end{array} \right] = \int \frac{t^4}{1+t^2} dt = \int \frac{t^4 - 1 + 1}{1+t^2} dt = \\
 &= \int \frac{(t^2-1)(t^2+1) + 1}{1+t^2} dt = \int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2} \right) dt = \\
 &= \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t + c = \\
 &= \frac{(\operatorname{tg} x)^3}{3} - \operatorname{tg} x + \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) + c \\
 &= \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(б)} \quad \int \cos^7 x \sin^4 x \, dx &= \int \sin^4 x \cdot (\cos^2 x)^3 \cdot \cos x \, dx = \\
 &= \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x)^3 \cos x \, dx = \left[\begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{array} \right] = \\
 &= \int t^4 (1 - t^2)^3 dt = \int t^4 (1 - 3t^2 + 3t^4 - t^6) dt = \\
 &= \int (t^4 - 3t^6 + 3t^8 - t^{10}) dt = \frac{1}{5} t^5 - \frac{3}{7} t^7 + \frac{3}{9} t^9 - \frac{1}{11} t^{11} + c = \\
 &= \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{3}{7} \sin^7 x + \frac{1}{3} \sin^9 x - \frac{1}{11} \sin^{11} x + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(в)} \quad \int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} \, dx &= \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{x} \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \\ \frac{1}{\sqrt{x}} dx = dt \end{array} \right] = \int \frac{\operatorname{arctg} t}{1+t^2} dt = \left[\begin{array}{l} p = \operatorname{arctg} t \\ dp = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right] = \\
 &= \int p \, dp = \frac{1}{2} p^2 + c = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 t + c = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 \sqrt{x} + c
 \end{aligned}$$

7. (a) $\int x e^x dx$; (б) $\int e^{\sqrt{x}} dx$; (в) $\int \ln x dx$

решение

$$(a) \int x e^x dx = \left[\begin{array}{l} u = x \\ du = dx \end{array} \quad \begin{array}{l} dv = e^x dx \\ v = e^x \end{array} \right] = x e^x - \int e^x dx = \\ = x e^x - e^x + C$$

$$(б) \int e^{\sqrt{x}} dx = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{x} \\ x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right] = \int 2t e^t dt \stackrel{(a)}{=} 2(t e^t - e^t) + C = \\ = 2\sqrt{x} e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C$$

$$(в) \int \ln x dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x} dx \end{array} \quad \begin{array}{l} dv = dx \\ v = x \end{array} \right] = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = \\ = x \ln x - x + C \quad \square$$

8. (a) $\int \arcsin x dx$; (б) $\int x \arctg x dx$

решение

$$(a) \int \arcsin x dx = \left[\begin{array}{l} u = \arcsin x \\ du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \end{array} \quad \begin{array}{l} dv = x dx \\ v = \frac{1}{2} x^2 \end{array} \right] =$$

$$= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left[\begin{array}{l} t = 1-x^2 \\ dt = -2x dx \\ x dx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right] =$$

$$= x \arcsin x + \underbrace{\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}}}_{\sqrt{t}} = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

$$(б) \int x \arctg x dx = \left[\begin{array}{l} u = \arctg x \\ du = \frac{1}{1+x^2} dx \end{array} \quad \begin{array}{l} dv = x dx \\ v = \frac{1}{2} x^2 \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C \quad \square$$

9. (a) $\int x^2 \arcsin x dx$ (JAH1 2021.); (б) $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$

решение

$$(a) \int x^2 \arcsin x dx = \left[\begin{array}{ll} u = \arcsin x & dv = x^2 dx \\ du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx & v = \frac{1}{3} x^3 \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \arcsin x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \arcsin x - \frac{1}{3} \int \frac{x^2 \cdot x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left[\begin{array}{l} 1-x^2 = t \\ x^2 = 1-t \\ 2x dx = -dt \\ x dx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \arcsin x - \frac{1}{3} \int \frac{(1-t) \cdot (-\frac{1}{2})}{\sqrt{t}} dt =$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \arcsin x + \frac{1}{6} \int \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \sqrt{t} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \arcsin x + \frac{1}{3} \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{9} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$(8) \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx = \left[\begin{array}{ll} u = \arcsin x & dv = \frac{1}{x^2} dx \\ du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx & v = -\frac{1}{x} \end{array} \right] =$$

$$= -\frac{\arcsin x}{x} + \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= -\frac{\arcsin x}{x} + \int \frac{x}{x^2\sqrt{1-x^2}} dx = \left[\begin{array}{l} t^2 = 1-x^2 \\ x^2 = 1-t^2 \\ x dx = -t dt \end{array} \right] =$$

$$= -\frac{\arcsin x}{x} - \int \frac{t dt}{(1-t^2)t} =$$

$$= -\frac{\arcsin x}{x} - \int \frac{dt}{1-t^2} = \boxed{\int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C}$$

$$= -\frac{\arcsin x}{x} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}} \right| + C \quad \square$$

10. (a) $\int x^\alpha \ln x dx$; (8) $\int \ln(2x^2+1) dx$.
 $\alpha \neq -1$

реши

$$(a) \int x^\alpha \ln x dx = \left[\begin{array}{ll} u = \ln x & dv = x^\alpha dx \\ du = \frac{1}{x} dx & v = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ln x - \frac{1}{\alpha+1} \int \frac{x^{\alpha+1}}{x} dx =$$

$$= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ln x - \frac{1}{\alpha+1} \int x^\alpha dx =$$

$$= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ln x - \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} + C$$

$$(8) \int \ln(2x^2+1) dx = \left[\begin{array}{ll} u = \ln(2x^2+1) & dv = dx \\ du = \frac{4x}{2x^2+1} dx & v = x \end{array} \right] =$$

$$= x \ln(2x^2+1) - 2 \int \frac{2x^2+1-1}{2x^2+1} dx =$$

$$= x \ln(2x^2+1) - 2 \int \left(1 - \frac{1}{2x^2+1} \right) dx =$$

$$= x \ln(2x^2+1) - 2x + 2 \int \frac{1}{2x^2+1} dx =$$

задача 3.(а)
на стр. 4.

$$= x \ln(2x^2+1) - 2x + \sqrt{2} \operatorname{arctg}(x\sqrt{2}) + C \quad \blacksquare$$

11. (a) $\int e^{\lambda x} \sin \beta x dx$; (8) $\int e^{\lambda x} \cos \beta x dx$; (b) $\int \cos(e^{\lambda x}) dx$

решение

$$(a) \int e^{\lambda x} \sin \beta x dx = \left[\begin{array}{ll} u = e^{\lambda x} & dv = \sin \beta x dx \\ du = \lambda e^{\lambda x} dx & v = -\frac{1}{\beta} \cos \beta x \end{array} \right] =$$

I

$$= -\frac{1}{\beta} e^{\lambda x} \cos \beta x + \frac{\lambda}{\beta} \int e^{\lambda x} \cos \beta x dx = \left[\begin{array}{ll} u = e^{\lambda x} & dv = \cos \beta x dx \\ du = \lambda e^{\lambda x} dx & v = \frac{1}{\beta} \sin \beta x \end{array} \right] =$$

$$= -\frac{1}{\beta} e^{\lambda x} \cos \beta x + \frac{\lambda}{\beta} \left(\frac{1}{\beta} e^{\lambda x} \sin \beta x - \frac{\lambda}{\beta} \int e^{\lambda x} \sin \beta x dx \right)$$

I

Сложим почленно и крај:

$$I = -\frac{1}{\beta} e^{\lambda x} \cos \beta x + \frac{\lambda}{\beta^2} e^{\lambda x} \sin \beta x - \frac{\lambda^2}{\beta^2} I$$

$$I + \frac{d^2}{\beta^2} I = -\frac{1}{\beta} e^{dx} \cos \beta x + \frac{d}{\beta^2} e^{dx} \sin \beta x \quad / : (1 + \frac{d^2}{\beta^2})$$

$$I = -\frac{\beta}{d^2 + \beta^2} e^{dx} \cos \beta x + \frac{d}{d^2 + \beta^2} e^{dx} \sin \beta x + c$$

$$(8) \int e^{dx} \cos \beta x dx = \left[\begin{array}{ll} u = \cos \beta x & dv = e^{dx} dx \\ du = -\beta \sin \beta x dx & v = \frac{1}{d} e^{dx} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{d} e^{dx} \cos \beta x + \frac{\beta}{d} \int e^{dx} \sin \beta x dx = \left[\begin{array}{ll} u = \sin \beta x & dv = e^{dx} dx \\ du = \beta \cos \beta x dx & v = \frac{1}{d} e^{dx} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{d} e^{dx} \cos \beta x + \frac{\beta}{d^2} e^{dx} \sin \beta x - \frac{\beta^2}{d^2} \int e^{dx} \cos \beta x dx$$

I

$$\Rightarrow I = \frac{1}{d} e^{dx} \cos \beta x + \frac{\beta}{d^2} e^{dx} \sin \beta x - \frac{\beta^2}{d^2} I$$

$$I = \frac{d}{d^2 + \beta^2} e^{dx} \cos \beta x + \frac{\beta}{d^2 + \beta^2} e^{dx} \sin \beta x + c$$

(16) 1. задача (применение (8))

$$\int \cos(\ln x) dx = \left[\begin{array}{l} t = \ln x \\ x = e^t \\ dx = e^t dt \end{array} \right] = \int \cos t \cdot e^t dt =$$

$$= \frac{1}{2} e^t \cos t + \frac{1}{2} e^t \sin t + c =$$

↑
по (8) за
d = β = 1

$$= \frac{1}{2} x \cos(\ln x) + \frac{1}{2} x \sin(\ln x) + c$$

2. шаг (сб. гл. 10)

$$\int \cos(\ln x) dx = \left[\begin{array}{l} u = \cos(\ln x) \\ du = \frac{-\sin(\ln x)}{x} dx \end{array} \quad \begin{array}{l} dv = dx \\ v = x \end{array} \right] =$$

$$= x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx = \left[\begin{array}{l} u = \sin(\ln x) \\ du = \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \end{array} \quad \begin{array}{l} dv = dx \\ v = x \end{array} \right] =$$

$$= x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx$$

I

Закле, $I = x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - I$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} x \cos(\ln x) + \frac{1}{2} x \sin(\ln x) + C.$$

* $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = I$

решение 1. шаг

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \left[\begin{array}{l} u = \frac{1}{x^2+1} \\ du = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} dx \end{array} \quad \begin{array}{l} dv = dx \\ v = x \end{array} \right] = \frac{x}{x^2+1} + 2 \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx =$$

интеграл из подомы

$$= \frac{x}{x^2+1} + 2 \int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^2} dx = \frac{x}{x^2+1} + 2 \int \frac{1}{x^2+1} dx - 2 \underbrace{\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}}_I$$

Закле,

$$\arctg x + C_1 = \frac{x}{x^2+1} + 2 \arctg x + C_2 - 2I$$

$$\Rightarrow I = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \underbrace{\frac{c_2 - c_1}{2}}_{=: c}$$

$$I = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + c$$

2. Ansatz

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx &= \int \frac{1+x^2-x^2}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx = \\ &= \operatorname{arctg} x - \int \frac{x \cdot x}{(x^2+1)^2} dx = \left[\begin{array}{ll} u=x & dv = \frac{x}{(x^2+1)^2} dx \\ du=dx & v = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$= \operatorname{arctg} x - \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x^2} \right) =$$

$$= \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + c =$$

$$= \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + c$$

⊛ Kopierfehler:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx &= \left[\begin{array}{l} t=x^2+1 \\ dt=2x dx \\ x dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t} + c = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} + c \end{aligned}$$



12. (a) $\int \sin(\sqrt{1+x}) dx$; (8) $\int \frac{x \ln(x + \sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}} dx$

pepperbe

$$(a) \int \sin \sqrt{1+x} dx = \left[\begin{array}{l} 1+x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right] = 2 \int t \sin t dt = \left[\begin{array}{l} u = t \quad dv = \sin t dt \\ du = dt \quad v = -\cos t \end{array} \right]$$

$$= 2 \left(-t \cos t + \int \cos t dt \right) = -2t \cos t + 2 \sin t + c =$$

$$= -2 \sqrt{1+x} \cos \sqrt{1+x} + 2 \sin \sqrt{1+x} + c$$

$$(8) \int \frac{x \ln(x + \sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}} dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \\ du = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} dx \\ dv = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx \\ v = \sqrt{x^2+1} \end{array} \right] =$$

$$= \sqrt{x^2+1} \cdot \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \int \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{x + \sqrt{x^2+1}} dx =$$

$$= \sqrt{x^2+1} \cdot \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - x + c \quad \square$$

13. (a) $I_n = \int \sin^n x dx$; (8) $I_n = \int \cos^n x dx$.

pepperbe

$$(a) I_n = \int \sin^n x dx = \int \sin^{n-1} x \cdot \sin x dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} u = \sin^{n-1} x \\ du = (n-1) \sin^{n-2} x \cdot \cos x dx \\ dv = \sin x dx \\ v = -\cos x \end{array} \right] =$$

$$= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x dx =$$

$$= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cdot (1 - \sin^2 x) dx =$$

$$= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1) \underbrace{\int \sin^{n-2} x dx}_{I_{n-2}} - (n-1) \underbrace{\int \sin^n x dx}_{I_n}$$

Сложим почтовый и край:

$$I_n = -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

$$\boxed{I_n = -\frac{1}{n} \cos x \cdot \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}}$$

Снова же можно определить I_n за каждое $n \in \mathbb{N}$.

Нпр. $n=5$.

$$I_5 = -\frac{1}{5} \cos x \cdot \sin^4 x + \frac{4}{5} I_3 =$$

$$= -\frac{1}{5} \cos x \cdot \sin^4 x + \frac{4}{5} \left(-\frac{1}{3} \cos x \cdot \sin^2 x + \frac{2}{3} \underbrace{I_1}_{\int \sin x dx} \right) =$$

$$= -\frac{1}{5} \cos x \cdot \sin^4 x - \frac{4}{15} \cos x \cdot \sin^2 x - \frac{8}{15} \cos x + C$$

Нпр. $n=4$

$$I_4 = -\frac{1}{4} \cos x \cdot \sin^3 x + \frac{3}{4} \underbrace{I_2}_{\int \sin^2 x dx} = -\frac{1}{4} \cos x \cdot \sin^3 x + \frac{3}{4} \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx =$$

$$= -\frac{1}{4} \cos x \cdot \sin^3 x + \frac{3}{8} x - \frac{3}{16} \sin 2x + C$$

$$(8) I_n = \int \cos^{n-1} x \cdot \cos x dx = \left[\begin{array}{l} u = \cos^{n-1} x \quad dv = \cos x dx \\ du = -(n-1) \cos^{n-2} x \cdot \sin x dx \quad v = \sin x \end{array} \right]$$

$$= \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \cdot (1 - \cos^2 x) dx =$$

$$= \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

Закле,
$$I_n = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \cdot \sin x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$
 ■

14.
$$\int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

решение

$$\int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \left[\begin{array}{l} u = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \quad dv = \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx \\ du = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{2x \cdot x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} dx \quad v = e^{\operatorname{arctg} x} \end{array} \right]$$

$$= \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{x^2+1}} - \int e^{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} u = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad dv = \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx \\ du = \frac{-x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx \quad v = e^{\operatorname{arctg} x} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{x^2+1}} - \int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} dx$$

I

Својино почетак и крај:

$$I = \frac{(x-1)e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{x^2+1}} - I$$

$$\Rightarrow I = \frac{(x-1)e^{\operatorname{arctg} x}}{2\sqrt{x^2+1}} + c \quad \square$$

15. (a) $\int \sin 3x \cdot \cos 5x dx$; (б) $\int \cos 17x \cdot \cos 12x dx$

(в) $\int \sin 4x \cdot \sin 7x dx$

решавање

$$(a) \int \sin 3x \cdot \cos 5x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 8x + \sin(-2x)) dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cos 8x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cos 2x + c = -\frac{1}{16} \cos 8x + \frac{1}{4} \cos 2x + c$$

$$(б) \int \cos 17x \cos 12x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 29x + \cos 5x) dx =$$

$$= \frac{1}{58} \sin 29x + \frac{1}{10} \sin 5x + c$$

$$(в) \int \sin 4x \sin 7x dx = \frac{1}{2} \int (\cos(-3x) - \cos 11x) dx =$$

$$= \frac{1}{6} \sin 3x - \frac{1}{22} \sin 11x + c \quad \square$$

Интеграција рационалних функција

Тесрета Свака рационална функција се може представити као збир коначно много садржања облика

① $\frac{a}{(x-\alpha)^k}$

② $\frac{ax+b}{(px^2+qx+r)^m}$, где полином px^2+qx+r нема реалних решења (тј. $D = q^2 - 4pr < 0$)

③ $\frac{ax+b}{(px^2+qx+r)^m}$, где полином px^2+qx+r нема реалних решења (тј. $D = q^2 - 4pr < 0$)

Какве решавати $\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx$?

1. корак: ако је $m \geq n$ поделимо $P_m(x) : Q_n(x)$ и

займемо у облику $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \text{количник} + \frac{\text{ОСТАТАК}}{Q_n(x)}$

2. корак: раставимо $Q_n(x)$ на чиниоце

3. корак: займемо $\frac{\text{ОСТАТАК}}{Q_n(x)}$ (односно $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ ако

је $m < n$) као збир садржања облика ② и ③ и интегрално сваки поједино.

Пример - за 3. корак

бројилац не уђише
на десну страну

$$(1) \frac{3x^2 - 5x + 2}{(x+1)(x+2)^3(x^2+1)(x^2+x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{(x+2)^3} +$$

$$+ \frac{Ex+F}{x^2+1} + \frac{Gx+H}{x^2+x+1} + \frac{Ix+J}{(x^2+x+1)^2}$$

Сада се помножимо израз са $(x+1)(x+2)^3(x^2+1)(x^2+x+1)^2$
и нашим поштоматом $A, B, C, \dots, J$.

$$(2) \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \quad / \cdot (x-1)(x+1)$$

$$1 = A(x+1) + B(x-1)$$

$$1 = x(A+B) + A - B$$

изједначимо коефицијенте
је x 1 и x 0

$$\left. \begin{array}{l} \text{коэф } 1: 1 = A - B \\ \text{коэф } x: 0 = A + B \end{array} \right\} \text{ решимо систем}$$

$$A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+1}$$

16. (a) $\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3} dx$; (б) $\int \frac{x}{(x+1)^2} dx$

решење

Распишимо x^2-2x-3 на чиниоце: $x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2}$

$$\Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -1$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1).$$

$$\frac{5x-3}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1} \quad / \cdot (x-3)(x+1)$$

$$5x-3 = A(x+1) + B(x-3)$$

$$5x-3 = x(A+B) + A-3B$$

$$\text{из } x: 5 = A+B \Rightarrow B = 5-A$$

$$\text{из } 1: \underline{-3 = A-3B} \quad \leftarrow \text{убавляю}$$

$$-3 = A - 3(5-A) \Rightarrow -3 = 4A - 15 \Rightarrow \boxed{A=3} \Rightarrow \boxed{B=2}$$

Сегга се враќамо на интегрирање:

$$\int \frac{5x-3}{(x-3)(x+1)} dx = \int \frac{3}{x-3} dx + \int \frac{2}{x+1} dx = 3\ln|x-3| + 2\ln|x+1| + c$$

$$(8) \quad \frac{x}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} \quad / \cdot (x+1)^2$$

$$x = Ax + A + B$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{из } x: 1 = A \\ \text{из } 1: 0 = A + B \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} A=1 \\ B=-1 \end{array}}$$

решава се
сметом $t=x+1$

$$\int \frac{x}{(x+1)^2} dx = \int \frac{1}{x+1} dx - \int \frac{1}{(x+1)^2} dx =$$

$$= \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + c. \quad \blacksquare$$

17. (a) $\int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} dx$; (б) $\int \frac{x^5}{x^4+1} dx$

решение

$$(a) \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} \quad / \cdot (x^2+1)(x-1)^2$$

$$-2x+4 = (Ax+B)(x-1)^2 + C(x^2+1)(x-1) + D(x^2+1)$$

$$-2x+4 = Ax^3 + (-2A+B)x^2 + (A-2B)x + B + Cx^3 - Cx^2 + Cx - C + Dx^2 + D$$

$$-2x+4 = (A+C)x^3 + (-2A+B-C+D)x^2 + (A-2B+C)x + B-C+D$$

$$\text{из } x^3: 0 = A+C$$

$$\text{из } x^2: 0 = -2A+B-C+D$$

$$\text{из } x: -2 = A-2B+C$$

$$\text{из } 1: 4 = B+C-D$$

решим систему

(...раньше...)

$$A=2, B=1, C=-2, D=1$$

$$\int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} dx = \int \frac{2x+1}{x^2+1} dx - 2 \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} =$$

$$= \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \int \frac{dx}{x^2+1} - 2 \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} =$$

$$= \ln|x^2+1| + \arctg x - 2 \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

смена
t = x^2+1
dt = 2x dx

смена
t = x-1
dt = dx

(8) x^5 је веће степена од x^4+1 , па делимо:

$$\begin{array}{r} x^5 : (x^4+1) = x \\ \underline{x^5 + x} \\ -x \end{array}$$

↑ количник

← остатак

$$\frac{x^5}{x^4+1} = \frac{(x^4+1) \cdot x - x}{x^4+1} = x - \frac{x}{x^4+1}$$

Сада разицавамо x^4+1 на чиниоце:

$$x^4+1 = x^4+2x^2+1-2x^2 = (x^2+1)^2 - (x\sqrt{2})^2 =$$

$$= (x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)$$

↑

оба квадратна полиноми
 се не могу даље разицавати
 (немају реалних корена)

$$\frac{x}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1} \quad / \cdot (x^4+1)$$

$$x = (Ax+B)(x^2-x\sqrt{2}+1) + (Cx+D)(x^2+x\sqrt{2}+1)$$

$$\begin{aligned} x = & Ax^3 + (-A\sqrt{2}+B)x^2 + (A-B\sqrt{2})x + B + \\ & + Cx^3 + (C\sqrt{2}+D)x^2 + (C+D\sqrt{2})x + D \end{aligned}$$

$$x = (A+C)x^3 + (-A\sqrt{2}+B+C\sqrt{2}+D)x^2 + (A-B\sqrt{2}+C+D\sqrt{2})x + B+D$$

$$\text{при } x^3: 0 = A + C$$

$$\text{при } x^2: 0 = -A\sqrt{2} + B + C\sqrt{2} + D$$

$$\text{при } x: 1 = A - B\sqrt{2} + C + D\sqrt{2}$$

$$\text{при } 1: 0 = B + D$$

(... решим ...)

$$A = 0, B = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, C = 0, D = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Континент,

$$\int \frac{x^5}{x^4+1} dx = \int \left(x - \frac{x}{x^4+1} \right) dx = \int x dx - \int \frac{x}{x^4+1} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \int \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}}{x^2+x\sqrt{2}+1} dx - \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{x^2-x\sqrt{2}+1} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\frac{1}{2}((x\sqrt{2}+1)^2+1)} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\frac{1}{2}((x\sqrt{2}-1)^2+1)} =$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{смена} \\ t = x\sqrt{2}+1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{смена} \\ t = x\sqrt{2}-1 \\ \hline \end{array}$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1) + C \quad \square$$

У теорему на стр. 20 се добијају изрази $\frac{a}{(x-d)^k}$ и

$\frac{ax+b}{(px^2+qx+r)^m}$ које треба да знамо како да инте-
грирамо. $\int \frac{a}{(x-d)^k} dx$ се решава заменом $t=x-d$.

$\int \frac{ax+b}{(px^2+qx+r)^m} dx$ решavamo на sledeћи начин:

Намештимо бројилац на облик: $2px+q+c$, па

поделимо на две дела: $\int \frac{2px+q}{(px^2+qx+r)^m} dx$ и $\int \frac{c}{(px^2+qx+r)^m} dx$

Први интеграл се решава заменом $t=px^2+qx+r$.

Други интеграл се заменом $t=\sqrt{p}x+\frac{q}{2\sqrt{p}}$ своди

на интеграл $\int \frac{dt}{(t^2+s^2)^m}$.

Погледајмо на примеру:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+5}{(x^2+x+1)^5} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+1+9}{(x^2+x+1)^5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^5} dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int \frac{9}{(x^2+x+1)^5} dx = \underbrace{\frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^5} dx}_{I_1} + \underbrace{\frac{9}{2} \int \frac{dx}{\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right)^5}}_{I_2} \end{aligned}$$

I_1 решavamo заменом $t=x^2+x+1$

I_2 се заменом $t=x+\frac{1}{2}$ своди на $\int \frac{dt}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^5}$

Центре јав за купимо како га израчунамо

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}, \quad n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

18. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$

решење

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \left[\begin{array}{l} x = \operatorname{tg} t \\ dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt \end{array} \right] = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 t} dt}{(\operatorname{tg}^2 t + 1)^n} =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{\left(\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + 1\right)^n} dt = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{\left(\frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t}\right)^n} dt =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos^{2n} t}} dt = \int \cos^{2n-2} t dt$$

овај интеграл смо
рачунали у задатку 13. (8)
на стр. 16

За $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ имамо:

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^{2n}} \int \frac{dx}{\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1\right)^n} = \left[\begin{array}{l} t = \frac{x}{a} \\ dx = a dt \end{array} \right] = \frac{1}{a^{2n-1}} \underbrace{\int \frac{dt}{(t^2+1)^n}}_{\text{Заг. 18}},$$

ма сада остаје да одредимо интеграл сваке
рационалне функције. -27-

Интеграли облика $\int R(\sin x, \cos x) dx$

R је рационална функција

1 мена: $t = \tan \frac{x}{2}$

ова мена решава сваки интеграл, али не увек
на најбржи начин.

$$x = 2 \arctan t$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

формуле за dx ,
 $\sin x$ и $\cos x$ можемо
памити нагледно

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{\tan^2 \frac{x}{2} + 1} = \frac{2t}{t^2 + 1}$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{\tan^2 \frac{x}{2} + 1} = \frac{1-t^2}{t^2+1}$$

2 мена $t = \tan x$

ова мена пролази ако је R парна функција по
обе променлике

$$x = \arctan t$$

$$dx = \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$$

3 смена: $t = \sin x$

смена пролази ако је R нетарна по другој променљивој.

4 смена: $t = \cos x$

смена пролази ако је R нетарна по првој променљивој.

Закључак: увек прво пробати да уверимо смене

2, **3** и **4** па ако нису не прође радимо **1**.

Свим овим сменама тригонометријски интеграл сводимо на интеграл рационалне функције.

19. (a) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$; (б) $\int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^3 x} dx$

решење

(a) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} = \left[\begin{array}{l} t = \tan x \\ dx = \frac{1}{1+t^2} dt \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \end{array} \right] = \int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2} + 2 \cdot \frac{1}{1+t^2}} dt =$

парно по обе променљиве

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + c = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}} \right) + c$$

мамо „групању“ наших:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} \stackrel{\substack{\cdot \cos^2 x \\ \cdot \cos^2 x}}{=} \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan^2 x + 2} dx = \left[\begin{array}{l} t = \tan x \\ dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{array} \right] =$$
$$= \int \frac{dt}{t^2 + 2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}} \right) + c$$

$$(8) \int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^3 x} dx = \int \frac{\cos^2 x (1 + \cos^2 x) \cos x}{\sin^2 x + \sin^3 x} dx =$$

↑
Истарамо по $\cos x$,
метра $t = \sin x$

$$= \int \frac{(1 - \sin^2 x)(2 - \sin^2 x) \cos x}{\sin^2 x + \sin^3 x} dx = \left[\begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right] =$$

$$= \int \frac{(1 - t^2)(2 - t^2)}{t^2 + t^3} dt = \int \frac{(1 - t)(1 + t)(2 - t^2)}{t^2(1 + t)} dt$$

$$= \int \frac{2 - 2t - t^2 + t^3}{t^2} dt = \int \left(\frac{2}{t^2} - \frac{2}{t} - 1 + t \right) dt =$$

$$= -\frac{2}{t} - 2 \ln|t| - t + \frac{t^2}{2} + C = -\frac{2}{\sin x} - 2 \ln|\sin x| - \sin x + \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

Мисли да бисмо ја имо једноставнији метру, $t = \tan \frac{x}{2}$?

$$\int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^3 x} dx = \left[\begin{array}{l} t = \tan \frac{x}{2} \\ dx = \frac{2 dt}{1 + t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1 + t^2} \\ \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \end{array} \right] = \int \frac{\left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2} \right)^3 + \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2} \right)^5}{\left(\frac{2t}{1 + t^2} \right)^2 + \left(\frac{2t}{1 + t^2} \right)^3} \cdot \frac{2}{1 + t^2} dt$$

↑
кашмикован рачун за
који се разијемо за
сто мбети



20. (a) $\int \frac{dx}{\sin x}$; (б) $\int \frac{1}{4\sin x + 3\cos x + 5} dx$

решение

$$(a) \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx = \left[\begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right] =$$

небольшо $\sin x$,
сделаю $t = \cos x$

$$= \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + C$$

$$(б) \int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \left[\begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ dx = \frac{2 dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{4 \cdot 2t}{1+t^2} + \frac{3(1-t^2)}{1+t^2} + 5} dt =$$

може $\cos x$ сделаю
 $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

$$= \int \frac{2}{8t + 3(1-t^2) + 5(1+t^2)} dt = \int \frac{dt}{t^2 + 4t + 4} = \int \frac{dt}{(t+2)^2} =$$

$$= -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2} + C$$

сделаю
 $p = t+2$

21. (a) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$; (б) $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x} dx$

решение

$$(a) \int \frac{dx}{1+\cos x} = \left[\begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ dx = \frac{2 dt}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} dt = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{1+t^2+1-t^2}{1+t^2}} dt$$

$$= \int dt = t + C = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C$$

$$(8) \int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x} dx = \int \frac{2 \sin x \cos x}{1+\cos^2 x} dx = \left[\begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right] =$$

$$= -2 \int \frac{t}{1+t^2} dt = \left[\begin{array}{l} p = 1+t^2 \\ dp = 2t dt \end{array} \right] = -\int \frac{dp}{p} =$$

$$= -\ln|p| + c = -\ln(1+t^2) + c = -\ln(1+\cos^2 x) + c \quad \square$$

Интеграл облика $\int R(\sqrt{ax^2+bx+c}, x) dx$
 $\uparrow$
 рационална ф-ја

1. корак:

$$ax^2+bx+c = \left(x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

правило квадрата
 бином од прва
 два члана

па у интеграл уводимо замену $t = x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}$
 ми се интеграл своди на неки од:

$$(a) \int R_1(\sqrt{x^2+1}, x) dx$$

$$(b) \int R_1(\sqrt{x^2-1}, x) dx$$

$$(c) \int R_1(\sqrt{1-x^2}, x) dx$$

$$\boxed{\text{замена } x = \operatorname{tg} t}$$

$$\boxed{\text{замена } x = \frac{1}{\cos t}}$$

$$\boxed{\text{замена } x = \sin t}$$

обе
 замене
 и

2. корак

$\uparrow$
 нека нова рационална
 функција

Буде лакше на конкретним примерима.

23. $\int \sqrt{x^2+x+1} dx$

пешене

$$\int \sqrt{x^2+x+1} dx = \int \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \int \sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dz$$

$$= \left[\begin{array}{l} t = \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \\ dx = \frac{\sqrt{3}}{2} dt \end{array} \right] = \frac{\sqrt{3}}{2} \int \sqrt{t^2+1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} dt =$$

$$= \frac{3}{4} \int \sqrt{t^2+1} dt = \left[\begin{array}{l} t = \operatorname{tg} p \\ dt = \frac{1}{\cos^2 p} dp \end{array} \right] = \frac{3}{4} \int \sqrt{\operatorname{tg}^2 p + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 p} dp =$$

използвайки (a)

$$= \frac{3}{4} \int \sqrt{\frac{\sin^2 p + \cos^2 p}{\cos^2 p}} \cdot \frac{1}{\cos^2 p} dp = \frac{3}{4} \int \frac{1}{\cos^3 p} dp =$$

$$= \frac{3}{4} \int \frac{\cos p}{(\cos^2 p)^2} dp = \frac{3}{4} \int \frac{\cos p}{(1-\sin^2 p)^2} dp = \left[\begin{array}{l} y = \sin p \\ dy = \cos p dp \end{array} \right] =$$

$$= \frac{3}{4} \int \frac{dy}{(1-y^2)^2} = \frac{3}{4} \int \frac{dy}{(1-y)^2(1+y)^2} = \textcircled{\star}$$

$$\frac{1}{(1-y)^2(1+y)^2} = \frac{A}{1-y} + \frac{B}{(1-y)^2} + \frac{C}{1+y} + \frac{D}{(1+y)^2} \quad \bigg/ \cdot (1-y)^2(1+y)^2$$

$$1 = A(-y^3 - y^2 + y + 1) + B(y^2 + 2y + 1) + \\ + C(y^3 - y^2 - y + 1) + D(y^2 - 2y + 1)$$

$$1 = y^3(-A + C) + y^2(-A + B - C + D) + y(A + 2B - C - 2D) + \\ + A + B + C + D$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{из } y^3: 0 = -A + C \\ \text{из } y^2: 0 = -A + B - C + D \\ \text{из } y: 0 = A + 2B - C - 2D \\ \text{из } 1: 1 = A + B + C + D \end{array} \right\} \begin{array}{l} (\dots \text{решить} \dots) \\ A = \frac{1}{4} \\ B = \frac{1}{4} \\ C = \frac{1}{4} \\ D = \frac{1}{4} \end{array}$$

Вставляем в y $\textcircled{A}$:

$$\textcircled{A} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{(1-y)^2} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{(1+y)^2} \right) dy =$$

$$= \frac{3}{16} \left(\ln|1-y| + \frac{1}{1-y} + \ln|1+y| - \frac{1}{1+y} \right) + C =$$

$$= \frac{3}{16} \ln|1-y^2| + \frac{3}{8} \frac{y}{1-y^2} + C =$$

$$= \frac{3}{16} \ln \left(\cos^2 \left(\arctg \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) \right) \right) + \frac{3}{8} \cdot \frac{\sin \left(\arctg \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) \right)}{\cos^2 \left(\arctg \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) \right)} + C$$

24. $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2-4}} dx$

пешее

выраж (σ)

$$\int \frac{x+2}{2\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2-1}} dx = \left[\begin{array}{l} t = \frac{x}{2} \\ dx = 2dt \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int \frac{2t+2}{\sqrt{t^2-1}} \cdot 2 dt =$$

$$= \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{\cos p} \\ dt = \frac{\sin p}{\cos^2 p} dp \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2}{\cos p} + 2}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 p} - 1}} \cdot \frac{\sin p}{\cos^2 p} dp =$$

$$= \int \frac{\frac{2}{\cos p} + 2}{\frac{\sin p}{\cos p}} \cdot \frac{\sin p}{\cos^2 p} dp = \int \frac{2 + 2\cos p}{\cos^2 p} dp =$$

$$= \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{tg} \frac{p}{2} \\ dp = \frac{2 dy}{1+y^2} \\ \cos p = \frac{1-y^2}{1+y^2} \end{array} \right] = \int \frac{2 + 2 \cdot \frac{1-y^2}{1+y^2}}{\frac{(1-y^2)^2}{(1+y^2)^2}} \cdot \frac{2}{1+y^2} dy =$$

Кро 4
3 аг 23.

$$= 8 \int \frac{1}{(1-y^2)^2} dy = 2 \ln |1-y^2| + \frac{4y}{1-y^2} + C =$$

$$= 2 \ln \left| 1 - \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\arccos \frac{3}{x}}{2} \right) \right| + \frac{4 \operatorname{tg} \left(\frac{\arccos \frac{3}{x}}{2} \right)}{1 - \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\arccos \frac{3}{x}}{2} \right)} + C$$

25. (a) $\int \frac{2x^2-1}{x\sqrt{1-x^2}} dx$ (б) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$ (5941)

пеллеме

$$(a) \int \frac{2x^2-1}{x\sqrt{1-x^2}} dx = \left[\begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \end{array} \right] = \int \frac{2\sin^2 t - 1}{\sin t \sqrt{1-\sin^2 t}} \cdot \cos t dt =$$

уыуы (б)

3аг. 20. (а)
уоп. 31

$$= \int \frac{2\sin^2 t - 1}{\sin t} dt = 2 \int \sin t dt - \int \frac{dt}{\sin t} =$$

$$= -2 \cos t - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos t - 1}{\cos t + 1} \right| + C =$$

$$= -2 \cos(\arcsin x) - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos(\arcsin x) - 1}{\cos(\arcsin x) + 1} \right| + C =$$

$$= -2 \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{\sqrt{1-x^2} + 1} \right| + C$$

Корреляция с
 $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$

$$(б) \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx = \left[\begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \end{array} \right] = \int \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin^2 t} \cos t dt = \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} dt =$$

$$= \int \frac{1 - \sin^2 t}{\sin^2 t} dt = \int \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1 \right) dt = -\cot t - t + C =$$

$$= -\cot(\arcsin x) - \arcsin x + C. \quad \blacksquare$$

Интегралы (а) и (б) на стр. 32 се могу решавати и овим заменама:

$$(a) \int R_1(\sqrt{x^2+1}, x) dx$$

$$\boxed{\text{замена } x = \operatorname{sh} t}$$

$$(b) \int R_1(\sqrt{x^2-1}, x) dx$$

$$\boxed{\text{замена } x = \operatorname{ch} t}$$

Гиперболическе функције:

$$\operatorname{sh} x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

← синус гиперболически

$$\operatorname{ch} x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

← косинус гиперболически

важни:

- $1 + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x$
- $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
- $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$

- $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + c$

- $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + c$

- $\operatorname{arcsch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

- $\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

26. (a) $\int \sqrt{x^2+1} dx$; (б) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$

решение

$$(a) \int \sqrt{x^2+1} dx = \left[\begin{array}{l} x = \operatorname{sh} t \\ dx = \operatorname{ch} t dt \end{array} \right] = \int \sqrt{\operatorname{sh}^2 t + 1} \cdot \operatorname{ch} t dt =$$

$$= \int \operatorname{ch}^2 t dt = \int \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^2 dt = \frac{1}{4} \int (e^{2t} + 2 + e^{-2t}) dt =$$

$$= \frac{1}{8} e^{2t} + \frac{1}{2} t - \frac{1}{8} e^{-2t} + c = \frac{1}{8} e^{2 \operatorname{arcsch} x} + \frac{1}{2} \operatorname{arcsch} x - \frac{1}{8} e^{-2 \operatorname{arcsch} x} + c =$$

$$= \frac{1}{8} \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)^2 + \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(x + \sqrt{x^2 + 1})^2} + c$$

Користимо $e^{\ln x} = x$

$$(8) \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \left[\begin{array}{l} x = \cosh t \\ dx = \sinh t dt \end{array} \right] = \int \frac{\sinh t}{(\cosh t + 1)\sqrt{\cosh^2 t - 1}} dt =$$

$$= \int \frac{dt}{\cosh t + 1} = \int \frac{dt}{\frac{e^t + e^{-t}}{2} + 1} = 2 \int \frac{dt}{e^t + e^{-t} + 2} =$$

$$= 2 \int \frac{e^t}{e^{2t} + 2e^t + 1} dt = 2 \int \frac{e^t}{(e^t + 1)^2} dt = \left[\begin{array}{l} e^t + 1 = p \\ e^t dt = dp \end{array} \right] =$$

$$= 2 \int \frac{dp}{p^2} = -\frac{2}{p} + c = -\frac{2}{e^t + 1} + c =$$

$$= -\frac{2}{e^{\operatorname{arcsch} x} + 1} + c = -\frac{2}{x + 1 + \sqrt{x^2 - 1}} + c$$

Користимо $e^{\ln x} = x$

За крај интеграла овој пута употребљено
се са Ејлеровим сменом.

Ојлерове смене

решавају интеграле облика $\int R(\sqrt{ax^2+bx+c}, x) dx$

← итти облик са аур. 32!

① $a > 0$: смена $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \sqrt{a} x$

② $c > 0$: смена $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$

+ ми-
виромо
како нап
је због то

③ $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$

смена $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1)$

27. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$

решење

$a=1 > 0$ радимо ① смену (а можда је и ②)

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+x+1} = t-x \\ x^2+x+1 = t^2-2tx+x^2 \\ x = \frac{t^2-1}{1+2t} \\ dx = \frac{2t^2+2t+2}{(1+2t)^2} dt \end{array} \right] = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{2(t^2+t+1)}{(1+2t)^2} dt$$

$$= 2 \int \frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2} dt = \boxed{\text{интеграција рационалне функције}} = 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|1+2t| + \frac{3}{1+2t} + C$$

$$= 2\ln|x+\sqrt{x^2+x+1}| - \frac{3}{2}\ln|1+2(x+\sqrt{x^2+x+1})| + \frac{3}{1+2(x+\sqrt{x^2+x+1})} + C$$

28. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}$

решение

$c = 1 > 0$ параб. (2) ветвь (можно же и (3))

$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}} = \left[\begin{array}{l} \sqrt{1 - 2x - x^2} = xt - 1/2 \\ 1 - 2x - x^2 = x^2 t^2 - 2tx + 1 \\ x = \frac{2t - 2}{t^2 + 1} \\ dx = \frac{-2t^2 + 4t + 2}{(t^2 + 1)^2} dt \end{array} \right] =$$

$$= \int \frac{\frac{-2t^2 + 4t + 2}{(t^2 + 1)^2}}{\frac{2t - 2}{t^2 + 1} \cdot t} dt = \int \frac{-t^2 + 2t + 1}{t(t - 1)(t^2 + 1)} dt =$$

интеграција
рационалне
функције
...

$$= -\ln|t| + \ln|t - 1| - 2 \operatorname{arctg} t + c =$$

$$= -\ln \left| \frac{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}{x} \right| + \ln \left| \frac{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}{x} - 1 \right| -$$

$$- 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}{x} \right) + c \quad \square$$

$$29. \int \frac{x - \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}} dx$$

пелле

$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$ парно ③ метры
(а мотм смм н ① и ②)

$$\int \frac{x - \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}} dx = \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2 + 3x + 2} = t(x+1)^{1/2} \\ (x+1)(x+2) = t^2(x+1)^2 \\ x = \frac{t^2 - 2}{1 - t^2} \\ dx = \frac{-2t}{(1-t^2)^2} dt \end{array} \right] =$$

$$= \int \frac{\frac{t^2 - 2}{1 - t^2} - t \left(\frac{t^2 - 2}{1 - t^2} + 1 \right)}{\frac{t^2 - 2}{1 - t^2} + t \left(\frac{t^2 - 2}{1 - t^2} + 1 \right)} \cdot \frac{-2t}{(1-t^2)^2} dt =$$

$$= \int \frac{t^2 + t - 2}{t^2 - t - 2} \cdot \frac{-2t}{(1-t^2)^2} dt = \dots \quad \square$$

Интеграл вида $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx$

уводящо смену $t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$

30. (a) $\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx$; (б) $\int \frac{\sqrt{x-2} + 1}{\sqrt{x-2} - 1} dx$

решение

$$(a) \int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx = \int \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1} dx = \left[\begin{array}{l} t^2 = \frac{x+1}{x-1} \\ t^2(x-1) = x+1 \\ x = \frac{t^2+1}{t^2-1} \\ dx = \frac{-4t}{(t^2-1)^2} dt \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{t-1}{t+1} \cdot \frac{-4t}{(t-1)^2(t+1)^2} dt = \int \frac{-4t}{(t-1)(t+1)^3} dt = *$$

$$\frac{-4t}{(t-1)(t+1)^3} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{(t+1)^2} + \frac{D}{(t+1)^3} \quad / \cdot (t-1)(t+1)^3$$

$$-4t = A(t+1)^3 + B(t-1)(t+1)^2 + C(t-1)(t+1) + D(t-1)$$

$$-4t = At^3 + 3At^2 + 3At + 3A + Bt^3 + Bt^2 - Bt - B + Ct^2 - C + Dt - D$$

$$-4t = t^3(A+B) + t^2(3A+B+C) + t(3A-B+D) + 3A-B-C-D$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{из } 1: 0 = 3A - B - C - D \\ \text{из } t: -4 = 3A - B + D \\ \text{из } t^2: 0 = 3A + B + C \\ \text{из } t^3: 0 = A + B \end{array} \right\} \left(\begin{array}{l} \text{ранг} \\ \dots \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} A = -\frac{2}{5} \\ B = \frac{2}{5} \\ C = \frac{4}{5} \\ D = -\frac{12}{5} \end{array}$$

$$\textcircled{\star} = -\frac{2}{5} \int \frac{dt}{t-1} + \frac{2}{5} \int \frac{dt}{t+1} + \frac{4}{5} \int \frac{dt}{(t+1)^2} - \frac{12}{5} \int \frac{dt}{(t+1)^3} =$$

$$= -\frac{2}{5} \ln|t-1| + \frac{2}{5} \ln|t+1| - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{t+1} + \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{(t+1)^2} + C =$$

$$= \frac{2}{5} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| - \frac{4t-2}{5(t+1)^2} + C =$$

$$= \frac{2}{5} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1} \right| - \frac{4\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 2}{5\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1\right)^2} + C$$

може га се
рачунао
и на овај
рачуналање је

$$(8) \int \frac{\sqrt{x-2} + 1}{\sqrt{x-2} - 1} dx = \left[\begin{array}{l} t^2 = x-2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right] = \int \frac{t+1}{t-1} \cdot 2t dt =$$

$$= 2 \int \frac{t^2 - 1 + 1 + t - 1 + 1}{t-1} dt = 2 \int \frac{(t-1)(t+1) + t-1 + 2}{t-1} dt =$$

$$= 2 \int \left(t + 2 + \frac{2}{t-1} \right) dt = t^2 + 4t + 4 \ln|t-1| + C =$$

$$= x-2 + 4\sqrt{x-2} + 4 \ln|\sqrt{x-2} - 1| + C \quad \blacksquare$$

Интегралы вида $\int R(x, \sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx$

$$n = \text{HЗС}(n_1, n_2, \dots, n_k)$$

$$\text{смена: } t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$$

31. (a) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx$; (б) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}} dx$

решение

$$(a) \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx = \left[\begin{array}{l} t^6 = x \\ 6t^5 dt = dx \end{array} \right] = \int \frac{\sqrt{t^6}}{1+\sqrt[3]{t^6}} \cdot 6t^5 dt =$$

$$= 6 \int \frac{t^3 - 1 + 1}{1+t^2} dt = 6 \int \frac{(t^4-1)(t^4+1) + 1}{1+t^2} dt =$$

$$= 6 \int \frac{(t^2-1)(t^2+1)(t^4+1) + 1}{1+t^2} dt =$$

$$= 6 \int \left((t^2-1)(t^4+1) + \frac{1}{1+t^2} \right) dt =$$

$$= 6 \int \left(t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2} \right) dt =$$

$$= \frac{6}{7} t^7 - \frac{6}{5} t^5 + 2t^3 - 6t + 6 \operatorname{arctg} t + C =$$

$$= \frac{6}{7} x^{\frac{7}{6}} - \frac{6}{5} x^{\frac{5}{6}} + 2\sqrt{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + C$$

$$\textcircled{8}) \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}} dx = \left[\begin{array}{l} t^4 = x \\ 4t^3 dt = dx \end{array} \right] = \int \frac{\sqrt{t^4}}{1+\sqrt[4]{t^4}} \cdot 4t^3 dt =$$

$$= 4 \int \frac{t^5}{1+t} dt = \left[\begin{array}{l} 1+t = p \\ dt = dp \end{array} \right] = 4 \int \frac{(p-1)^5}{p} dp =$$

$$= 4 \int \frac{p^5 - 5p^4 + 10p^3 - 10p^2 + 5p - 1}{p} dp =$$

$$= 4 \int \left(p^4 - 5p^3 + 10p^2 - 10p + 5 - \frac{1}{p} \right) dp =$$

$$= \frac{4}{5} p^5 - 5p^4 + \frac{40}{3} p^3 - 20p^2 + 20p - 4 \ln|p| + C =$$

$$= \frac{4}{5} (\sqrt[4]{x} + 1)^5 - 5(\sqrt[4]{x} + 1)^4 + \frac{40}{3} (\sqrt[4]{x} + 1)^3 - 20(\sqrt[4]{x} + 1)^2 + 20(\sqrt[4]{x} + 1) -$$

$$- 4 \ln|\sqrt[4]{x} + 1| + C \quad \square$$

Чебышевские интегралы $\int (ax^m + b)^p \cdot x^m dx$

1. шаг: замена $x^m = t$, $dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt$

$$\int (ax^m + b)^p x^m dx = \left[\begin{array}{l} t = x^m \\ x = t^{\frac{1}{n}} \\ dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt \end{array} \right] =$$

$$= \int (at+b)^p \cdot t^{\frac{m}{n}} \cdot \frac{1}{n} \cdot t^{\frac{1}{n}-1} dt =$$

$$= \frac{1}{n} \int (at+b)^p \cdot t^{\frac{m-n+1}{n}} dt =$$

$$= \frac{1}{n} \int (at+b)^p \cdot t^z dt$$

обозначим
 $z = \frac{m-n+1}{n}$

2. шаг: расчёт $\int (at+b)^p \cdot t^z dt$

1° $p \in \mathbb{Z}$

$$z \in \mathbb{Q}, z = \frac{r}{s},$$

замена: $t = y^s$

2° $z \in \mathbb{Z}$

$$p \in \mathbb{Q}, p = \frac{r}{s},$$

замена: $at+b = y^s$

3° $p+z \in \mathbb{Z}$

$$p \in \mathbb{Q}, p = \frac{r}{s},$$

замена: $\frac{at+b}{t} = y^s$

32. (a) $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2} dx$; (б) $\int \sqrt{x^3+x^4} dx$;

(б) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x}}$

пешейбе

(a) $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2} dx = \int (1+x^{\frac{1}{3}})^{-2} \cdot x^{\frac{1}{2}} dx =$

$= \left[\begin{array}{l} t = x^{\frac{1}{3}} \\ x = t^3 \\ dx = 3t^2 dt \end{array} \right] = 3 \int (1+t)^{-2} \cdot t^{\frac{3}{2}} \cdot t^2 dt =$

$= 3 \int (1+t)^{-2} \cdot t^{\frac{7}{2}} dt = \left[\begin{array}{l} t = y^2 \\ dt = 2y dy \end{array} \right] =$

$= 3 \int \frac{y^7}{(1+y^2)^2} \cdot 2y dy = 6 \int \frac{y^8}{(1+y^2)^2} dy = \star$

$y^8 : (y^4 + 2y^2 + 1) = y^4 - 2y^2 + 3$

$\underline{y^8 + 2y^6 + y^4}$

$-2y^6 - y^4$

$\underline{-2y^6 - 4y^4 - 2y^2}$

$3y^4 + 2y^2$

$\underline{3y^4 + 6y^2 + 3}$

$-4y^2 - 3$

$$\frac{y^8}{(1+y^2)^2} = y^4 - 2y^2 + 3 - \frac{4y^2+3}{(y^2+1)^2}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{\star} &= 6 \int \left(y^4 - 2y^2 + 3 - \frac{4y^2+3}{y^2+1} \right) dy = \\ &= \frac{6}{5} y^5 - 4y^3 + 18y - 6 \int \frac{4(y^2+1)}{(y^2+1)^2} dy + 6 \int \frac{dy}{(y^2+1)^2} = \\ &= \frac{6}{5} y^5 - 4y^3 + 18y - 24 \operatorname{arctg} y + \frac{3y}{y^2+1} + 3 \operatorname{arctg} y + C = \dots \end{aligned}$$

$$\textcircled{8} \int \sqrt{x^3+x^4} dx = \int \sqrt{x^4(x^{-1}+1)} dx =$$

$$= \int (x^{-1}+1)^{\frac{1}{2}} \cdot x^2 dx = \left[\begin{array}{l} x^{-1} = t \\ x = \frac{1}{t} \\ dx = -\frac{1}{t^2} dt \end{array} \right] =$$

$$= \int (t+1)^{\frac{1}{2}} \cdot t^{-2} \cdot (-1) \cdot t^{-2} dt =$$

$$= - \int (t+1)^{\frac{1}{2}} \cdot t^{-4} dt = \left[\begin{array}{l} t+1 = y^2 \\ dt = 2y dy \end{array} \right] =$$

$$= - \int y \cdot \frac{1}{(y^2-1)^4} \cdot 2y dy = -2 \int \frac{y^2}{(y^2-1)^4} dy = \textcircled{\star}$$

$$\frac{y^2}{(y-1)^4(y+1)^4} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{(y+1)^2} + \frac{C}{(y+1)^3} + \frac{D}{(y+1)^4} + \frac{E}{y-1} + \frac{F}{(y-1)^2} + \frac{G}{(y-1)^3} + \frac{H}{(y-1)^4}$$

... partial ...

$$A = B = F = -\frac{1}{32}$$

$$E = \frac{1}{32}$$

$$D = H = \frac{1}{16}$$

$$C = G = 0$$

$$\begin{aligned} \textcircled{*} &= \frac{1}{16} \ln|y+1| - \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{y+1} - \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{(y+1)^3} - \frac{1}{16} \ln|y-1| - \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{y-1} \\ &\quad - \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{(y-1)^3} + C = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{16} \ln \sqrt{\frac{1}{x}+1} - \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x}+1}+1} - \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1}{x}+1}+1\right)^3} - \frac{1}{16} \ln \left| \sqrt{\frac{1}{x}+1} - 1 \right| - \\ &\quad - \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x}+1}-1} - \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1}{x}+1}-1\right)^3} + C \end{aligned}$$

$$p+q \in \mathbb{Z}$$

$$(-b) \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x}} = \int \frac{dx}{(x+1) \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x+1}} = \int (x+1)^{-\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \frac{x+1}{x} = y^2 \\ x+1 = xy^2 \\ x = \frac{1}{y^2-1} \\ dx = \frac{-2y dy}{(y^2-1)^2} \end{array} \right] = \int \left(\frac{1}{y^2-1} + 1 \right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{1}{y^2-1} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{-2y}{(y^2-1)^2} dy =$$

$$= \int \frac{(y^2-1)^{\frac{3}{2}}}{y^3} \cdot (y^2-1)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{-2y}{(y^2-1)^2} dy =$$

$$= -2 \int \frac{dy}{y^2} = \frac{2}{y} + C = 2\sqrt{\frac{x}{x+1}} + C \quad \square$$

33. (a) $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{1+x^5}}$; (б) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$

пеллебе

$$(a) \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{1+x^5}} = \int (x^5+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{-1} dx = \left[\begin{array}{l} t = x^5 \\ dx = \frac{1}{5} t^{-\frac{4}{5}} dt \end{array} \right] =$$

$$= \int (t+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot t^{-\frac{4}{5}} \cdot \frac{1}{5} t^{-\frac{4}{5}} dt = \int (t+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot t^{-1} dt =$$

$$= \left[\begin{array}{l} t+1 = y^3 \\ dt = 3y^2 dy \end{array} \right] = \int y^{-1} \cdot (y^3-1)^{-1} \cdot 3y^2 dy =$$

$$= 3 \int \frac{y}{y^3-1} dy = \dots = -\frac{1}{2} \ln(y^2+y+1) + \ln|1-y| +$$

$$+ \sqrt{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{2} \ln\left((x^5+1)^{\frac{2}{3}} + (x^5+1)^{\frac{1}{3}} + 1\right) + \ln|1 - (x^5+1)^{\frac{1}{3}}| +$$

$$+ \sqrt{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{2(x^5+1)^{\frac{1}{3}} + 1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$(8) \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int \left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)^{\frac{1}{3}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} dx =$$

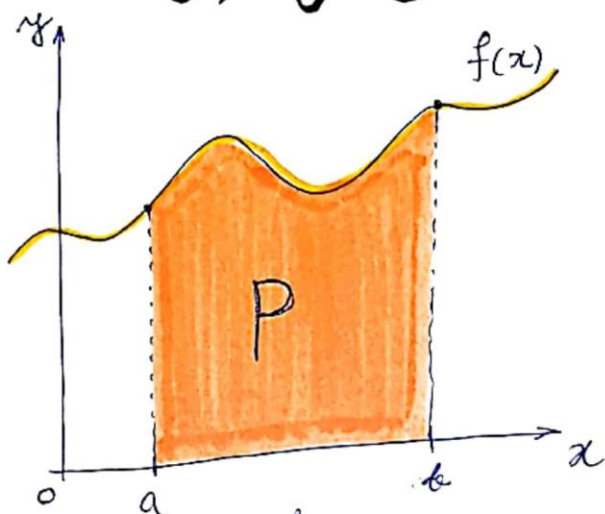
$$= \left[\begin{array}{l} x^{\frac{1}{4}} = t \\ dx = 4t^3 dt \end{array} \right] = \int (t+1)^{\frac{1}{3}} \cdot t^{-2} \cdot 4t^3 dt =$$

$$= 4 \int (t+1)^{\frac{1}{3}} \cdot t dt = \left[\begin{array}{l} t+1 = y^3 \\ dt = 3y^2 dy \end{array} \right] =$$

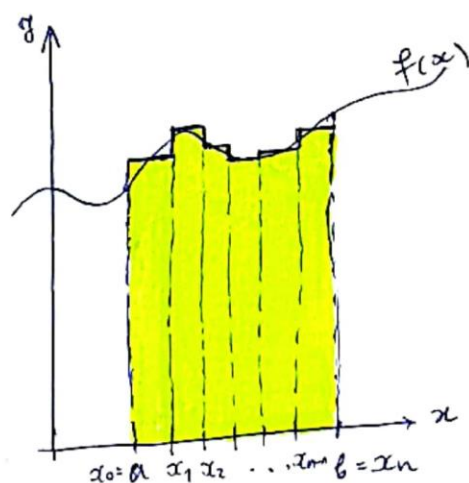
$$= 4 \int y \cdot (y^3-1) \cdot 3y^2 dy = 12 \int (y^6 - y^3) dy =$$

$$= \frac{12}{7} y^7 - 3y^4 + C = \frac{12}{7} \left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)^{\frac{7}{3}} - 3 \left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)^{\frac{4}{3}} + C \quad \square$$

Однієї інтеграли



$$P = \int_a^b f(x) dx$$



$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot f(\xi_i)$$

$$\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim \sigma_n$$

лиміт по все меншим
поділам інтервалу
[a, b]

Стат

$$(1) \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx;$$

$$(2) \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$(3) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx;$$

$$(4) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad c \in (a, b);$$

$$(5) \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Теорема (Њутн - Лајбниц)

Нека је $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрална и $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ њена примитивна функција. Тада је

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Теорема (Смена променљиве)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрална, $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ дејекција.

Тада
$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

Теорема (Парцијална интеграција)

$u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидно - диференцијабилне

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

$$u \cdot v \Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$$

Теорема

Ако је f непрекидна, онда има примитивну функцију
дајмо са $F(x) = \int_a^x f(t) dt.$

1. (a) $\int_0^1 e^{2x} dx$; (b) $\int_0^e \frac{e^x+1}{e^x+x} dx$; (c) $\int_1^2 \frac{dx}{2x(x^2+1)}$

reeweibe

$$(a) \int_0^1 e^{2x} dx = \left[\begin{array}{l} t=2x \\ dx = \frac{1}{2} dt \\ x=0 \rightarrow t=0 \\ x=1 \rightarrow t=2 \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int_0^2 e^t dt = \frac{1}{2} e^t \Big|_0^2 = \frac{1}{2} (e^2 - e^0) = \frac{1}{2} (e^2 - 1)$$

$$(b) \int_0^e \frac{e^x+1}{e^x+x} dx = \left[\begin{array}{l} t = e^x+x \\ dt = (e^x+1) dx \\ x=0 \rightarrow t=1 \\ x=e \rightarrow t=e^e+e \end{array} \right] = \int_1^{e^e+e} \frac{dt}{t} = \ln|t| \Big|_1^{e^e+e} =$$

$$= -\ln(e^e+e) + \ln 1 = \ln(e^e+e)$$

$$(c) \int_1^2 \frac{dx}{2x(x^2+1)} = \int_1^2 \frac{x dx}{2x^2(x^2+1)} = \left[\begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x dx \\ x=1 \rightarrow t=1 \\ x=2 \rightarrow t=4 \end{array} \right] = \frac{1}{4} \int_1^4 \frac{dt}{t(t+1)} =$$

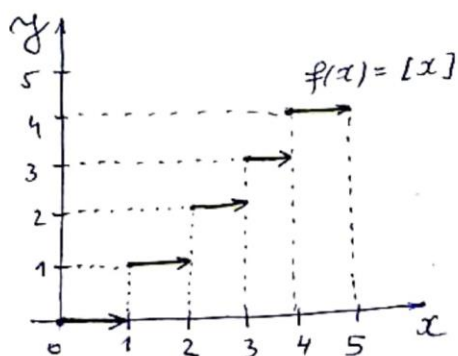
$$= \frac{1}{4} \int_1^4 \frac{1+t-t}{t(t+1)} dt = \frac{1}{4} \int_1^4 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \left(\frac{1}{4} \ln|t| - \frac{1}{4} \ln|t+1| \right) \Big|_1^4 =$$

$$= \frac{1}{4} \ln 4 - \frac{1}{4} \ln 5 - \frac{1}{4} \ln 1 + \frac{1}{4} \ln 2 = \frac{3}{4} \ln 2 - \frac{1}{4} \ln 5 \quad \square$$

2. (a) $\int_{\frac{1}{2}}^3 [x] dx$; (б) $\int_0^2 [e^x] dx$; (в) $\int_1^{n+1} \ln [x] dx$

решение

(a) $f(x) = [x]$ — целое число (мы: $[x] = \text{floor}(x)$)



Напр. $[2,1] = 2$
 $[\sqrt{2}] = 1$
 $[3] = 3$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^3 [x] dx &= \int_{\frac{1}{2}}^1 [x] dx + \int_1^2 [x] dx + \int_2^3 [x] dx = \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 dx + \int_1^2 1 dx + \int_2^3 2 dx = x \Big|_{\frac{1}{2}}^1 + x \Big|_1^2 + 2x \Big|_2^3 = \\ &= 2 - 1 + 6 - 4 = 3 \end{aligned}$$

(б) $[e^x] = m \Rightarrow m \leq e^x < m+1$

$\ln m \leq x < \ln(m+1)$

$$\int_0^2 [e^x] dx = \int_{\ln 1}^{\ln 2} [e^x] dx + \int_{\ln 2}^{\ln 3} [e^x] dx + \dots + \int_{\ln 7}^2 [e^x] dx = \text{A}$$

Итак $2 = \ln e^2 \approx \ln 7,4$ — так же записываем
 интеграл от $\ln 7$ до 2.

$$\begin{aligned}
 \textcircled{A} &= \int_{\ln 1}^{\ln 2} dx + 2 \int_{\ln 2}^{\ln 3} dx + 3 \int_{\ln 3}^{\ln 4} dx + 4 \int_{\ln 4}^{\ln 5} dx + 5 \int_{\ln 5}^{\ln 6} dx + 6 \int_{\ln 6}^{\ln 7} dx + 7 \int_{\ln 7}^2 dx = \\
 &= x \Big|_{\ln 1}^{\ln 2} + 2x \Big|_{\ln 2}^{\ln 3} + 3x \Big|_{\ln 3}^{\ln 4} + 4x \Big|_{\ln 4}^{\ln 5} + 5x \Big|_{\ln 5}^{\ln 6} + 6x \Big|_{\ln 6}^{\ln 7} + 7x \Big|_{\ln 7}^2 = \\
 &= \ln 2 - \ln 1 + 2\ln 3 - 2\ln 2 + 3\ln 4 - 3\ln 3 + 4\ln 5 - 4\ln 4 + 5\ln 6 - 5\ln 5 + \\
 &\quad + 6\ln 7 - 6\ln 6 + 14 - 7\ln 7 = \\
 &= -\ln 2 - \ln 3 - \ln 4 - \ln 5 - \ln 6 - \ln 7 + 14 = 14 - \ln(7!)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{B} \int_1^{n+1} \ln[x] dx &= \int_1^2 \ln 1 dx + \int_2^3 \ln 2 dx + \int_3^4 \ln 3 dx + \dots + \int_m^{n+1} \ln n dx = \\
 &= x \ln 2 \Big|_2^3 + x \ln 3 \Big|_3^4 + \dots + x \ln n \Big|_m^{n+1} = \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln n = \ln(n!)
 \end{aligned}$$

3. (a) $\int_0^1 x \ln(1+x^2) dx$; (b) $\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx$

решение

$$\begin{aligned}
 \textcircled{a} \int_0^1 x \ln(1+x^2) dx &= \left[\begin{array}{ll} u = \ln(1+x^2) & dv = x dx \\ du = \frac{2x}{1+x^2} dx & v = \frac{1}{2} x^2 \end{array} \right] = \\
 &= \frac{1}{2} x^2 \ln(1+x^2) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2 \cdot x}{1+x^2} dx = \left[\begin{array}{l} t = 1+x^2 \\ dt = 2x dx \\ x=0 \rightarrow t=1 \\ x=1 \rightarrow t=2 \end{array} \right] = \\
 &= \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{t-1}{t} dt = \frac{\ln 2}{2} - \left(\frac{1}{2} t - \frac{1}{2} \ln|t| \right) \Big|_1^2 =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\ln 2}{2} - \left(\frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \ln 1 \right) =$$

$$= \ln 2 - \frac{1}{2}$$

$$(б) \int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x \, dx = \left[\begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x & dv = x \, dx \\ du = \frac{dx}{1+x^2} & v = \frac{1}{2} x^2 \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x \Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2 + 1 - 1}{1+x^2} \, dx =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) \, dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \right) \Big|_0^{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \blacksquare$$

4. По формулировке рассчитать

$$(а) \int_0^1 e^x \, dx; (б) \int_1^2 \frac{1}{x^2} \, dx$$

решение

(а) $[0, 1]$ поделим на n частей:

$$\begin{array}{ccccccc} | & & | & & | & & | \\ 0=x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n=1 \end{array}$$

$$x_i = \frac{i}{n}$$

Узмимо $\xi_i = x_i$ ($\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ дупамо пубраисволитно)

$$\sigma(f, [0,1], P, \xi) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot f(\xi_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} \right)}_{\frac{1}{n}} \cdot e^{\xi_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{\frac{i}{n}} =$$

$$= \frac{1}{n} \left(e^{\frac{1}{n}} + \left(e^{\frac{1}{n}} \right)^2 + \left(e^{\frac{1}{n}} \right)^3 + \dots + \left(e^{\frac{1}{n}} \right)^n \right) =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot e^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1 - \left(e^{\frac{1}{n}} \right)^n}{1 - e^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} e^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1 - e}{1 - e^{\frac{1}{n}}} =$$

$$= e^{\frac{1}{n}} (e-1) \cdot \frac{\frac{1}{n}}{1 - e^{\frac{1}{n}}}$$

$$\int_0^1 e^x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(f, [0,1], P, \xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n}} (e-1) \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = e-1$$

(8) $[1,2]$ делимо на n делова:

$$\begin{array}{ccccccc} | & | & | & & | & | \\ x_0=1 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & 2=x_n \end{array}$$

$$x_i = 1 + \frac{i}{n}$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$$

$$\xi_i = \sqrt{x_i x_{i-1}} \quad (\text{обже за } \xi \text{ дупамо корен јер је } f(x) = \frac{1}{x^2})$$

Корискитно: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{e} = 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = 1$$

$$\begin{aligned}
\sigma(f, [1, 2], P, \xi) &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot f(\xi_i) = \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(\sqrt{x_i x_{i-1}})^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i x_{i-1}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1 + \frac{i}{n})(1 + \frac{i-1}{n})} = \\
&= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{(1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{0}{n})} + \frac{1}{(1 + \frac{2}{n})(1 + \frac{1}{n})} + \dots + \frac{1}{(1 + \frac{n}{n})(1 + \frac{n-1}{n})} \right) = \\
&= \frac{1}{n} \left(\frac{n}{1 + \frac{0}{n}} - \frac{n}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{n}{1 + \frac{1}{n}} - \frac{n}{1 + \frac{2}{n}} + \dots + \frac{n}{1 + \frac{n-1}{n}} - \frac{n}{1 + \frac{n}{n}} \right) = \\
&= \frac{1}{n} \left(\frac{n}{1 + \frac{0}{n}} - \frac{n}{1 + \frac{n}{n}} \right) = \frac{1}{n} \left(n - \frac{n}{2} \right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(f, [1, 2], P, \xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \square$$

5. Наћи некиј функције $F(x)$ ако је

(a) $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$; (b) $F(x) = \int_x^0 \sqrt{1+t^3} dt$;

(c) $F(x) = \int_{\ln x}^{2 \ln x} \frac{e^t}{t} dt$

решение

(a) $F'(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)' = e^{-x^2}$

$$(0) F'(x) = \left(\int_x^0 \sqrt{1+t^3} dt \right)' = - \left(\int_0^x \sqrt{1+t^3} dt \right)' = -\sqrt{1+x^3}$$

$$(16) \int_{\ln x}^{2 \ln x} \frac{e^t}{t} dt = \left[\begin{array}{l} p = e^t \\ dt = \frac{dp}{p} \\ t = \ln x \rightarrow p = x \\ t = 2 \ln x \rightarrow p = x^2 \end{array} \right] = \int_x^{x^2} \frac{p}{\ln p} \cdot \frac{1}{p} dp =$$

$$= \int_x^{x^2} \frac{dp}{\ln p} = \int_x^0 \frac{dp}{\ln p} + \int_0^{x^2} \frac{dp}{\ln p} = \left[\begin{array}{l} \text{смена на 2-ый} \\ y^2 = p \\ dp = 2y dy \\ p=0 \rightarrow y=0 \\ p=x^2 \rightarrow y=x \end{array} \right] =$$

$$= - \int_0^x \frac{dp}{\ln p} + \int_0^x \frac{2y dy}{\ln y^2}$$

$$F'(x) = \left(- \int_0^x \frac{dp}{\ln p} + \int_0^x \frac{2y dy}{\ln y^2} \right)' = -\frac{1}{\ln x} + \frac{2x}{\ln x^2} = -\frac{1}{\ln x} + \frac{2x}{2 \ln x} = \frac{x-1}{\ln x}$$

группа находит корриктором формулы

$$\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt \right)' = f(b(x)) \cdot b'(x) - f(a(x)) \cdot a'(x)$$

$$\left(\int_{\ln x}^{2 \ln x} \frac{e^t}{t} dt \right)' = \frac{e^{2 \ln x}}{2 \ln x} \cdot \frac{2}{x} - \frac{e^{\ln x}}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x-1}{\ln x} \quad \square$$

6 Корриктором Лопиталя правилу найти значение:

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \int_0^x \sqrt{1+t^4} dt; \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x^3} \int_0^{x^3} \sin \sqrt{t} dt$$

решение

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4} dt}{x^2} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x \sqrt{1+t^4} dt \right)'}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^4}}{x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^4}}{x} = +\infty$$

$$(8) \quad \int_0^{x^3} \sin \sqrt{t} dt = \left[\begin{array}{l} p^3 = t \\ dt = 3p^2 dp \\ t=0 \rightarrow p=0 \\ t=x^3 \rightarrow p=x \end{array} \right] = \int_0^x \sin \sqrt{p^3} \cdot 3p^2 dp$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\int_0^{x^3} \sin \sqrt{t} dt}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\int_0^x \sin \sqrt{p^3} \cdot 3p^2 dp}{x^3} \quad \begin{array}{l} \text{н.п.} \\ \frac{0}{0} \end{array}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\left(\int_0^x \sin \sqrt{p^3} \cdot 3p^2 dp \right)'}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin \sqrt{x^3} \cdot 3x^2}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} \sin \sqrt{x^3} = 0 \quad \blacksquare$$

7. Упростите короче интегралных сумм:

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right)$$

$$(b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}, \quad p > 1$$

решение

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \cdot \frac{1}{\pi} \left(\underbrace{\sin \frac{0\pi}{n}}_0 + \sin \frac{\pi}{n} + \dots + \frac{\sin(n-1)\pi}{n} + \underbrace{\sin \frac{n\pi}{n}}_0 \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = -\frac{1}{\pi} \cos x \Big|_0^{\pi} = \frac{-\cos \pi + \cos 0}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

$$\begin{aligned} (8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\left(\frac{1}{n}\right)^p + \left(\frac{2}{n}\right)^p + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^p \right) = \\ &= \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1} x^{p+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{p+1} \quad \square \end{aligned}$$

задачке 8. и 9.
на листу
корисно
без доказа!

8. Нека је f интеграбилна.

Докажи:

(a) ако је f парна, тј. $(\forall x) f(-x) = f(x)$,

$$\text{онда } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx;$$

(b) ако је f непарна, тј. $(\forall x) f(-x) = -f(x)$,

$$\text{онда } \int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

решење

$$(a) \int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{смена за 1. интеграл:} \\ t = -x \\ dx = -dt \\ x = -a \rightarrow t = a \\ x = 0 \rightarrow t = 0 \end{array} \right] =$$

$$= - \int_a^0 f(-t) dt + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(t) dt + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

$$\begin{aligned}
 (o) \quad \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \left[\begin{array}{l} \text{смена за} \\ 1. \text{ унут.} \\ x = -t \\ dx = -dt \\ x = -a \rightarrow t = a \\ x = 0 \rightarrow t = 0 \end{array} \right] = \\
 &= - \int_a^0 f(-t) dt + \int_0^a f(x) dx = \\
 &= - \int_0^a f(t) dt + \int_0^a f(x) dx = 0 \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

9. Функција f је интегрална и периодична са периодом T (тј. $(\forall x) f(x+T) = f(x)$). Доказати

$$(a) \quad \int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx, \quad a \in \mathbb{R};$$

$$(o) \quad \int_a^{a+kT} f(x) dx = k \cdot \int_0^T f(x) dx, \quad a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z};$$

$$(b) \quad \int_{a+kT}^{b+kT} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

реши

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \int_a^{a+T} f(x) dx &= \int_a^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx = \int_a^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x-T) dx = \\
 &= \left[\begin{array}{l} \text{смена за} \\ 2. \text{ унут.} \\ t = x - T \\ dt = dx \\ x = T \rightarrow t = 0 \\ x = a+T \rightarrow t = a \end{array} \right] = \int_a^T f(x) dx + \int_0^a f(t) dt = \int_0^T f(x) dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad \int_a^{a+kT} f(x) dx &= \int_a^{a+T} f(x) dx + \int_{a+T}^{a+2T} f(x) dx + \dots + \int_{a+(k-1)T}^{a+kT} f(x) dx = \\
 &\stackrel{(a)}{=} \underbrace{\int_0^T f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \dots + \int_0^T f(x) dx}_k = \\
 &= k \int_0^T f(x) dx
 \end{aligned}$$

$$(6) \quad \int_{a+kT}^{b+kT} f(x) dx = \int_{a+kT}^{b+kT} f(x-kT) dx = \left[\begin{array}{l} t = x - kT \\ dt = dx \\ x = a + kT \rightarrow t = a \\ x = b + kT \rightarrow t = b \end{array} \right] = \int_a^b f(t) dt \quad \square$$

Прейдохна два задатка су
јако брзо!

10. (a) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x + x + 3}{1+|x|} dx$; (б) $\int_{-1}^1 \frac{\sin x \cos x - |x| + 3 \arctg x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$ (JA+2)

решение

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x + x + 3}{1+|x|} dx &= \overset{\text{непарна}}{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x + x}{1+|x|} dx} + \overset{\text{парна}}{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{3}{1+|x|} dx} = \\
 &= 0 + 2 \int_0^{\pi} \frac{3}{1+|x|} dx = 2 \int_0^{\pi} \frac{3}{1+x} dx = 6 \ln|1+x| \Big|_0^{\pi} = 6 \ln(1+\pi)
 \end{aligned}$$

$$(8) \int_{-1}^1 \frac{\sin x \cos x - |x| + 3 \arctg x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \int_{-1}^1 \frac{\sin x \cos x + 3 \arctg x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx -$$

$$- \int_{-1}^1 \frac{|x|}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = -2 \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \begin{matrix} \text{подстановка} \\ \left[\begin{array}{l} t = 1+x^2 \\ \frac{1}{2} dt = x dx \\ x=0 \rightarrow t=1 \\ x=1 \rightarrow t=2 \end{array} \right] \end{matrix} =$$

$$= - \int_1^2 \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{t}} \Big|_1^2 = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{1}} = \sqrt{2} - 2 \quad \square$$

$$11. (a) \int_0^{30\pi} \sqrt{1-\cos 2x} dx ; (8) \int_0^{\pi} \frac{\sin^3 x \cos x}{1+\cos^2 x} dx ;$$

$$(8) \int_{-11\pi}^{20\pi} \operatorname{sgn}(\sin x) dx$$

решение

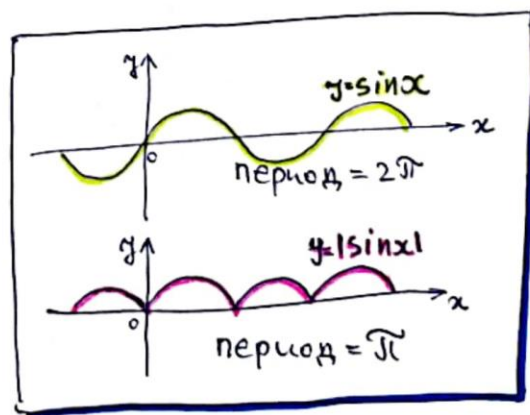
$$(a) \int_0^{30\pi} \sqrt{1-\cos 2x} dx = \int_0^{30\pi} \sqrt{2 \sin^2 x} dx = \sqrt{2} \int_0^{30\pi} |\sin x| dx =$$

$$= \sqrt{2} \cdot 30 \cdot \int_0^{\pi} |\sin x| dx =$$

$$= 30\sqrt{2} \int_0^{\pi} \sin x dx =$$

$$= -30\sqrt{2} \cos x \Big|_0^{\pi} = -30\sqrt{2} \underbrace{\cos \pi}_{-1} +$$

$$+ 30\sqrt{2} \underbrace{\cos 0}_1 = 60\sqrt{2}$$



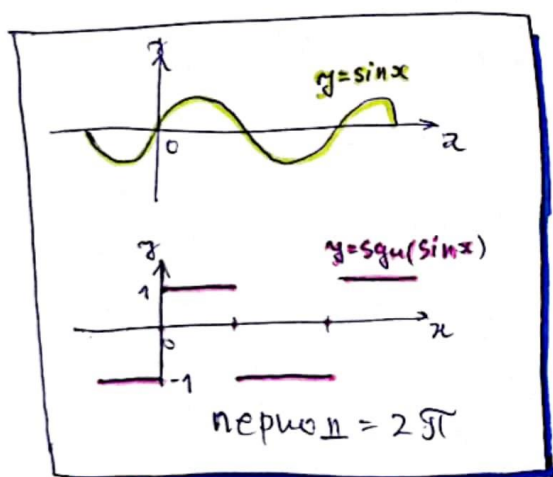
$$(6) \int_0^{\pi} \frac{\sin^3 x \cos x}{1 + \cos^2 x} dx = \left[\begin{array}{l} t = x - \frac{\pi}{2} \\ dt = dx \\ x=0 \rightarrow t = -\frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2} \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right] = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3(t + \frac{\pi}{2}) \cos(t + \frac{\pi}{2})}{1 + \cos^2(t + \frac{\pi}{2})} dt =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 t (-\sin t)}{1 + \sin^2 t} dt = 0$$

↑ Непарна

$$(b) \int_{-11\pi}^{20\pi} \text{sgn}(\sin x) dx = \int_{-11\pi}^{11\pi} \text{sgn}(\sin x) dx + \int_{11\pi}^{20\pi} \text{sgn}(\sin x) dx =$$

↑ Непарна



$$= \int_{11-8 \cdot 2\pi}^{20-8 \cdot 2\pi} \text{sgn}(\sin x) dx = \int_{-5\pi}^{4\pi} \text{sgn}(\sin x) dx =$$

$$= \int_{-5\pi}^{-4\pi} \text{sgn}(\sin x) dx + \int_{-4\pi}^{4\pi} \text{sgn}(\sin x) dx =$$

$$= \int_{\pi}^{2\pi} \text{sgn}(\sin x) dx = - \int_{\pi}^{2\pi} dx = -x \Big|_{\pi}^{2\pi} = -\pi$$

12. (a) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + \cos x}{3|\sin x| + 2\cos^2 x} dx$; (б) $\int_0^{\pi} \frac{\sin^3 x \cdot |\cos x|}{1 + \cos^2 x} dx$

решение

$$(a) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + \cos x}{3|\sin x| + 2\cos^2 x} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x dx}{3|\sin x| + 2\cos^2 x} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{3|\sin x| + 2\cos^2 x} dx =$$

↑ Непарна ↑ Парна

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{3 \sin x + 2 \cos^2 x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{3 \sin x + 2 - 2 \sin^2 x} dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \\ x=0 \rightarrow t=0 \\ x=\frac{\pi}{2} \rightarrow t=1 \end{array} \right] = 2 \int_0^1 \frac{dt}{3t+2-2t^2} = 2 \int_0^1 \frac{dt}{(2-t)(2t+1)} = \textcircled{A}$$

$$\frac{1}{(2-t)(2t+1)} = \frac{A}{2-t} + \frac{B}{2t+1} \quad / \cdot (2-t)(2t+1)$$

$$1 = 2At + A + 2B - Bt$$

$$1 = t(2A-B) + A+2B$$

$$\begin{array}{l} \text{ys } t: 0 = 2A - B \\ \text{ys } 1: 1 = A + 2B \end{array} \Rightarrow A = \frac{1}{5}, B = \frac{2}{5}$$

$$\textcircled{\star} = \frac{2}{5} \int_0^1 \frac{dt}{2-t} + \frac{4}{5} \int_0^1 \frac{dt}{2t+1} = -\frac{2}{5} \ln|2-t| + \frac{2}{5} \ln|2t+1| \Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{5} \ln \left| \frac{2t+1}{2-t} \right| \Big|_0^1 = \frac{2}{5} \ln 3 - \frac{2}{5} \ln \frac{1}{2} = \frac{2}{5} \ln 6$$

$$\textcircled{6} \int_0^{\pi} \frac{\sin^3 x \cdot |\cos x|}{1 + \cos^2 x} dx = \left[\begin{array}{l} t = x - \frac{\pi}{2} \\ dt = dx \\ x=0 \rightarrow t = -\frac{\pi}{2} \\ x=\pi \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right] = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3(t + \frac{\pi}{2}) \cdot |\cos(t + \frac{\pi}{2})|}{1 + \cos^2(t + \frac{\pi}{2})} dt =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 t \cdot |-\sin t|}{1 + (-\sin t)^2} dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 t \cdot \sin t}{2 - \cos^2 t} dt =$$

$$\boxed{|\sin t| = \sin t \quad \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]}$$

$$\boxed{\text{naphg}}$$

$$= \left[\begin{array}{l} p = \cos t \\ -dp = \sin t dt \\ t=0 \rightarrow p=1 \\ t=\frac{\pi}{2} \rightarrow p=0 \end{array} \right] = -2 \int_1^0 \frac{p^3}{2-p^2} dp = 2 \int_0^1 \frac{p^3 - 2p + 2p}{2-p^2} dp =$$

$$= 2 \int_0^1 \left(-p + \frac{2p}{2-p^2} \right) dp = -p^2 \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 \frac{2p}{2-p^2} dp =$$

$$= \left[\begin{array}{l} y = 2-p^2 \\ -dy = 2p dp \\ p=0 \rightarrow y=2 \\ p=1 \rightarrow y=1 \end{array} \right] = -1 - 2 \int_2^1 \frac{dy}{y} = -1 + 2 \int_1^2 \frac{dy}{y} =$$

$$= -1 + (2 \ln |y|) \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - 1 \quad \square$$

13. Ako je f neprekidna, dokazati:

$$(a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx;$$

$$(b) \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$$

rešenje

$$(a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{2} - x \\ dt = -dx \\ x=0 \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{2} \rightarrow t=0 \end{array} \right] = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\sin(\frac{\pi}{2}-x)) dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$$

$$(6) \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \left[\begin{array}{l} x = \pi - t \\ dx = -dt \\ x = 0 \rightarrow t = \pi \\ x = \pi \rightarrow t = 0 \end{array} \right] = - \int_{\pi}^0 (\pi - t) f(\sin(\pi - t)) dt$$

$$= \int_0^{\pi} (\pi - t) f(\sin t) dt = \pi \int_0^{\pi} f(\sin t) dt - \int_0^{\pi} t f(\sin t) dt$$

I

$$\Rightarrow I = \pi \int_0^{\pi} f(\sin t) dt - I$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin t) dt \quad \square$$

14. (a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx$; (б) $\int_0^1 \frac{\cos^2 \frac{\pi x}{2}}{\sqrt{x - x^2}} dx$

решение

$$(a) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx = \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{4} - x \\ dx = -dt \\ x = 0 \rightarrow t = \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{\pi}{4} \rightarrow t = 0 \end{array} \right] = - \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln(1 + \tan(\frac{\pi}{4} - t)) dt =$$

применили смо
формулы за $\sin$
и $\cos$ зорца и
разлике

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left(1 + \frac{\sin(\frac{\pi}{4} - t)}{\cos(\frac{\pi}{4} - t)} \right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left(1 + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos t - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos t + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t} \right) dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left(\frac{2 \cos t}{\cos t + \sin t} \right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\ln 2 - \ln \left(\frac{\cos t + \sin t}{\cos t} \right) \right) dt =$$

$$= t \ln 2 \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \operatorname{tg} t) dt$$

I

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{4} \cdot \ln 2 - I \Rightarrow I = \frac{\pi}{8} \cdot \ln 2$$

$$(8) \underbrace{\int_0^1 \frac{\cos^2 \frac{\pi x}{2}}{\sqrt{x-x^2}} dx}_I = \left[\begin{array}{l} t=1-x \\ dx=-dt \\ x=0 \rightarrow t=1 \\ x=1 \rightarrow t=0 \end{array} \right] = - \int_1^0 \frac{\cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi t}{2} \right)}{\sqrt{1-t-(1-t)^2}} dt =$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi t}{2} \right)}{\sqrt{t-t^2}} dt}_I$$

копировано
 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = \sin t$

$$2I = I + I = \int_0^1 \frac{\cos^2 \frac{\pi x}{2}}{\sqrt{x-x^2}} dx + \int_0^1 \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi x}{2} \right)}{\sqrt{x-x^2}} dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}}} = 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} t=2x-1 \\ dx=\frac{1}{2}dt \\ x=0 \rightarrow t=-1 \\ x=1 \rightarrow t=1 \end{array} \right] = \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t \Big|_{-1}^1 = \pi$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2} \quad \square$$

15. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$

решение

За је ово неопређен интеграл решавамо тако
 да сметам $t = \tan \frac{x}{2}$. Овде ми не може да
 се ради јер функција $\tan \frac{x}{2}$ није функција
 на $[0, \pi]$! Срећом, ми можемо лако да
 сређујемо.

На $[0, \pi]$ и на $[\pi, 2\pi]$ функција
 $\tan \frac{x}{2}$ јесте функција па
 овде може сметати

1. Намиш

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{смена за оба} \\ \text{интеграла:} \\ t = \tan \frac{x}{2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2}{1+t^2} dt \\ x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=\pi \Rightarrow t=\pm\infty \\ x=2\pi \Rightarrow t=0 \end{array} \right] = \int_0^{+\infty} \frac{t^2+1}{(3+t^2)(2+t^2)} dt + \int_{-\infty}^0 \frac{t^2+1}{(3+t^2)(2+t^2)} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2+1}{(3+t^2)(2+t^2)} dt = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{3+t^2} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{2+t^2} =$$

ово су
 невојствени
 интеграл
 и тек треба
 да их решимо

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi - \frac{1}{\sqrt{2}} \pi$$

2. Hamek

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)} = \left[\begin{array}{l} t = x - \pi \\ dt = dx \\ x = 0 \rightarrow t = -\pi \\ x = 2\pi \rightarrow t = \pi \end{array} \right] = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{(2+\cos(\pi+t))(3+\cos(\pi+t))} =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{(2-\cos t)(3-\cos t)} = \left[\begin{array}{l} p = \tan \frac{t}{2} \\ \cos t = \frac{p^2-1}{p^2+1} \\ dt = \frac{2dp}{p^2+1} \\ t = -\pi \rightarrow p = -\infty \\ t = \pi \rightarrow p = +\infty \end{array} \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p^2+1}{(3+p^2)(2+p^2)} dp =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\pi - \frac{1}{\sqrt{2}}\pi$$

$\tan \frac{t}{2}$ fəvriyə
objektu
na $(-\pi, \pi)$

ПОГРЕШАН Hamek :

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)} = \left[\begin{array}{l} t = \tan \frac{x}{2} \\ \cos x = \frac{t^2-1}{t^2+1} \\ dx = \frac{2}{t^2+1} dt \\ x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = 2\pi \rightarrow t = 0 \end{array} \right] = \int_0^0 \frac{t^2+1}{(3+t^2)(2+t^2)} dt = 0$$

He mümkün yekun
bu cəmiyyət
 $\tan \frac{x}{2}$ niyə gəlmə-
sənə π , na
niyə objektu
na $(0, 2\pi)$

16. (a) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}$; (б) $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \sin^2 x} dx$ (ТНН1)

решение

(a) I способ:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} =$$

$$\left[\begin{array}{l} t = \tan x \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} x=0 \rightarrow t=0 \\ x=\frac{\pi}{2} \rightarrow t=\pm\infty \\ x=\frac{3\pi}{2} \rightarrow t=\pm\infty \\ x=2\pi \rightarrow t=0 \end{array} \right]$$

если не можем
 $t = \tan x$ для
 $\tan x$ не
определён
на $(0, 2\pi)$

на интервалах
 $(0, \frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}), (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$
для $\tan x$ не
определён,
но можем сделать $t = \tan x$

разделяем
функцию

$$= \int_0^{+\infty} \frac{t^2+1}{t^4+1} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2+1}{t^4+1} dt + \int_{-\infty}^0 \frac{t^2+1}{t^4+1} dt = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2+1}{t^4+1} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + t\sqrt{2} + 1} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} \operatorname{arctg}(t\sqrt{2}+1) + \sqrt{2} \operatorname{arctg}(t\sqrt{2}-1) \Big|_{-\infty}^{+\infty} =$$

сделаем
 $p = t\sqrt{2}+1$

сделаем
 $p = t\sqrt{2}-1$

$$= \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\sqrt{2}\pi$$

II Анализ:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} = \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} = \left[\begin{array}{l} t = \tan \frac{x}{2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \left| \begin{array}{l} x=0 \rightarrow t=0 \\ x=\pi \rightarrow t=\pm\infty \\ x=2\pi \rightarrow t=0 \end{array} \right. \right] =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{2(1+t^2)^3}{(1-t^2)^4 + 16t^4} dt + \int_{-\infty}^0 \frac{2(1+t^2)^3}{(1-t^2)^4 + 16t^4} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2(1+t^2)^3}{(1-t^2)^4 + 16t^4} dt = \dots$$

III Анализ:

Примечание: $\frac{1}{\cos^4(x + \frac{\pi}{2}) + \sin^4(x + \frac{\pi}{2})} = \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x}$

т.е. период логгистической функции је $\frac{\pi}{2}$.

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} = 4 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} =$$

↑ паритет

$$= 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} = \left[\begin{array}{l} t = \tan x \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \end{array} \left| \begin{array}{l} x=0 \rightarrow t=0 \\ x=\frac{\pi}{4} \rightarrow t=1 \end{array} \right. \right] =$$

$$= 8 \int_0^1 \frac{t^2+1}{t^4+1} dt = 8\sqrt{2} \operatorname{arctg}(t\sqrt{2}+1) + 8\sqrt{2} \operatorname{arctg}(t\sqrt{2}-1) \Big|_0^1 =$$

минимум
из 1. пункта

$$= 8\sqrt{2} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1) + 8\sqrt{2} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1) - 8\sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{4} - 8\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 8\sqrt{2} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1) + 8\sqrt{2} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)$$

ПОГРЕШАН НАМИТ:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} = \left[\begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ \dots \\ x=0 \rightarrow t=0 \\ x=2\pi \rightarrow t=0 \end{array} \right] = \int_0^0 \frac{t^2+1}{t^4+1} dt = 0.$$

$$(\text{б}) \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\sin^2 x} dx = \left[\begin{array}{l} t = x - \frac{\pi}{2} \\ dx = dt \\ x=0 \rightarrow t = -\frac{\pi}{2} \\ x=\pi \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right] = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(t+\frac{\pi}{2}) \sin(t+\frac{\pi}{2})}{1+\sin^2(t+\frac{\pi}{2})} dt =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(t+\frac{\pi}{2}) \cos t}{1+\cos^2 t} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{t \cos t}{1+\cos^2 t} dt + \frac{\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1+\cos^2 t} dt =$$

↑
НЕНАПН

↑
НАПН

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{2-\sin^2 t} dt = \left[\begin{array}{l} p = \sin t \\ dp = \cos t dt \\ t=0 \rightarrow p=0 \\ t=\frac{\pi}{2} \rightarrow p=1 \end{array} \right] = \pi \int_0^1 \frac{dp}{2-p^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \ln(p+\sqrt{2}) - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2}-p) \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \ln(1+\sqrt{2}) - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2}-1) - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2}) + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2}) =$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right) \quad \square$$

17. Нека је $I_n = \int_0^1 x^n e^{\lambda x} dx$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(a) Напиши безг рачунају I_n и I_{n-1} , $n \geq 1$;

(б) Израчунај I_3 .

Решење

$$(a) I_n = \int_0^1 x^n e^{\lambda x} dx = \left[\begin{array}{ll} u = x^n & dv = e^{\lambda x} dx \\ du = nx^{n-1} dx & v = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{\lambda} x^n e^{\lambda x} \Big|_0^1 - \frac{n}{\lambda} \int_0^1 x^{n-1} e^{\lambda x} dx =$$

$$= \frac{e^{\lambda}}{\lambda} - \frac{n}{\lambda} I_{n-1}$$

$$(б) I_3 = \frac{e^{\lambda}}{\lambda} - \frac{3}{\lambda} I_2 = \frac{e^{\lambda}}{\lambda} - \frac{3}{\lambda} \left(\frac{e^{\lambda}}{\lambda} - \frac{2}{\lambda} I_1 \right) =$$

$$= \frac{e^{\lambda}}{\lambda} - \frac{3}{\lambda} \left(\frac{e^{\lambda}}{\lambda} - \frac{2}{\lambda} \left(\frac{e^{\lambda}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} I_0 \right) \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^x}{x} - \frac{3e^x}{x^2} + \frac{6e^x}{x^3} - \frac{6}{x^3} I_0 = \\
&= e^x \cdot \frac{x^2 - 3x + 6}{x^3} - \frac{6}{x^3} \cdot \int_0^1 e^{dx} dx = \\
&= e^x \frac{x^2 - 3x + 6}{x^3} - \left(\frac{6}{x^4} e^{dx} \right) \Big|_0^1 = \\
&= e^x \frac{x^2 - 3x + 6}{x^3} - \frac{6e^x}{x^4} + \frac{6}{x^4} = \\
&= e^x \frac{x^3 - 3x^2 + 6x - 6}{x^4} + \frac{6}{x^4} \quad \square
\end{aligned}$$

18. $I(m, n) = \int_0^1 x^m (\ln x)^n dx, \quad m, n \in \mathbb{N}$

per parte

$$\begin{aligned}
I(m, n) &= \int_0^1 x^m (\ln x)^n dx = \left[\begin{array}{ll} u = (\ln x)^n & dv = x^m dx \\ du = \frac{n (\ln x)^{n-1}}{x} dx & v = \frac{1}{m+1} x^{m+1} \end{array} \right] = \\
&= \frac{x^{m+1}}{m+1} \cdot (\ln x)^n \Big|_0^1 - \frac{n}{m+1} \int_0^1 x^m (\ln x)^{n-1} dx = \\
&= \left(\frac{1}{m+1} (\ln 1)^n - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^{m+1}}{m+1} (\ln x)^n \right) \right) - \frac{n}{m+1} I(m, n-1) = \\
&= - \frac{n}{m+1} I(m, n-1).
\end{aligned}$$

$$I(m, n) = -\frac{n}{m+1} I(m, n-1) = \left(-\frac{n}{m+1}\right) \cdot \left(-\frac{n-1}{m+1}\right) I(m, n-2) = \dots$$

$$\dots = \left(-\frac{n}{m+1}\right) \left(-\frac{n-1}{m+1}\right) \dots \left(-\frac{2}{m+1}\right) \left(-\frac{1}{m+1}\right) I(m, 0) =$$

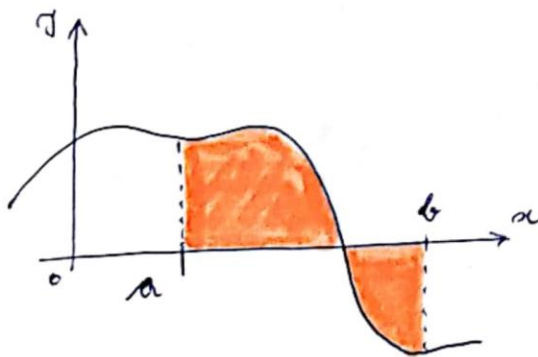
$$= \frac{(-1)^n \cdot n!}{(m+1)^n} I(m, 0)$$

$$I(m, 0) = \int_0^1 x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{m+1}$$

$$\Rightarrow I(m, n) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(m+1)^{n+1}} \quad \square$$

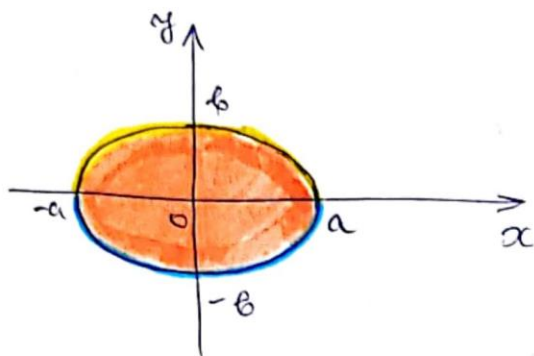
Примена одређених интеграла

1 Површина равнот мена



$$p = \int_a^b |f(x)| dx$$

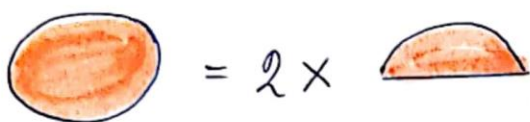
Пример Нати површину елипсе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$.



$$y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)$$

$$y_1 = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

$$y_2 = -b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$



$$P = 2 \cdot \int_{-a}^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = \left[\begin{array}{l} \frac{x}{a} = \sin t \\ dx = a \cos t dt \\ t = \arcsin \frac{x}{a} \end{array} \left| \begin{array}{l} x = -a \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ x = a \rightarrow t = -\frac{\pi}{2} \end{array} \right. \right] =$$

$$= 2b \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot a \cos t dt = 4b \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos^2 t dt =$$

$\uparrow$ nap+9

$$= 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 4ab \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 4ab \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin \pi - 0 \right) = ab\pi \quad \square$$

2 Дужина лука криве

Крива је непрекинуто пресликавање $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$.
(координат може бити $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, али ћемо се ми
бавити само случајем $\mathbb{R}^2$.)

Дужина лука криве $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ даје се
 $f(t) = (x(t), y(t))$ је

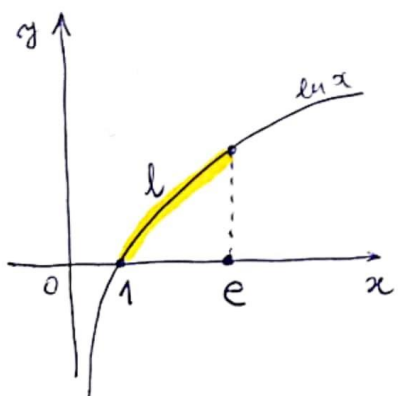
$$l(f) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Специјално, ако је крива график функције $y = f(x)$,
дужина криве $y = f(x)$ за $x \in [a, b]$ је

$$l(y) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Пр
Пример

Наћи дужину лука криве $y = \ln x$, $1 \leq x \leq e$.



$$\begin{aligned} l &= \int_1^e \sqrt{1 + ((\ln x)')^2} dx = \\ &= \int_1^e \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx = \end{aligned}$$

$$= \int_1^e \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx = \int_1^e \frac{x \sqrt{x^2+1}}{x^2} dx = \left[\begin{array}{l} t^2 = x^2 + 1 \\ t dt = x dx \\ x=1 \rightarrow t=\sqrt{2} \\ x=e \rightarrow t=\sqrt{e^2+1} \end{array} \right] =$$

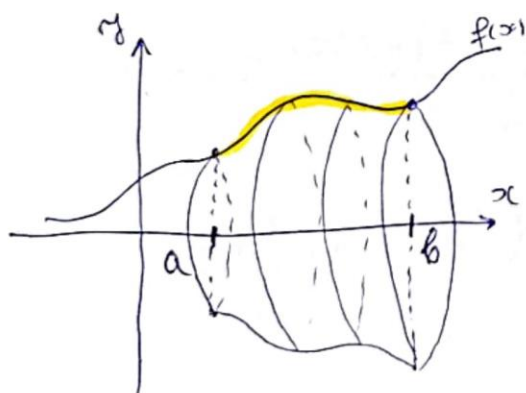
$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^2+1}} \frac{t^2-1+1}{t^2-1} dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^2+1}} \left(1 + \frac{\frac{1}{2}}{t-1} - \frac{\frac{1}{2}}{t+1} \right) dt =$$

$$= \left(t + \frac{1}{2} \ln |t-1| - \frac{1}{2} \ln |t+1| \right) \Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^2+1}} =$$

$$= \sqrt{e^2+1} + \frac{1}{2} \ln (\sqrt{e^2+1}-1) - \frac{1}{2} \ln (\sqrt{e^2+1}+1) -$$

$$- \sqrt{2} - \frac{1}{2} \ln (\sqrt{2}-1) + \frac{1}{2} \ln (\sqrt{2}+1) \quad \square$$

3 Запрещена сферична тела

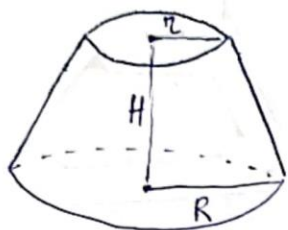


$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

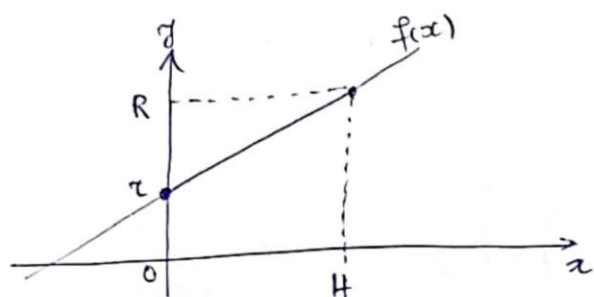
→ протърсено $f(x)$
око x -осе

ПР

Пример Найти заданную вращенную кув



Представим это как поворачивающуюся функцию.



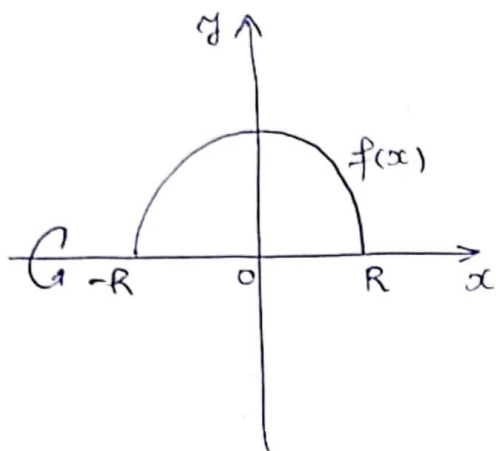
$$f(x) = \frac{R-r}{H} x + r, \quad x \in [0, H]$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^H f^2(x) dx = \pi \int_0^H \left(\frac{R-r}{H} x + r \right)^2 dx = \pi \int_0^H \left(\left(\frac{R-r}{H} \right)^2 x^2 + \frac{2r(R-r)}{H} x + r^2 \right) dx \\ &= \pi \left(\left(\frac{R-r}{H} \right)^2 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{2r(R-r)}{H} x^2 + r^2 x \right) \Big|_0^H = \\ &= \pi \left(\frac{(R-r)^2}{H^2} \cdot \frac{H^3}{3} + \frac{2r(R-r)}{H} \cdot H^2 + r^2 H - 0 \right) = \\ &= \pi H \cdot \frac{R^2 - 2Rr + r^2 + 3rR - 3r^2 + 3r^2}{3} = \\ &= \frac{\pi H}{3} (R^2 + Rr + r^2) \quad \square \end{aligned}$$

4) Поверхности обрешенные телом

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Пр пример Найти поверхность сферы радиуса R .



$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

Как полукруга вращаем
вокруг x -оси получаем сферу.

$$P = 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2} dx =$$

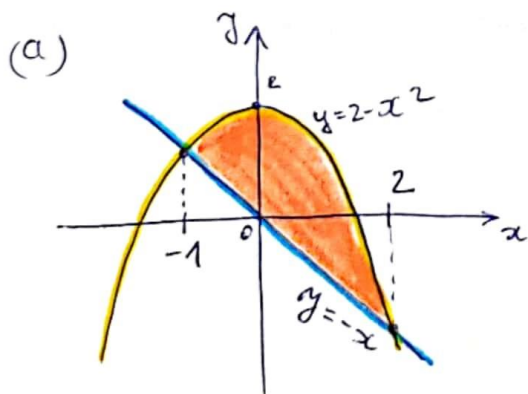
$$= 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = 2\pi R \int_{-R}^R dx = 4\pi R^2 \quad \square$$

19. Найти поверхность фигуры ограниченной кривыми

(а) $y = 2 - x^2$, $x + y = 0$;

(б) $y = x^4 - 2x^2$, $y = 2x^2$.

решение



Определим пересек кривых:

$$-x = 2 - x^2$$

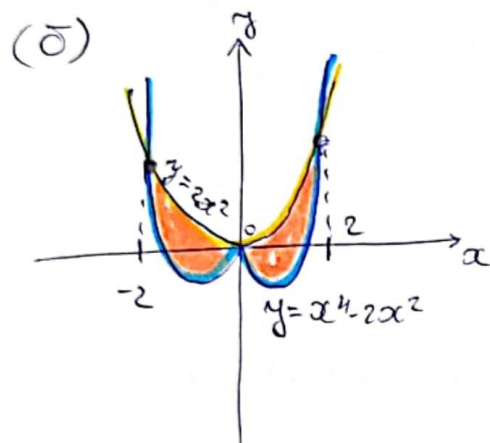
$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$\boxed{x_1 = -1, x_2 = 2}$$

$$P = \int_{-1}^2 (2 - x^2 - (-x)) dx = \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) dx =$$

$$= -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \Big|_{-1}^2 = -\frac{8}{3} + 2 + 4 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{9}{2}$$



Пересек:

$$2x^2 = x^4 - 2x^2$$

$$x^2(x^2 - 4) = 0$$

$$x^2(x - 2)(x + 2) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -2$$

$$P = \int_{-2}^2 (2x^2 - (x^4 - 2x^2)) dx = 2 \int_0^2 (-x^4 + 4x^2) dx =$$

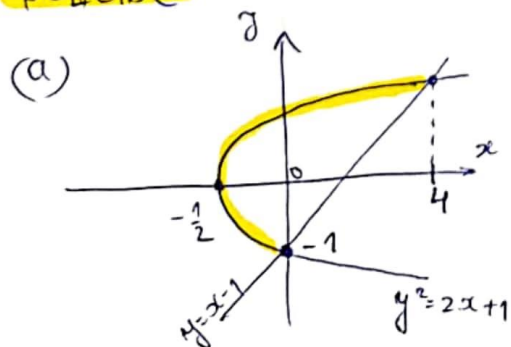
↑
парная

$$= -\frac{2}{5}x^5 + \frac{8}{3}x^3 \Big|_0^2 = -\frac{2}{5} \cdot 32 + \frac{8}{3} \cdot 8 = \frac{128}{15} \quad \square$$

20. (а) Найдите длину дуги кривой на параболе $y^2 = 2x + 1$ отсекающей прямая $x - y = 1$;

(б) Определите длину дуги кривой $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, a > 0$.

решение



Пересек:

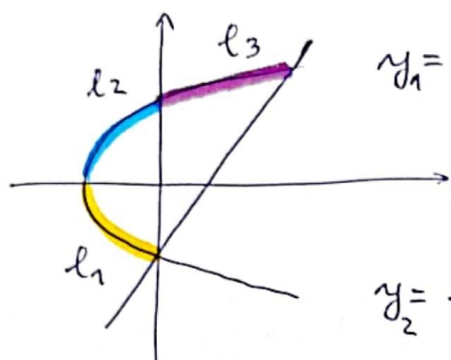
$$2x + 1 = (x - 1)^2$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 4$$

1. Намиш (линеаризација по x)

Криву поделимо на 3 дела:



$y_1 = \sqrt{2x+1}$ — горната горна половина
параболе

$y_2 = -\sqrt{2x+1}$ — долната горна половина
параболе

$$L = L_1 + L_2 + L_3 = 2L_2 + L_3 =$$

$$= 2 \int_{-\frac{1}{2}}^0 \sqrt{1 + (y_1'(x))^2} dx + \int_0^4 \sqrt{1 + (y_1'(x))^2} dx =$$

$$= 2 \int_{-\frac{1}{2}}^0 \sqrt{1 + \frac{1}{2x+1}} dx + \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{1}{2x+1}} dx =$$

$$= 2 \int_{-\frac{1}{2}}^0 \sqrt{\frac{2x+2}{2x+1}} dx + \int_0^4 \sqrt{\frac{2x+2}{2x+1}} dx = \begin{cases} t = \frac{2x+2}{2x+1} \\ x = \frac{2-t^2}{t^2-1} \\ dx = -\frac{2t}{(t^2-1)^2} dt \end{cases} =$$

$$= -4 \int_{+\infty}^{\sqrt{2}} \frac{t^2}{(t^2-1)^2} dt - 2 \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{10}{9}}} \frac{t^2}{(t^2-1)^2} dt = \dots$$

рационална
функција

2. Найдит (интеграция по y)

$$y^2 = 2x + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2} = g(y)$$

$$l = \int_{-1}^3 \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy = \int_{-1}^3 \sqrt{1 + y^2} dy =$$

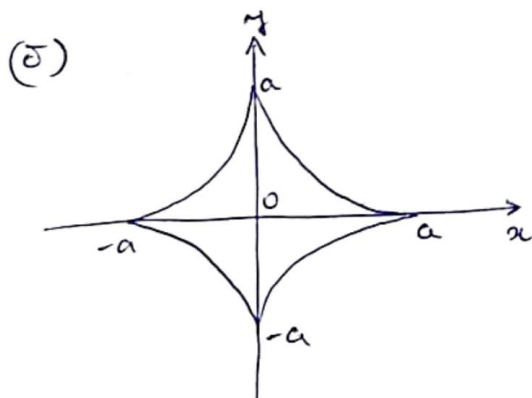
коррктно
задача 26. (а)
из неограниченных
интеграла

$$= \frac{1}{8} (y + \sqrt{y^2 + 1})^2 + \frac{1}{2} \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) - \frac{1}{8} \frac{1}{(y + \sqrt{1 + y^2})^2} \Big|_{-1}^3 =$$

$$= \frac{1}{8} (3 + \sqrt{10})^2 + \frac{1}{2} \ln(3 + \sqrt{10}) - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(3 + \sqrt{10})^2} -$$

$$- \frac{1}{8} (\sqrt{2} - 1)^2 - \frac{1}{2} \ln(\sqrt{2} - 1) + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(\sqrt{2} - 1)^2} =$$

$$= \frac{1 + 3\sqrt{5}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{3 + \sqrt{10}}{\sqrt{2} - 1}\right)$$



Запишем кривую γ
параметрической формой:

$$\mu(t) = (x(t), y(t))$$

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 \quad \text{★}$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}} \in [-1, 1], \text{ па је } \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}} = \cos t.$$

$$\text{Ако } \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{3}} = \sin t$$

$$\text{Закле, } x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, \text{ па је}$$

$$\mu(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t), t \in [0, 2\pi]$$

$$L(\mu) = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9 \cos^4 t \sin^2 t + 9 \sin^4 t \cos^2 t} dt$$

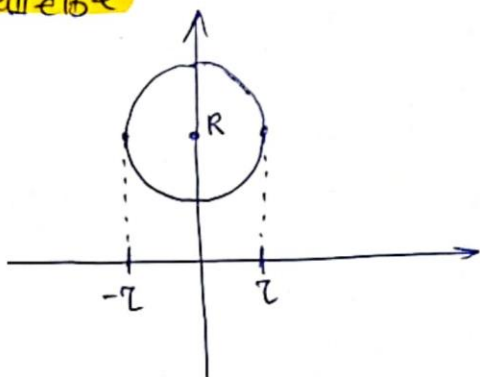
$$= 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^4 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} dt =$$

$$= 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt = 6a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = -3a \cos 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -3a \cdot (-1) - 3a \cdot 1 = 6a \quad \square$$

21. Одредити задрешину торуца.

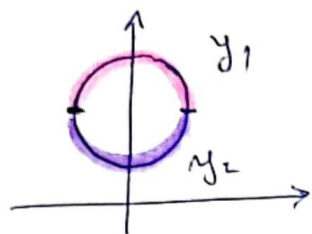
решение



$$(y-R)^2 + x^2 = r^2 \text{ - једначина круга са шире}$$

Торус добијамо кад овај круг заротирамо око x-осе.

Круг је график функције реалне функције реалне променљиве па морамо да га поделимо на 2 дела.



Како заправо ова подела изгледа на торусу?



$$y_1 = R + \sqrt{r^2 - x^2}, \quad y_2 = R - \sqrt{r^2 - x^2}$$

Како рачунамо запремину?

$$V = \underbrace{V_1}_{\text{запуњено } y_1} - \underbrace{V_2}_{\text{запуњено } y_2} = \text{cylinder} - \text{hourglass} = \text{disk}$$

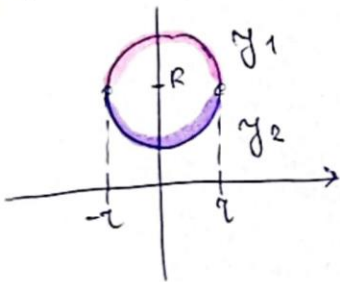
$$V = \pi \int_{-r}^r (R + \sqrt{r^2 - x^2})^2 dx - \pi \int_{-r}^r (R - \sqrt{r^2 - x^2})^2 dx =$$

$$= \pi \int_{-r}^r (R^2 + 2R\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2 - (R^2 - 2R\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2)) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= 4R\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 4rR\pi \int_{-r}^r \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} d\left(\frac{x}{r}\right) = \begin{cases} \frac{x}{r} = \sin t \\ dx = r \cos t dt \\ x = -r \rightarrow t = -\frac{\pi}{2} \\ x = r \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{cases} \\
&= 4r^2R\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t dt = 8r^2R\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \\
&= 8r^2R\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 8r^2R\pi \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
&= 8r^2R\pi \cdot \frac{\pi}{4} = 2r^2R\pi^2 \quad \square
\end{aligned}$$

22. Вычислить площадь поверхности тора.

решение



$P = P_1 + P_2$
 ↑ ↑
 замкнуто замкнуто
 γ_1 γ_2

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= R + \sqrt{r^2 - x^2} \\
\gamma_2 &= R - \sqrt{r^2 - x^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_1 &= 2\pi \int_{-r}^r (R + \sqrt{r^2 - x^2}) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2} dx = \\
&= 2\pi \int_{-r}^r (R + \sqrt{r^2 - x^2}) \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = \\
&= 2\pi \int_{-r}^r \left(\frac{Rr}{\sqrt{r^2 - x^2}} + r \right) dx = 2\pi r x \Big|_{-r}^r + 2\pi \int_{-r}^r \frac{Rr}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx =
\end{aligned}$$

$$= 4\pi r^2 + 2\pi R \int_{-r}^r \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{r})^2}} = 4r^2\pi + 4\pi R \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{r})^2}} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \frac{x}{r} = \sin t \\ dx = r \cos t dt \\ x=0 \rightarrow t=0 \\ x=r \rightarrow t=\frac{\pi}{2} \end{array} \right] = 4r^2\pi + 4\pi R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} dt =$$

$$= 4r^2\pi + 4\pi R \cdot t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4r^2\pi + 2\pi R = 2r\pi(2r+R). \quad \square$$

23. (Определить заперенную площадь криволинейной трапеции функции $f(x) = \sqrt{x \arctg x}$, за $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

решение

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \arctg x dx = \left[\begin{array}{ll} u = \arctg x & dv = x \\ du = \frac{dx}{1+x^2} & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{\pi}{2} x^2 \arctg x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx =$$

$$= \frac{\pi^3}{32} \arctg \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \frac{1}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= \frac{\pi^3}{32} \arctg \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} (x - \arctg x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{\pi^3}{32} \arctg \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \arctg \frac{\pi}{4} \right) \quad \square$$

Умномо ово партије:

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x)$$

$$\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt \right)' = f(b(x)) \cdot b'(x) - f(a(x)) \cdot a'(x)$$

Сада још пар задатака из овог интервала.

24. Докажи да је $F(x) = \int_0^{\sin^2 x} \arcsin \sqrt{t} dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t} dt = \frac{\pi}{4}$,

за $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Решавање

$$\begin{aligned} F'(x) &= \arcsin \sqrt{\sin^2 x} \cdot 2 \sin x \cos x - \arccos \sqrt{\cos^2 x} \cdot 2 \cos x \sin x = \\ &= x \cdot 2 \sin x \cos x - x \cdot 2 \cos x \sin x = 0 \end{aligned}$$

Користимо ово: $\arcsin \sqrt{\sin^2 x} = \arcsin |\sin x| = \arcsin(\sin x) = x$

Елиминација за $\arccos$.

јер $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ и
је $\sin x > 0$

Како је $F'(x) = 0$ на $[0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow F = \text{const}$ на $[0, \frac{\pi}{2}]$

Да би одредили $F(x)$ довољно је да одредимо $F(0)$ (јер је $F = \text{const}$).

$$F(0) = \underbrace{\int_0^0 \arcsin \sqrt{t} dt}_0 + \int_0^1 \arccos \sqrt{t} dt = \left[\begin{array}{l} u = \arccos \sqrt{t} \quad dw = dt \\ du = \frac{-1}{\sqrt{1-t}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \quad v = t \end{array} \right] =$$

$$= \underbrace{t \arccos \sqrt{t}}_0 \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1-t}} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{\frac{t}{1-t}} dt =$$

$$= \left[\begin{array}{l} p^2 = \frac{t}{1-t} \\ t = \frac{p^2}{1+p^2} \\ dt = \frac{2p dp}{(1+p^2)^2} \end{array} \left| \begin{array}{l} t=0 \rightarrow p=0 \\ t=1 \rightarrow p=+\infty \end{array} \right. \right] = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} p \cdot \frac{2p}{(1+p^2)^2} dp =$$

3 ағ. 18 жәп. 27
 3 ағ. * жәп. 14

$$= \int_0^{+\infty} \frac{p^2 + 1 - 1}{(1+p^2)^2} dp = \int_0^{+\infty} \frac{dp}{1+p^2} - \int_0^{+\infty} \frac{dp}{(1+p^2)^2} =$$

$$= \operatorname{arctg} p \Big|_0^{+\infty} - \left(\frac{p}{2(p^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} p \right) \Big|_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0 - \left(0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - 0 - \frac{1}{2} \cdot 0 \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Закле, $F(x) = \frac{\pi}{4}$ на $[0, \frac{\pi}{2}]$ ■

25. Определити $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}$

решение

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt} \stackrel{\text{Л.Н.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot \left(\int_0^x e^{t^2} dt\right) \cdot e^{x^2}}{e^{2x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \int_0^x e^{t^2} dt}{e^{x^2}} \stackrel{\text{Л.Н.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 e^{x^2}}{e^{x^2} \cdot 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

26. Определити $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_1^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt$

решение Датио мисел је једнак миселу:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_1^x \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_1^x \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt}{\sqrt{x}} \stackrel{\text{Л.Н.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 2$$

копирајте

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

27. Определити x за које функција $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{t} \ln\left(\frac{t-1}{9}\right) dt$ доноси максималну вредност на $(1, +\infty)$.

решение $\frac{1}{t} \ln\left(\frac{t-1}{9}\right)$ је непр., па је F густојединачна на $[x, x^2]$, нај. вредност $x \in (1, +\infty)$, F је губ. на $(1, +\infty)$

$$F'(x) = \left(\int_x^{x^2} \frac{1}{t} \ln\left(\frac{t-1}{9}\right) dt \right)' = \frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{x^2-1}{9}\right) \cdot 2x - \frac{1}{x} \ln\left(\frac{x-1}{9}\right) \cdot 1 =$$

$$= \frac{1}{x} \ln\left(\frac{x^2-1}{9}\right)^2 - \frac{1}{x} \ln\left(\frac{x-1}{9}\right) = \frac{1}{x} \cdot \ln \frac{(x-1)^2(x+1)^2}{\frac{81}{\frac{x-1}{9}}} =$$

$$= \frac{1}{x} \ln \frac{(x-1)(x+1)^2}{9} \quad \leftarrow \text{предела не определяем}$$

тут и знак не фикс

убек
позитивно

$$F'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln \frac{(x-1)(x+1)^2}{9} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+1)^2}{9} > 1$$

$$(x-1)(x^2+2x+1) > 9$$

$$x^3+x^2-x-1 > 9$$

$$x^3+x^2-x-10 > 0$$

$$x^3+3x^2+5x-2x^2-6x-10 > 0$$

$$x(x^2+3x+5) - 2(x^2+3x+5) > 0$$

$$(x-2)(x^2+3x+5) > 0$$

Нема реальных
корней
свуда позитивно

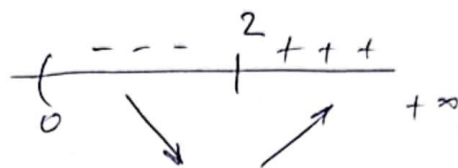
$$x-2 > 0$$

$$\boxed{x > 2}$$

$$\text{Закле, } F'(x) > 0 \text{ за } x > 2$$

$$F'(x) < 0 \text{ за } x < 2$$

$$F'(x) = 0 \text{ за } x = 2$$



$\Rightarrow F$ достиже минимум у $x=2$. ■

Несвојствени интеграл

Дефиниција Нека је f дефинисана на $[a, b)$ и интегрална на сваком $[a, \beta] \subset [a, b)$ (где је $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, сингуларна функција f). Несвојствени интеграл функције f је

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\beta \rightarrow b} \int_a^{\beta} f(x) dx$$

Ако овај лимес постоји кажемо да интеграл конвергира а иначе дивергира.

Елимина, ако је f деф. на $(a, b]$, где је a сингуларна, онда је

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow a} \int_{\alpha}^b f(x) dx.$$

Несвојствени интеграл $\int_a^b f(x) dx$ са сингуларитетом f конвертира, ако и само ако $\int_c^b f(x) dx$ конв. за све $c \in (a, b)$

Ако су a и b сингуларитети, онда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad c \in (a, b)$$

Дефиниција Несвојствени интеграл $\int_a^b f(x) dx$ апсолутно конвертира ако конвертира $\int_a^b |f(x)| dx$.

Користимо:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \quad \text{конвертира за } \alpha < 1$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad \text{конвертира за } \alpha > 1$$

Теорема (I поредбени критеријум)

Нека су $f, g: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ непрекинуте и $g \geq 0$, $0 \leq f(x) \leq g(x)$, за свако $x \in [a, b)$.

1 Ако $\int_a^b g(x) dx$ конв., онда $\int_a^b f(x) dx$ конв.;

2 Ако $\int_a^b f(x) dx$ див., онда $\int_a^b g(x) dx$ див.

Напомена: Ако $\int_a^b f(x) dx$ конв. не знамо ништа о конвергенцији $\int_a^b g(x) dx$. И слично, ако $\int_a^b g(x) dx$ див., не знамо ништа о $\int_a^b f(x) dx$.

Теорема (II поређеба критеријум)

Нека су $f, g: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ непрекинуте и позитивне и нека је $c = \lim_{\beta \rightarrow b-} \frac{f(\beta)}{g(\beta)}$. Тада,

1 Ако је $0 < c < +\infty$, онда су $\int_a^b f(x) dx$ и $\int_a^b g(x) dx$ еквивалентни (тј. или оба конв. или оба див.)

2 Ако је $c = 0$ и $\int_a^b g(x) dx$ конв., онда $\int_a^b f(x) dx$ конв.

3 Ако је $c = \infty$ и $\int_a^b f(x) dx$ конв., онда $\int_a^b g(x) dx$ конв.

1. (a) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$ (b) $\int_0^1 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) dx$

Peilweise

(a) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_2^{\beta} \frac{dx}{(x+2)(x-1)} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \int_2^{\beta} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right) dx =$

Сингулярный
в $+\infty$

$= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \left(\ln|x-1| - \ln|x+2| \right) \Big|_2^{\beta} =$

$= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \left(\ln(\beta-1) - \ln(\beta+2) - \ln 1 + \ln 4 \right) =$

$= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} \underbrace{\ln \frac{\beta-1}{\beta+2}}_{\downarrow 0} + \frac{\ln 4}{3} \right) = \frac{\ln 4}{3}$

Результат: то что мы и искали:

$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2} = \frac{1}{3} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x+2}$

пер оба два интеграла проверяю

(b) $\int_0^1 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \int_{\alpha}^1 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \quad dv = dx \\ du = \frac{x}{x+1} \cdot \frac{-1}{x^2} dx \quad v = x \end{array} \right]$

Сингулярный
в 0

$= \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \left(x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \Big|_{\alpha}^1 + \int_{\alpha}^1 \frac{dx}{x+1} \right) =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\ln 2 - x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) + \ln(x+1) \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\ln 2 - x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) + \ln 2 - \underbrace{\ln(x+1)}_0 \right) =$$

$$= 2\ln 2 - \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} \stackrel{\substack{\text{н.н.} \\ \frac{\infty}{\infty}}}{=} 2\ln 2 - \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{x}{x+1} \cdot \frac{-1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 2\ln 2 \quad \square$$

2. $\int_0^{\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$

переносим $\int_0^{\infty} = \int_0^1 + \int_1^{\infty}$

смены границ 0 и ∞

сумми. гр. 0

сумми. гр. ∞

I_1 I_2

$$I_1 = \lim_{x \rightarrow 0+} \int_x^1 \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \end{array} \quad \begin{array}{l} dv = \frac{x dx}{(1+x^2)^2} \\ v = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \end{array} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{\ln x}{1+x^2} \Big|_x^1 + \frac{1}{2} \int_x^1 \frac{dx}{x(x^2+1)} \right) =$$

рациональная функция

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \int_x^1 \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} \right) dx \right) =$$

$$= \lim_{d \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{2} \frac{\ln d}{1+d^2} + \frac{1}{2} \left(\ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right) \Big|_d^1 \right) =$$

$$= \lim_{d \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{2} \frac{\ln d}{1+d^2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \ln 2 - \ln d + \frac{1}{2} \ln(d^2+1) \right) \right) =$$

$$= \lim_{d \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{2} \ln d \cdot \frac{-d^2}{1+d^2} - \frac{1}{4} \ln 2 + \underbrace{\frac{1}{4} \ln(d^2+1)}_{\downarrow 0} \right) =$$

$$= -\frac{1}{4} \ln 2 - \frac{1}{2} \lim_{d \rightarrow 0+} \frac{\ln d}{\frac{1+d^2}{d^2}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} -\frac{1}{4} \ln 2 - \frac{1}{2} \lim_{d \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{d}}{\frac{-2}{d^3}} = -\frac{1}{4} \ln 2$$

$$I_2 = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_1^{\beta} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx = \left[\begin{array}{ll} u = \ln x & dv = \frac{x dx}{(1+x^2)^2} \\ du = \frac{dx}{x} & v = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \end{array} \right] =$$

$$= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(-\frac{\ln x}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \Big|_1^{\beta} + \frac{1}{2} \int_1^{\beta} \frac{dx}{x(1+x^2)} \right) =$$

$$= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(-\frac{\ln \beta}{2(1+\beta^2)} + \frac{1}{2} \left(\ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right) \Big|_1^{\beta} \right) =$$

$$= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\underbrace{-\frac{\ln \beta}{2(1+\beta^2)}}_{\downarrow 0} + \frac{1}{2} \left(\ln \beta - \frac{1}{2} \ln(1+\beta^2) + \frac{1}{2} \ln 2 \right) \right) =$$

$$= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} \left(\underbrace{2 \ln \beta - \ln(1+\beta^2)}_{\ln(\beta^2)} \right) + \frac{1}{4} \ln 2 \right) =$$

$$= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\underbrace{\frac{1}{4} \cdot \ln \left(\underbrace{\frac{\beta^2}{1+\beta^2}}_{\downarrow 1} \right)}_{\downarrow 0} + \frac{1}{4} \ln 2 \right) = \frac{1}{4} \ln 2$$

$$\Rightarrow I = I_1 + I_2 = -\frac{1}{4} \ln 2 + \frac{1}{4} \ln 2 = 0. \quad \square$$

3. $\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2} dx$

перейдем

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2} dx = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^{\beta} \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2} dx =$$

считаем предел
по ∞

$$= \left[\begin{array}{l} u = \ln(1+x+x^2) \\ du = \frac{1+2x}{1+x+x^2} dx \end{array} \quad \begin{array}{l} dv = \frac{dx}{(1+x)^2} \\ v = -\frac{1}{1+x} \end{array} \right] =$$

раскладываем
на дроби

$$= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(-\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x} \Big|_0^{\beta} + \int_0^{\beta} \frac{1+2x}{(1+x)(1+x+x^2)} dx \right) =$$

$$= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(-\frac{\ln(1+\beta+\beta^2)}{1+\beta} + \int_0^{\beta} \left(\frac{x+2}{x^2+x+1} - \frac{1}{x+1} \right) dx \right) =$$

$$= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(-\frac{\ln(1+\beta+\beta^2)}{1+\beta} + \frac{1}{2} \int_0^{\beta} \left(\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{3}{x^2+x+1} \right) dx - \ln|x+1| \Big|_0^{\beta} \right) =$$

$t = x^2+x+1$

$t = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$

$$= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(-\frac{\ln(1+\beta+\beta^2)}{1+\beta} - \ln(1+\beta) + \left(\frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) \Big|_0^{\beta} \right) =$$

$$= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(-\frac{\ln(1+\beta+\beta^2)}{1+\beta} - \ln(1+\beta) + \frac{1}{2} \ln(\beta^2+\beta+1) + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2\beta+1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{6} \right)$$

$\downarrow$
 $\sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{2}$

$$= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(-\frac{\ln(1+\beta+\beta^2)}{1+\beta} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\beta^2+\beta+1}{(1+\beta)^2} \right) \right) + \frac{\sqrt{3}\pi}{3} \overset{\substack{\text{л.п.} \\ \text{"} \frac{\pi}{2} \text{"}}}{=}$$

$\downarrow$
 0

$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \underbrace{\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\frac{2\beta+1}{\beta^2+\beta+1}}{1}}_0 = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \quad \blacksquare$$

4. Виконайте конверсію інтеграла:

(а) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$; (б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$; (в) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; (г) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

Решение

$$(а) \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$$

$\frac{1}{1+x^3}$ је непрекиднa на $[0, 1]$, па је $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} < \infty$.

У $\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ сингуларитет је ∞ .

Како је $\frac{1}{1+x^3} \sim \frac{1}{x^3}$ кад $x \rightarrow \infty$ (тј. два интеграла

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^3} \sim \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$ су еквивалентни јер $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^3+1}}{\frac{1}{x^3}} = 1$)

и како $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$ конвергује, то конвергује и $\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$.

$\Rightarrow$ конвергује $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$.

Напомена: О тј. сингуларитет за $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$, али јесће за $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3}$, па ако због тога дамо интеграл поделити на два.

$$(c) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \leftarrow \boxed{\text{сингуларитет је 1}} = \left[\begin{array}{l} t=1-x \\ dt=-dx \\ x=0 \rightarrow t=1 \\ x=1 \rightarrow t=0 \end{array} \right] = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int_0^1 \frac{dt}{t^{1/2}} < \infty$$

јер $\frac{1}{2} < 1$.

$$(c) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \leftarrow \boxed{\text{сингуларитет је 1}} = \left[\begin{array}{l} t=1-x \\ dt=-dx \\ x=0 \rightarrow t=1 \\ x=1 \rightarrow t=0 \end{array} \right] = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(2-t)}}$$

убедимо се да је
он сингуларитет
око у 0, а не
у 1

Како је $\frac{1}{\sqrt{2-t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}$, $t \rightarrow 0$ и како $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ конвергира,
 то конвертира и дати интеграл.

(2) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x^2+1}}$ ← сингуларитет је ∞

1. Начин (1. поређење крив.)

$$x^2+1 > x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > x \quad (\text{јер } x \in (1, \infty), \text{ па } |x| = x)$$

$$\Rightarrow x \sqrt{x^2+1} > x^2 \Rightarrow \frac{1}{x \sqrt{x^2+1}} < \frac{1}{x^2}$$

Како $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ конвергира, то конвертира и дати
 интеграл.

2. Начин (2. поређење криверација)

$$\frac{1}{x \sqrt{x^2+1}} \sim \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}, \quad x \rightarrow \infty, \text{ па како } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ конв.,}$$

то конв. и дати интеграл. ■

5. Ишитајте конвергенцију интеграла

(a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+e^x}$; (б) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+x}}$

решење

(a) сингуларитет је ∞ . Зналимо да је e^x много

Фрже ер x^2 (и ер дило кѳт полиномѳ) пѳ хѳкѳмо
 гѳ пѳ уѳпорѳдѳмо сѳ x^2 .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \infty \Rightarrow (\exists x_0 \in (0, \infty)) (\forall x \geq x_0) e^x \geq x^2$$

$$\Rightarrow e^x + 1 \geq x^2 + 1 \Rightarrow \frac{1}{e^x + 1} \leq \frac{1}{x^2 + 1} \quad (*)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+e^x} = \underbrace{\int_0^{x_0} \frac{dx}{1+e^x}}_{\text{кѳнѳ. гѳр}} + \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{1+e^x}$$

$\frac{1}{1+e^x}$ гѳ нѳр.
 нѳ $[0, x_0]$

Имѳмо $\frac{1}{x^2+1} \sim \frac{1}{x^2}$, $x \rightarrow \infty$, пѳ кѳкѳ $\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ кѳнѳ, пѳ нѳ
 рѳнѳу 1. пѳр. крѳнѳ. кѳнѳ. $\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$, а рѳнѳ нѳ рѳнѳу
 2. пѳр. крѳнѳ. зѳ $(*)$ кѳнѳ. и $\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{e^x+1}$, пѳ кѳнѳ,
 и гѳнѳ нѳнѳ.

$$(8) \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+x}} = \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^4+x}}}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+x}}}_{I_2}$$

синѳгарѳиѳѳ
 у 0 и ∞

$\frac{1}{\sqrt{x^4+x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \rightarrow 0$ и $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ кѳнѳ. $\Rightarrow I_1$ кѳнѳ. нѳ
 рѳнѳу 2. пѳр. крѳнѳ.

$$\frac{1}{\sqrt{x^4+x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x^4}} = \frac{1}{x^2}, x \rightarrow \infty \sim \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ кoнв.} \Rightarrow I_2 \text{ кoнв. на} \\ \text{оснoвy пop. кp.}$$

Какo I_1 и I_2 кoнв., тo кoнв. и дaтe мнo. $\square$

6. Иcтoтaт кoнвepгeнцyю интeгрaлa

$$(a) \int_1^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) dx ; (b) \int_1^2 \frac{dx}{\ln x} ; (b) \int_0^{\pi/2} \tan x dx$$

решeтe

(a) сит. je ∞

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = 1 \Rightarrow \ln(1+\frac{1}{x}) \sim \frac{1}{x}, x \rightarrow \infty, a$$

кaкo $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ дyб., тo дyб. и дaтe мнo. нa

oснoвy 2. пop. кpм.

(b) сит. je 1.

кoрисaтeмo
 $\ln(1+x) \sim x, x \rightarrow 0$

$$\ln x = \ln(1+(x-1)) \sim x-1, x \rightarrow 1$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x-1} = \left[\begin{array}{l} t = x-1 \\ dt = dx \\ x=1 \rightarrow t=0 \\ x=2 \rightarrow t=1 \end{array} \right] = \int_0^1 \frac{dt}{t} \text{ - дyб., нa дyб. и дaтe} \\ \text{мнo. нa oснoвy} \\ \text{2. пop. кp.}$$

(b) сит. je $\frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\pi/2} \tan x dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{2} - x \\ dt = -dx \\ x=0 \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} \rightarrow t=0 \end{array} \right] = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-t)}{\cos(\frac{\pi}{2}-t)} dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t} dt \quad \leftarrow \text{лиміт } 0$$

$$\frac{\cos t}{\sin t} \sim \frac{1}{t}, \quad t \rightarrow 0 \sim \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{t} \text{ губ.} \Rightarrow \text{губ. зліт } \text{літ.}$$

на основі 2-го р. кр. ■

Постановка задачі 1:

$$\sin x \sim x, \quad x \rightarrow 0$$

$$\ln(1+x) \sim x, \quad x \rightarrow 0$$

$$\cos x \sim 1, \quad x \rightarrow 0$$

$$\operatorname{arctg} x \sim x, \quad x \rightarrow 0$$

$$\operatorname{arctg} x \sim \frac{\pi}{2}, \quad x \rightarrow +\infty$$

$$e^x \sim 1+x, \quad x \rightarrow 0$$

літ.

7. Установити конвергенцію інтеграла

$$(a) \int_2^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^3} dx; \quad (b) \int_0^{2021} \frac{\sqrt{x} \ln(1+x)}{\operatorname{arctg}(x^{3/2}) \sin \sqrt{x}} dx$$

(ТНН 2)

Решение

(a) літ. $\rightarrow \infty$.

$$\text{Умова } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \text{ то } \ln x \leq x \text{ за } x \geq x_0 \in (2, \infty)$$

$$\Rightarrow \frac{\ln x}{1+x^3} \leq \frac{x}{1+x^3} \sim \frac{1}{x^2}, x \rightarrow \infty$$

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ кoнв., лa кoнв. } \int_2^{\infty} \frac{x dx}{1+x^3} \text{ на oснoвy 2. пop. кp,}$$

а пoтeм на oснoвy 1. пop. кp. кoнв. и гaтoм мнe.

(8) cингуляpнoстeй у вpeднocтeй $x \in [0, 2021]$ зa кoгo je $\sin \sqrt{x} = 0$, a мo je $\sqrt{x} = k\pi$ тo. $x = k^2 \pi^2$, $0 \leq k \leq 14$ лa гaтoм мнe. гeмнo нa:

$$\int_0^{2021} = \int_0^1 + \int_1^{\pi^2} + \int_{\pi^2}^{2\pi^2} + \int_{2\pi^2}^{4\pi^2} + \int_{4\pi^2}^{10\pi^2} + \dots + \int_{190\pi^2}^{196\pi^2} + \int_{196\pi^2}^{2021}$$

oзнaчeннy cингуляpнoстeй

2a тa $\int_0^{\dots}$ кoнв., пoтoм cвaкa oд oбeх мнe. je кoнв.

oбaчeннo лoгaрифмичecкy фyнкцy $f(x) = \frac{\sqrt{x} \ln(1+x)}{\arctg(x^{3/2}) \sin \sqrt{x}}$ кoнвeргeнцyje, $\int_0^1 f(x) dx$:

$$\left. \begin{array}{l} \ln(1+x) \sim x, x \rightarrow 0 \\ \arctg(x^{3/2}) \sim x^{3/2}, x \rightarrow 0 \\ \sin \sqrt{x} \sim \sqrt{x}, x \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \sim \frac{\sqrt{x} \cdot x}{x^{3/2} \cdot \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}, x \rightarrow 0 \text{ и } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \text{ кoнв., лa кoнв. и } \int_0^1 f(x) dx \text{ на oснoвy 2. пop. кp.}$$

конвергенция $\int_1^{\pi^2} f(x) dx$:

хотено да преобразуваме сингулярните у 0.

$$\int_1^{\pi^2} f(x) dx = \left[\begin{array}{l} t = \pi - \sqrt{x} \\ x = (\pi - t)^2 \\ dx = (2t - 2\pi) dt \\ x = 1 \rightarrow t = \pi - 1 \\ x = \pi^2 \rightarrow t = 0 \end{array} \right] = 2 \int_0^{\pi-1} \frac{(\pi-t)^2 \ln(1+(\pi-t)^2)}{\underbrace{\operatorname{arctg}((\pi-t)^3)}_{\sin t} \cdot \underbrace{\sin(\pi-t)}_{\sin t}} dt$$

$$= 2 \int_0^{\pi-1} \frac{(\pi-t)^2 \ln(1+(\pi-t)^2)}{\underbrace{\operatorname{arctg}((\pi-t)^3) \cdot \sin t}_{g(t)}} dt$$

$$\left. \begin{array}{l} (\pi-t)^2 \sim \pi^2, t \rightarrow 0 \\ \ln(1+(\pi-t)^2) \sim \ln(1+\pi^2), t \rightarrow 0 \\ \operatorname{arctg}((\pi-t)^3) \sim \operatorname{arctg} \pi^3, t \rightarrow 0 \\ \sin t \sim t, t \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow g(t) \sim \frac{\pi^2 \ln(1+\pi^2)}{\operatorname{arctg} \pi^3 \cdot t} \sim \frac{1}{t}, t \rightarrow 0$$

$\sim \int_0^{\pi-1} \frac{dt}{t}$ гув., неа

гув. и $\int_0^{\pi-1} g(t) dt$ не

основу 2. пер. крит.

$\Rightarrow$ гув. и $\int_0^{\pi^2} f(x) dx$. ■

8. (а) Импитатв конв. и израунаит $\int_0^{\infty} \frac{dx}{2 + e^{x/2}}$

(б) Импитатв конв. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x} \cdot \cos x}$

решение

(а) аитугаритет $\text{je } +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{x/2}} = 0 \Rightarrow (\exists x_0 \in (0, +\infty)) (\forall x \geq x_0) x^2 \leq e^{x/2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2 + e^{x/2}} \leq \frac{1}{2 + x^2} \sim \frac{1}{x^2} \text{ и } \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{x^2}, \text{ на конв.}$$

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{2 + e^{x/2}} \text{ на основу 1. пор. крит.}$$

Пакоже, конв. и $\int_0^{\infty} \frac{dx}{2 + e^{x/2}}$, на конв. даитв итв.

Сага да на израунамо.

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{2 + e^{x/2}} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^{\beta} \frac{e^{x/2} dx}{e^{x/2}(2 + e^{x/2})} = \left[\begin{array}{l} t = e^{x/2} \\ 2dt = e^{x/2} dx \\ x=0 \rightarrow t=1 \\ x=\beta \rightarrow t=e^{\beta/2} \end{array} \right] =$$

$$= \lim_{\beta \rightarrow \infty} 2 \int_1^{e^{\beta/2}} \frac{dt}{t(2+t)} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} 2 \int_1^{e^{\beta/2}} \left(\frac{\frac{1}{2}}{t} - \frac{\frac{1}{2}}{t+2} \right) dt = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\ln|t| - \ln|t+2| \right) \Big|_1^{\beta} =$$

рационална
функција

$$= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\underbrace{\ln\left(\frac{\beta}{\beta+2}\right)}_{\downarrow 1} + \ln 3 \right) = \ln 3$$

(8) сингулярностей у 0 и $\frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} = \underbrace{\int_0^1}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{\frac{\pi}{2}}}_{I_2}$$

конвергенция I_1 :

$$\left. \begin{array}{l} \sin x \sim x, x \rightarrow 0 \\ \cos x \sim 1, x \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\sin x} \cos x} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}, x \rightarrow 0 \text{ и}$$

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ контв, по контв. и I_1 на основе 2-го кр.

конвергенция I_2 :

$$\int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x} \cos x} = \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{2} - x \\ dt = -dx \\ x = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 0 \\ x = 1 \rightarrow t = \frac{\pi}{2} - 1 \end{array} \right] = \int_0^{\frac{\pi}{2}-1} \frac{dt}{\sqrt{\cos t} \cdot \sin t}$$

сингулярность
в 0

$$\left. \begin{array}{l} \cos t \sim 1, t \rightarrow 0 \\ \sin t \sim t, t \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\cos t} \cdot \sin t} \sim \frac{1}{t}, t \rightarrow 0 \text{ и } \int_0^{\frac{\pi}{2}-1} \frac{dt}{t} \text{ гув.}$$

на гув. и I_2 на основе 2-го кр.

$\Rightarrow$ гамма-функция. $\blacksquare$

9. У зависности од параметара испитати конв.

$$(a) \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cdot \cos^q x}, \quad p, q \in \mathbb{R}$$

$$(b) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}, \quad p, q \in \mathbb{R}, \quad p < q$$

$$(c) \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^p)}$$

решение

(a) сингуларности у 0 и $\frac{\pi}{2}$

(ако је $p=0$, 0 није синт., ако је $q=0$, $\frac{\pi}{2}$ није синт. па размотримо случај $p, q \neq 0$)

$$\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}}_{I} = \underbrace{\int_0^1}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{\frac{\pi}{2}}}_{I_2} \quad \text{до оу I конв. провери оба } I_1 \text{ и } I_2 \text{ да конв.}$$

конвергенција I_1 :

$$\left. \begin{array}{l} \sin x \sim x, \quad x \rightarrow 0 \\ \cos x \sim 1, \quad x \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{\sin^p x \cos^q x} \sim \frac{1}{x^p} \sim \int_0^1 \frac{dx}{x^p} \text{ конв.}$$

ако је $p < 1$, та I_1 конв. за $p < 1$.

конвергенција I_2 :

$$\int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x} = \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{2} - x \\ dt = -dx \\ x=1 \rightarrow t = \frac{\pi}{2} - 1 \\ x = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 0 \end{array} \right] = \int_0^{\frac{\pi}{2}-1} \frac{dt}{\cos^p t \sin^q t}$$

сингуларности
је 0

$$\left. \begin{array}{l} \cos t \sim 1, t \rightarrow 0 \\ \sin t \sim t, t \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{\cos^p t \sin^q t} \sim \frac{1}{t^q} \sim \int_0^{\frac{\pi}{2}-1} \frac{dt}{t^q} \text{ конв.}$$

За $q < 1$, I_2 конв. За $q > 1$.

Коначно, I конв за $p < 1$ и $q < 1$.

(б) синт. у 0 и ∞ .

$$\int_0^\infty = \underbrace{\int_0^1}_{I_1} + \underbrace{\int_1^\infty}_{I_2}$$

конвергенција I_1 :

$$x^p + x^q \sim x^p, x \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{x^p + x^q} \sim \frac{1}{x^p}, x \rightarrow 0 \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{x^p + x^q}$$

конв. за $p < 1$

конвергенција I_2 :

$$x^p + x^q \sim x^q, x \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{x^p + x^q} \sim \frac{1}{x^q}, x \rightarrow \infty \Rightarrow \int_1^\infty \frac{dx}{x^p + x^q}$$

конв. за $q > 1$.

Коначно, I конв. за $p < 1$ и $q > 1$.

(в) сингуларитет је ∞ .

$$\int_0^\infty = \underbrace{\int_0^1}_{I_1} + \underbrace{\int_1^\infty}_{I_2}$$

Мако 0 није синт. једино синт.
на 2 дела јер хоћемо да користимо
конвергенцију $\int_1^\infty \frac{dx}{x^q}$.

I_1 завжди конв.

конвергенція I_2 :

1° $p = 0$

$$\frac{1}{(1+x^2)(1+x^0)} = \frac{1}{2(1+x^2)} \sim \frac{1}{x^2} \text{ и } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ конв., та конв.}$$

$$\text{и } \int_1^{\infty} \frac{dx}{2(1+x^2)}$$

2° $p < 0$

$$1+x^p \sim 1, x \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{(1+x^2)(1+x^p)} \sim \frac{1}{1+x^2} \sim \frac{1}{x^2}, x \rightarrow \infty \text{ и}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ конв., та конв. и } \int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^p)}$$

3° $p > 0$

$$\frac{1}{(1+x^2)(1+x^p)} \sim \frac{1}{x^{p+2}} \text{ и } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{p+2}} \text{ конв. за } p+2 > 1, \text{ та}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^p)} \text{ конв. за } p > -1$$

Контанто, даїти мнї, конв. за $p \in \mathbb{R}$. □

10. (a) $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(ax)}{x^b} dx$; (б) $\int_0^1 \frac{\arcsin(x^2)}{x^2 \sqrt[3]{1-x^5}} dx$

решение

(a) Сигналаритетин у 0 и ∞ .

$$\int_0^{\infty} = \underbrace{\int_0^1}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{\infty}}_{I_2}$$

конвергенција I_1 :

$$\operatorname{arctg}(ax) \sim ax, x \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\operatorname{arctg}(ax)}{x^b} \sim \frac{a}{x^{b-1}}, x \rightarrow 0$$

$$\int_0^1 \frac{a}{x^{b-1}} dx \text{ кѡв. за } a=0 \text{ или } b < 2, \text{ илито и } I_1.$$

конвергенција I_2 :

$$1^\circ a=0 \Rightarrow \int_1^{\infty} 0 dx = 0 \text{ кѡв.}$$

$$2^\circ a \neq 0$$

$$\operatorname{arctg}(ax) \sim \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sgn}(a), x \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{\operatorname{arctg}(ax)}{x^b} \sim \frac{\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(a)}{x^b}$$

$$\Rightarrow I_2 \text{ кѡв. за } b > 1.$$

Кѡначито, I кѡв. за $b \in (1, 2)$ и $a \in \mathbb{R}$ или

за $a=0$ и $b \in \mathbb{R}$.

(б) снт. у 0 и 1

$$\int_0^1 = \underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}}}_{I_1} + \underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1}_{I_2}$$

конвергенция I_1 :

$$\left. \begin{array}{l} \arcsin(x^2) \sim x^2, x \rightarrow 0 \\ \sqrt[3]{1-x^5} \sim 1, x \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\arcsin(x^2)}{x^\alpha \sqrt[3]{1-x^5}} \sim \frac{1}{x^{\alpha-2}}, \text{ на}$$

I_1 к.в. за $\alpha-2 < 1$, т.е. $\alpha < 3$

конвергенция I_2 :

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\arcsin(x^2)}{x^\alpha \sqrt[3]{1-x^5}} dx = \left[\begin{array}{l} t=1-x \\ dt=-dx \\ x=\frac{1}{2} \rightarrow t=\frac{1}{2} \\ x=1 \rightarrow t=0 \end{array} \right] = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin(1-t)^2}{(1-t)^\alpha \sqrt[3]{1-(1-t)^5}} dt$$

$$\arcsin(1-t)^2 \sim \frac{\pi}{2}, t \rightarrow 0$$

$$(1-t)^\alpha \sim 1, \alpha \rightarrow 0$$

$$\sqrt[3]{1-(1-t)^5} = \sqrt[3]{t^5 - 5t^4 + 10t^3 - 10t^2 + 5t} \sim \sqrt[3]{5t} \sim \sqrt[3]{t}, t \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \frac{\arcsin(1-t)^2}{(1-t)^\alpha \sqrt[3]{1-(1-t)^5}} \sim \frac{\frac{\pi}{2}}{t^{\frac{1}{3}}} \sim \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^{\frac{1}{3}}} \text{ к.в., на}$$

I_2 к.в. за $\alpha \in \mathbb{R}$.

Конечно, даим и т.д. к.в. за $\alpha < 3$. ■

11. Импитант конвергенцију

$$(a) \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^p \ln^2 x}$$

$$(b) \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} dx$$

решење

(a) сит. је ∞

1° $p > 1$

Нека је $1 < \tau < p$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\tau}}{x^p \ln^2 x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\tau-p}}{\ln^2 x} = 0 \Rightarrow \text{за довољно велико}$$

$$x \text{ је } \frac{x^{\tau}}{x^p \ln^2 x} \leq 1, \text{ тј. } \frac{1}{x^{p-\tau} \ln^2 x} \leq \frac{1}{x^{\tau}}$$

Како $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^{\tau}}$ конв. (јер $\tau > 1$), по конв. и $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^p \ln^2 x}$.

2° $p < 1$

Нека је $p < \tau < 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\tau}}{x^p \ln^2 x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\tau-p}}{\ln^2 x} = \infty \Rightarrow \text{за довољно}$$

$$\text{велико } x \text{ је } \frac{x^{\tau}}{x^p \ln^2 x} \geq 1, \text{ тј. } \frac{1}{x^{p-\tau} \ln^2 x} \geq \frac{1}{x^{\tau}}$$

Како $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^{\tau}}$ губ. (јер $\tau < 1$), по губ. и $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^p \ln^2 x}$

3° $p = 1$

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \left[\begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \\ x = 2 \rightarrow t = \ln 2 \\ x = \infty \rightarrow t = \infty \end{array} \right] = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{t^2} - \text{конв. за } 2 > 1.$$

Конечно, дајте мнџ-контв. ако је $p > 1$ или
ако је $p = 1$ и $q > 1$.

Напомена: (a) се може користити та мџноу
без гласа.

(b) анти. је 0

$$\frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} \sim \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, x \rightarrow 0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} (\ln x)^{-1}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} \ln(\frac{1}{x})} = \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{x} \\ dx = -\frac{1}{t^2} dt \\ x=0 \rightarrow t=\infty \\ x=\frac{\pi}{2} \rightarrow t=\frac{2}{\pi} \end{array} \right] =$$

$$= \int_{\frac{2}{\pi}}^{\infty} \frac{\frac{1}{t^2} dt}{t^{-\frac{1}{2}} \ln t} = \int_{\frac{2}{\pi}}^{\infty} \frac{dt}{t^{3/2} \ln t} \quad \text{конв на основу}$$

гласа (a) јер је $p = \frac{3}{2} > 1$.

Морали смо да уведемо мџну $t = \frac{1}{x}$ и

намештило да интегралниот бџе ∞ да

бисмо применили (a). ■

Гамма функција

$$\Gamma : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$$

$$\Gamma(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} x^{x-1} e^{-x} dx$$

својине:

1 $\Gamma(1) = 1$

2 $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$, $x > 0$

специјално $\Gamma(n) = (n-1)!$, $n \in \mathbb{N}$

3 $\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$, $x \in (0, 1)$

специјално $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}}} = \sqrt{\pi}$

Бета функција

$$B : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$$

$$B(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 x^{x-1} (1-x)^{y-1} dx$$

својине:

1 $B(x, y) = \int_0^1 \frac{x^{x-1}}{(1+x)^{x+y}} dx$, $x, y > 0$

2 $B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, $x, y > 0$

12. (a) $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$; (b) $\int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-\sqrt{x}} dx$; (c) $\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^p dx$
 $p > -1$

(d) $\int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-x^3} dx$ (7442); (e) $\int_0^1 x^2 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^3 dx$

proof

(a) $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \left[\begin{array}{l} x^2 = t \\ x = \sqrt{t} \\ dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}} \end{array} \middle| \begin{array}{l} x=0 \rightarrow t=0 \\ x=\infty \rightarrow t=\infty \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt =$

$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$\boxed{\alpha = \frac{1}{2}}$

(b) $\int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-\sqrt{x}} dx = \left[\begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \\ x=0 \rightarrow t=0 \\ x=\infty \rightarrow t=\infty \end{array} \right] = 6 \int_0^{\infty} t^3 \cdot e^{-t} \cdot t^5 dt =$

$\boxed{\alpha = 9}$

$= 6 \int_0^{\infty} t^{9-1} e^{-t} dt = 6 \cdot \Gamma(9) = 6 \cdot 8!$

(c) $\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^p dx = \left[\begin{array}{l} t = \ln \frac{1}{x} \\ x = e^{-t} \\ dx = -e^{-t} dt \end{array} \middle| \begin{array}{l} x=0 \rightarrow t=\infty \\ x=1 \rightarrow t=0 \end{array} \right] = \int_0^{\infty} t^p e^{-t} dt = \Gamma(p+1)$

$\boxed{\alpha = p+1}$

(d) $\int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-x^3} dx = \left[\begin{array}{l} t = x^3 \\ dx = \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}} dt \\ x=0 \rightarrow t=0 \\ x=\infty \rightarrow t=\infty \end{array} \right] = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{3}$

$\boxed{\alpha = \frac{1}{2}}$

$$(g) \int_0^1 x^2 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^3 dx = \left[\begin{array}{l} t = \ln \frac{1}{x} \\ x = e^{-t} \\ dx = -e^{-t} dt \end{array} \middle| \begin{array}{l} x=0 \rightarrow t=\infty \\ x=1 \rightarrow t=0 \end{array} \right] =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-2t} \cdot t^3 e^{-t} dt = \int_0^{\infty} t^3 e^{-3t} dt = \left[\begin{array}{l} p=3t \\ dt = \frac{1}{3} dp \end{array} \middle| \begin{array}{l} t=0 \rightarrow p=0 \\ t=\infty \rightarrow p=\infty \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{\infty} \frac{1}{27} p^3 e^{-p} dp = \frac{1}{81} \cdot \Gamma(4) = \frac{1}{81} \cdot 3! = \frac{2}{27} \quad \square$$

13. (a) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx$; (б) $\int_0^2 x \sqrt[3]{8-x^3} dx$

решение

$$(a) \int_0^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{5}{4}-1}}{(1+x)^{\frac{5}{4}+\frac{3}{4}}} dx \stackrel{\text{Вводятся } \textcircled{1} \text{ за } B}{=} B\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right) \stackrel{\text{Вводятся } \textcircled{2} \text{ за } B}{=}$$

$$\alpha = \frac{5}{4}, \beta = \frac{3}{4}$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{5}{4})\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(2)} = \Gamma\left(\frac{1}{4}+1\right) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \stackrel{\text{Вводятся } \textcircled{2} \text{ за } \Gamma}{=} \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \stackrel{\text{Вводятся } \textcircled{5} \text{ за } \Gamma}{=} \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$$(8) \int_0^2 x \sqrt[3]{8-x^3} dx = 2 \int_0^2 x \sqrt[3]{1-\left(\frac{x}{2}\right)^3} dx = \left[\begin{array}{l} t = \left(\frac{x}{2}\right)^3 \\ x = 2 \sqrt[3]{t} \\ dx = \frac{2}{3} t^{-\frac{2}{3}} dt \end{array} \right] \begin{array}{l} x=0 \rightarrow t=0 \\ x=2 \rightarrow t=1 \end{array}$$

$$= 2 \cdot \frac{2}{3} \int_0^1 2 \cdot t^{\frac{1}{3}} \cdot (1-t)^{\frac{1}{3}} \cdot t^{-\frac{2}{3}} dt = \frac{8}{3} \int_0^1 t^{-\frac{1}{3}} (1-t)^{\frac{1}{3}} dt =$$

$\alpha = \frac{2}{3}, \beta = \frac{4}{3}$

$$= \frac{8}{3} B\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{\Gamma(2)=1} = \frac{8}{3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \Gamma\left(1+\frac{1}{3}\right) \stackrel{\text{свойства } \textcircled{2} \text{ за } \Gamma}{=}$$

$$= \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{3} \Gamma\left(1-\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \stackrel{\text{свойства } \textcircled{3} \text{ за } \Gamma}{=} \frac{8}{9} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{8}{9} \cdot \frac{\pi}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{16\pi}{9\sqrt{3}}$$

свойства
 $\textcircled{3}$ за Γ

14. Определить за koje значения $m, n \in \mathbb{N}$ конвертируется $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx$ и за те значения та изразити.

решение

∞ је сингуларитет

$$\int_0^\infty = \underbrace{\int_0^1}_{I_1} + \underbrace{\int_1^\infty}_{I_2}$$

I_1 конвертира јер нема синг.

конвергенция I_2 :

$$\frac{x^{m-1}}{1+x^n} \sim \frac{x^{m-1}}{x^n} = \frac{1}{x^{n-m+1}}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{n-m+1}} \text{ конв. } \text{зг } n-m+1 > 1, \text{ т.е. } n > m, \text{ т.е.}$$

на основе 2. порябкеной кр. и I_2 конв. за $n > m$.

Сделаю расчет интеграла:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx = \left[\begin{array}{l} x^n = t \\ dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt \end{array} \middle| \begin{array}{l} x=0 \rightarrow t=0 \\ x=\infty \rightarrow t=\infty \end{array} \right] =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{t^{\frac{m-1}{n}}}{1+t} \cdot \frac{1}{n} \cdot t^{\frac{1}{n}-1} dt = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} \frac{t^{\frac{m}{n}-1}}{(1+t)^{\frac{m}{n}+\frac{n-m}{n}}} dt =$$

$$= \frac{1}{n} B\left(\frac{m}{n}, \frac{n-m}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m}{n}\right) \Gamma\left(1-\frac{m}{n}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{\sin\left(\frac{m\pi}{n}\right)} \quad \square$$

15. $\int_0^{\pi/2} \sin^p x \cos^q x dx, \quad p, q > -1$

решение

$$\int_0^{\pi/2} \sin^p x \cos^q x dx = \left[\begin{array}{l} t = \sin x \\ \cos x = \sqrt{1-t^2} \\ dt = \cos x dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} x=0 \rightarrow t=0 \\ x=\frac{\pi}{2} \rightarrow t=1 \end{array} \right] =$$

$$= \int_0^1 t^p (\sqrt{1-t^2})^{2-1} dt = \int_0^1 t^p (1-t^2)^{\frac{2-1}{2}} dt =$$

$$= \left[\begin{array}{l} y = t^2 \\ dt = \frac{dy}{2\sqrt{y}} \end{array} \middle| \begin{array}{l} t=0 \rightarrow y=0 \\ t=1 \rightarrow y=1 \end{array} \right] = \int_0^1 y^{\frac{p}{2}} (1-y)^{\frac{2-1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} dy =$$

$$= \int_0^1 y^{\frac{p-1}{2}} (1-y)^{\frac{2-1}{2}} dy = B\left(\frac{p+1}{2}, \frac{2+1}{2}\right) \quad \square$$

16. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \sqrt[3]{\operatorname{ctg} x} dx$

решение

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \sqrt[3]{\operatorname{ctg} x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^{\frac{1}{3}} dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{7}{3}} x \cdot \sin^{-\frac{1}{3}} x dx \stackrel{\substack{\text{3 cos} \\ 15}}{=} B\left(\frac{-\frac{1}{3}+1}{2}, \frac{\frac{7}{3}+1}{2}\right) =$$

$$= B\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{5}{3})}{\Gamma(2)} = \Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(1+\frac{2}{3}) =$$

$$= \frac{2}{3} \Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(1-\frac{1}{3}) = \frac{2}{3} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2}{3} \frac{\pi}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \quad \square$$

Редови

Бројни редови

Нека је $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ реалних бројева.

Желимо да дефинишемо бесконачни збир

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots$$

Означимо са $S_N \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^N a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_N$

N -ту парцијалну суму реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Дефиниција Ако низ $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ конвертира, кажемо да ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвертира и пишемо $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$

Ако низ $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ дивертира, кажемо да ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивертира.

Теорема Ако редови $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвертирају

1) конвертира и $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$, $c \in \mathbb{R}$ и важи $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$;

2) конвертира и $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ и важи $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Теорема (Необходан услов конвергенције)

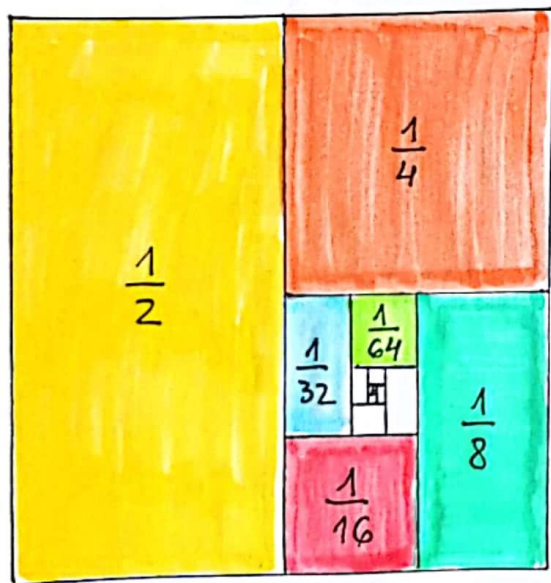
Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвертира, онда $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Напомена: (1) Обрнуто не важи! Ако је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$,
ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ може и да конвертира и да дивертира.

(2) Корисна је контрапозиција теореме:
ако $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, онда ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивертира.

Пример: Како је уопште могуће да бесконачна
сума буде коначан број?!

Обојимо квадрате тако што прво обојимо $\frac{1}{2}$, па $\frac{1}{4}$



па $\frac{1}{8}$, па $\frac{1}{16}$, ... и тако
до бесконачности. На овај
начин ћемо увек имати део
који није обојен спреман
за бојење и када заврши-
мо ову бесконачну процедуру
имаћемо $\uparrow$ обојен квадрат.

Мисамо у субари изради?
Сумирали смо ред:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots = 1$$

$$\text{тј. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

1. Изпитайте конвергенцију реда по формулици

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} ; (b) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) ; (c) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$$

решение

$$(a) \text{ Применимо } \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_N = \sum_{n=1}^N a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{N(N+1)} =$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} =$$

$$= 1 - \frac{1}{N+1}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 1$$

$\Rightarrow$ даим ред конвертира и његова сума је 1.

$$(b) S_N = \sum_{n=1}^N a_n = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[3]{N+1} - \sqrt[3]{N} =$$

$$= \sqrt[3]{N+1} - 1$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{N+1} - 1) = +\infty, \text{ па даим}$$

ред конвертира.

$$(c) S_N = \sum_{n=1}^N a_n = \sum_{n=1}^N \left((\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \right)$$

$$\text{Остало смо } x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$\Rightarrow S_N = \sum_{n=1}^N (x_{n+1} - x_n) = x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + \dots + x_{N+1} - x_N =$$

$$= x_{N+1} - x_1 = \sqrt{N+2} - \sqrt{N+1} - (\sqrt{2} - \sqrt{1})$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = 1 - \sqrt{2} + \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sqrt{N+2} - \sqrt{N+1} \right) \cdot \frac{\sqrt{N+2} + \sqrt{N+1}}{\sqrt{N+2} + \sqrt{N+1}} =$$

$$= 1 - \sqrt{2} + \lim_{N \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{N+2 - (N+1)}{\sqrt{N+2} + \sqrt{N+1}}}_0 = 1 - \sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ дати ред конвертира и збир му је $1 - \sqrt{2}$. $\blacksquare$

2. Ишитајте конвергенцију реда по дефиницији

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$; (б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$; (в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

(г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)\dots(n+p)}$

решење

(a) $S_N = \sum_{n=1}^N (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^N = \begin{cases} 0, & N \text{ парно} \\ -1, & N \text{ непарно} \end{cases}$

Закључујемо да $S_N = (-1, 0, -1, 0, -1, 0, \dots)$ а овај низ не конвертира, па ред не конвертира и дати ред.

(б) Применимо $\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right)$ 

Зато смо можемо рећи да наш ред конвертира као ред

линейных рациональных ф-х, запишем:

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{A}{3n-2} + \frac{B}{3n+1},$$

Найдем A и B и получим 

Оставим $x_n := \frac{1}{3n-2}$. Тогда же

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^N a_n = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right) = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^N (x_n - x_{n+1}) = \\ &= \frac{1}{3} (x_1 - x_2 + x_2 - x_3 + x_3 - x_4 + \dots + x_N - x_{N+1}) = \\ &= \frac{1}{3} (x_1 - x_{N+1}) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3 \cdot 1 - 2} - \frac{1}{3N+1} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3N}{3N+1} = \frac{N}{3N+1} \end{aligned}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{3N+1} = \frac{1}{3}, \text{ по правилу Лопиталя}$$

и сумма ряда $\frac{1}{3}$.

$$(b) \text{ Примем } \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\text{Оставим } x_n := \frac{1}{n^2}$$

$$S_N = \sum_{n=1}^N a_n = \sum_{n=1}^N (x_n - x_{n+1}) = x_1 - x_{N+1} = 1 - \frac{1}{(N+1)^2}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{(N+1)^2} \right) = 1, \text{ по правилу Лопиталя}$$

и сумма ряда 1 .

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)} &= \frac{1}{p} \cdot \frac{p+n-n}{n(n+1)\dots(n+p)} = \\
 &= \frac{1}{p} \left(\underbrace{\frac{1}{n(n+1)\dots(n+p-1)}}_{\substack{\parallel \\ x_n}} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+p)} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_N &= \sum_{n=1}^N a_n = \frac{1}{p} \sum_{n=1}^N (x_n - x_{n+1}) = \frac{1}{p} (x_1 - x_{N+1}) = \\
 &= \frac{1}{p} \left(\frac{1}{p!} - \frac{1}{(N+1)(N+2)\dots(N+p)} \right)
 \end{aligned}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \frac{1}{p \cdot p!}, \text{ па јави ред конв. и сумирају}$$

$$\text{је } \frac{1}{p \cdot p!} \quad \blacksquare$$

3. Сумирајте редове

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n; \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 2^n, |2| < 1; \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{3^n}; \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$$

решење

(a) Ово је геометријски ред.

$$\begin{aligned}
 S_N &= 2 + 2^2 + \dots + 2^N \\
 2 \cdot S_N &= 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{N+1}
 \end{aligned} \quad \ominus$$

$$(1-2) S_N = 2 - 2^{N+1}$$

$$S_N = \frac{2 - 2^{N+1}}{1-2} = \frac{2}{1-2} \cdot (1 - 2^{N+1})$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \frac{q}{1-q} \left(1 - \lim_{N \rightarrow \infty} q^{N+1} \right) = \begin{cases} \frac{q}{1-q}, & |q| < 1 \\ +\infty, & q \geq 1 \\ \text{не существует}, & q \leq -1 \end{cases}$$

Закле, аритметички ред конвер. ако је $|q| < 1$ и тада му је сума $\frac{q}{1-q}$.

$$\begin{aligned} (8) \quad S_N &= q + 2q^2 + 3q^3 + \dots + Nq^N \\ qS_N &= q^2 + 2q^3 + 3q^4 + \dots + Nq^{N+1} \end{aligned} \quad \text{---} \quad \ominus$$

$$(1-q)S_N = q + q^2 + q^3 + \dots + q^N - Nq^{N+1} =$$

$$= q \left(1 + q + \dots + q^{N-1} - Nq^N \right) =$$

$$= q \left(\frac{1-q^N}{1-q} - Nq^N \right)$$

$$\Rightarrow S_N = \frac{q}{1-q} \left(\frac{1-q^N}{1-q} - Nq^N \right)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{q}{1-q} \left(\frac{1-q^N}{1-q} - Nq^N \right) = \frac{q}{(1-q)^2}$$

користимо $|q| < 1$,
та $\lim_{N \rightarrow \infty} q^N = 0$ и
 $\lim_{N \rightarrow \infty} Nq^N = 0$

Закле, $\sum_{n=1}^{\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}$.

$$(9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n + \left(\frac{-1}{3} \right)^n \right) \stackrel{(a)}{=} \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} + \frac{\frac{-1}{3}}{1 - \left(-\frac{1}{3} \right)} = \frac{7}{4}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \stackrel{(8)}{=} \frac{\frac{1}{3}}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3}{4} \quad \square$$

4. За које $x \in \mathbb{R}$ конвертирају редови

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx) \quad ; \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx) \quad ?$$

решење

(a) Кошихови услов нам је да мора да важи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(nx) = 0 \quad \star$$

Понављајмо $a_{n+1} - a_{n-1}$, где је $a_n = \sin(nx)$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \sin((n+1)x) - \sin((n-1)x) = \\ &= 2 \sin \frac{(n+1)x - (n-1)x}{2} \cdot \cos \frac{(n+1)x + (n-1)x}{2} = \\ &= 2 \sin x \cos(nx) \end{aligned}$$

$$\text{Приметимо } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_{n-1}) = 0 - 0 = 0$$

↑
неопходан
услов
конвергенције

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sin x \cos(nx) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sin x = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(nx) = 0$$

$$\boxed{1^\circ} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sin x = \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2^o \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(nx) = 0 \quad **$$

$$\sin^2(nx) + \cos^2(nx) = 1 \quad / \quad \lim_{n \rightarrow \infty}$$

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(nx) \right)^2 + \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(nx) \right)^2 = 1$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{0 \text{ збр}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{0 \text{ збр}} \quad **$

$$\Rightarrow 0 = 1 \quad \text{?}$$

тј. овај случај је немогућ.

Закључак, да би $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)$ конвертирао, неопходно

је да буде $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, али како је $\sin(kn\pi) = 0$,
и $\sum_{n=1}^{\infty} 0$ конвертира, ово је и јошаван услов.

Закључак: датим ред конвертира, ако је $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

(б) Неопходан услов каже $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(nx) = 0$. *

Означимо $a_n = \cos(nx)$ и повламирајмо a_{2n} .

$$a_{2n} = \cos(2nx) = \cos^2(nx) - \sin^2(nx) \quad / \quad \lim_{n \rightarrow \infty}$$

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\underbrace{\cos^2(nx)}_{0 \text{ збр}} - \sin^2(nx) \right) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(nx) = 0. \quad **$$

Знамо $\sin^2(nx) + \cos^2(nx) = 1$ / $\lim_{n \rightarrow \infty}$

$$\underbrace{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(nx) \right)^2}_{0 \text{ због } \textcircled{x}} + \underbrace{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(nx) \right)^2}_{0 \text{ због } \textcircled{0}} = 1$$

$$\Rightarrow 0 = 1 \quad \text{!}$$

$\Rightarrow$ гачи ред гивертура за свако $x \in \mathbb{R}$. $\square$

5. Доказати да су Низови парцијалних зума

$$(a) S_N = \sum_{n=1}^N \sin(nx); \quad (b) T_N = \sum_{n=1}^N \cos(nx)$$

ограничени осим ако је $x = 2k\pi$ пог (b).

решене

(a) Ако је $x = 2k\pi$, онда $\sin(nx) = 0$, па је $S_N = 0$ $\forall$

Нека је $x \neq 2k\pi$, онда $\sin \frac{x}{2} \neq 0$.

$$S_N = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \sin \frac{x}{2} S_N = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \sum_{n=1}^N \sin \frac{x}{2} \sin(nx) =$$

$$= \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left(\underbrace{\cos\left(\frac{x}{2} - nx\right)}_{x_n} - \underbrace{\cos\left(\frac{x}{2} + nx\right)}_{x_{n+1}} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} (x_1 - x_{N+1}) = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} \underbrace{\left(\cos \frac{x}{2} - \cos \left(\frac{2N+1}{2} x \right) \right)}_{\leq 2}$$

$$\leq \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \leftarrow \boxed{\text{Не зависи от } N}$$

$\Rightarrow S_N$ је ограничено.

(δ) Ако је $\alpha = 2k\pi$, онда $\cos(n\alpha) = 1$, па је $S_N = N$,
а па није ограничено.

$$T_N = \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} S_N = \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left(\sin \left(\frac{\alpha}{2} + n\alpha \right) + \sin \left(\frac{\alpha}{2} - n\alpha \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left(\underbrace{\sin \left(\frac{2n+1}{2} \alpha \right)}_{\alpha_{n+1}} - \underbrace{\sin \left(\frac{2n-1}{2} \alpha \right)}_{\alpha_n} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{2} \left(\alpha_{N+1} - \alpha_1 \right) = \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{2} \left(\underbrace{\sin \frac{2N+1}{2} \alpha - \sin \frac{\alpha}{2}}_{\leq 2} \right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \leftarrow \boxed{\text{Не зависи от } n}$$

$\Rightarrow T_N$ је ограничено. ■

Редови са позитивним члановима

У сваком случају давамо се редовио $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ где је $a_n \geq 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

Приметимо: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конв. $(\Rightarrow)$ $\lim(S_n)$ је ограничени

ПР пример $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ конвертира за $p < 1$.

Замисли, за $p \leq 0$, $\frac{1}{n^p} \not\rightarrow 0$, па ред див. јер није могућен неопходан услов конвергенције.

За $p \in (0, 1)$:

$$S_N = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{N^p} > \underbrace{\frac{1}{N^p} + \dots + \frac{1}{N^p}}_N = \frac{N}{N^p} = N^{1-p} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty$$

па је (S_n) неограничен и ред дивертира.

Теорема (I поредак критеријум)

Нека је $0 \leq a_n \leq b_n$ за $n \geq n_0$ (n_0 -фиксирано)

1 Ако $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конв., онда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конв.;

2 Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ див., онда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ див.

Теорема (Π поређење критеријуми)

Нека су $a_n, b_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$. Ако је

- 1 $0 < c < +\infty$, онда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ су екви-конвергентни (или оба конв. или оба див.).
- 2 $c = 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конв., онда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конв.
- 3 $c = \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конв., онда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конв.

Теорема (Интегрални критеријуми)

Нека је $f: [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ монотонно опадајућа.

Тада ред $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ конв. ако и само конв. $\int_1^{\infty} f(x) dx$.

Пример Нека је $f(x) = \frac{1}{x^p}$, $p > 1$

Знамо $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ конв., па конв. и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

Ако је $p = 1$, $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ див., па и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ див.

Како спојимо са претходним примером:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ конвертира } \Leftrightarrow p > 1.$$

Теорема (Кошијев тест)

Нека је $a_n \geq 0$ и $L := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$.

- 1 Ако је $L > 1$, ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивертира;
- 2 Ако је $L < 1$, ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвертира;
- 3 Ако је $L = 1$, не знамо да ли ред конв. или не.

Теорема (Даламберов тест)

Нека је $a_n > 0$ за $n \geq n_0$ и $l = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$,

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

- 1 Ако је $l > 1$, ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивертира;
- 2 Ако је $L < 1$, ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвертира;
- 3 Ако је $L = l = 1$, не знамо да ли ред конв. или не.

Напомена: Нисови $\sqrt[n]{a_n}$ и $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ често имају

само једну тачку натамновања, па сви ови

$\liminf_{n \rightarrow \infty}$ и $\limsup_{n \rightarrow \infty}$ буду само $\lim_{n \rightarrow \infty}$.

Стиллінгова апроксимація: $n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}$

Бітто: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конв. $\Leftrightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ конв.

↑
перших n_0 членів
ряду не впливає на
конвергенцію

6. Визначити конвергенцію середніх рядів

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$; (б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$; (в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$; (г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$

$a > 0$

розв'язок

(a) 1. Нами (2. пор. кр.)

$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$, $n \rightarrow \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ див., то див. и дати
рез на основі 2. пор. кр.

2. Нами (по геор.)

$$S_N = \sum_{n=1}^N \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \sum_{n=1}^N (\ln(n+1) - \ln n) = \ln 2 - \ln 1 + \dots + \ln(N+1) - \ln N = \\ = \ln(N+1) - \ln 1 = \ln(N+1)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \ln(N+1) = +\infty \rightarrow \text{дати рез див. по геор.}$$

(δ) Мора да важи: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+a^n} = 0$ да би ред конв.
(Неопходан услов конв.)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+a^n} = \begin{cases} 0, & a > 1 \\ \frac{1}{2}, & a = 1 \\ 1, & 0 \leq a < 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ред див. за $a \leq 1$, а за $a > 1$ треба да
мислимо.

$a > 1$:

$$\frac{1}{1+a^n} \sim \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n, n \rightarrow \infty \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^n \text{ конв. (јер } |\frac{1}{a}| < 1)$$

на основу задатка 3.(а), та конв. и даћи ред
на основу 2. пор. кр.

Закључак:

за $0 \leq a \leq 1$ ред див.

за $a > 1$ ред конв.

$$(b) \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \sim \frac{1}{n}, n \rightarrow \infty \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ див. } \xrightarrow{\text{2. пор. кр.}} \text{ даћи ред див.}$$

$$(r) \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} \sim \frac{1}{n^{3/2}}, n \rightarrow \infty \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \text{ конв. } \xrightarrow{\text{2. пор. кр.}} \text{ даћи ред конв.}$$



7. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!!}$; (б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

решение

Погрешник: $(2n)!! = (2n) \cdot (2n-2) \cdot (2n-4) \cdots 2$

↑
унабавяме нитоже
за по две

(a) Пошто се појавује факторијел пробамо

Замандера: $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!!}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 \cdot (n!)^2 \cdot (2n)!!}{(2n+2) \cdot (2n)!! \cdot (n!)^2} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2} = \infty > 1, \text{ па даме}$$

рез дивертира на основу Замандеровот тест.

(б) $a_n = \frac{n!}{n^n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot n! \cdot n^n}{(n+1)(n+1)^n \cdot n!} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1, \text{ па}$$

даме рез конв. на основу Замандеровот теста.

8. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$; (б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 (\sqrt{2} + (-1)^n)^n}{3^n}$

решение

(a) $a_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n+1}{-2}}\right)^{\frac{n+1}{-2} \cdot \frac{-2}{n+1} \cdot (n-1)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{-2(n-1)}{n+1}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2(n-1)}{n+1}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2} < 1, \text{ по}$$

пред. крив. на основе Критерия Мейера.

(б) $a_n = \frac{n^3 (\sqrt{2} + (-1)^n)^n}{3^n}$

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n^3} (\sqrt{2} + (-1)^n)}{3} \begin{matrix} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{n \text{ парно}} \frac{\sqrt{2}+1}{3} \\ \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{n \text{ не парно}} \frac{\sqrt{2}-1}{3} \end{matrix}$$

оба из них
где также
хотим сказать

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt{2}+1}{3} < 1, \text{ по тому же пред. крив. на}$$

основе Критерия Мейера. $\square$

9. (a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$; (б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}$

решение

$$(\ln n)^{\ln n} = e^{\ln((\ln n)^{\ln n})} = e^{\ln n \cdot \ln(\ln n)} = \left(e^{\ln n}\right)^{\ln(\ln n)} =$$

$$= n^{\ln(\ln n)}$$

Знамо да $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ конв. за $\alpha > 1$, а ми имамо $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln(\ln n)}}$

па очекујемо да овај ред конв.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(\ln n) = \infty$, па постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ т.д.

$$n > n_0 \Rightarrow \ln(\ln n) \geq 2$$

можемо поједноставити 2
да видимо како који
број већи од 1

$$\Rightarrow \frac{1}{n^{\ln(\ln n)}} \leq \frac{1}{n^2} \text{ и } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ конв. , па конв. и}$$

дати ред на основу 1. пор. кр.

$$(o) \quad (\ln n)^{\ln(\ln n)} = e^{\ln((\ln n)^{\ln(\ln n)})} = e^{\ln(\ln n) \cdot \ln(\ln n)} =$$

$$= e^{(\ln(\ln n))^2} \leq e^{\ln n} = n$$

јер је $(\ln(\ln n))^2 \leq \ln n$ $\star$

$$\Rightarrow a_n \geq \frac{1}{n} \text{ и } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ дивергира, па див. и дати ред}$$

на основу 1. пор. кр.

Још да видимо зашто важи $\star$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln(\ln x))^2}{\ln x} \stackrel{\substack{\text{л.н.} \\ \frac{\infty}{\infty}}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln(\ln x) \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln(\ln x)}{\ln x} \stackrel{\substack{\text{л.н.} \\ \frac{\infty}{\infty}}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln(\ln n))^2}{\ln n} = 0$$

$$\Rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \ln n \geq (\ln(\ln n))^2. \quad \square$$

$$\boxed{10. (a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{n}}; \quad (\delta) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{n}\right); \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{x}{n}\right)$$

решение

$$(a) \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{n}} \sim \frac{1}{n}, n \rightarrow \infty \quad (\text{jer je } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1) \quad \text{и}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ глб.} \xrightarrow{\text{2-пор. кр.}} \text{глб. и даљи рел}$$

(б) $\sin \frac{x}{n}$ није сталног знака, а треба нам да је $a_n \geq 0$ да би користили поредбени кр. па имамо случајеве:

$$\boxed{1^\circ x > 0} \Rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) 0 \leq \frac{x}{n} \leq \pi, \text{ и } \sin \frac{x}{n} \geq 0.$$

$$\sin \frac{x}{n} \sim \frac{x}{n} \sim \frac{1}{n}, n \rightarrow \infty \quad (\text{jer } x = \text{const}) \quad \text{и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ глб.}$$

$$\xrightarrow{\text{2-пор. кр.}} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{n}\right) \text{ глб.}$$

$2^\circ x < 0$ симно - $n \geq n_0 \Rightarrow \sin \frac{x}{n} \leq 0$ и

на основу 1° ред $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{-x}{n})$ див. па див.

и ред $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{x}{n}) = - \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{-x}{n})$

$3^\circ x = 0 \Rightarrow \sin \frac{x}{n} = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 0$ конв.

Закључак: даи ред конв. ако $x = 0$.

(б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{n} = 1 \neq 0$ па даи ред див. јер

није испуњен неопходан услов конв. $\square$

11. (а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$; (б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n+3^n}$; (в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+n}$

решенје

(а) $a_n = \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1+\frac{1}{n^2}}}{n+\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n^2}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{n} = 1 \Rightarrow \text{Кошијев тест нам не даје}$$

одговор па испуњујемо неопходан услов.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n \cdot n^{\frac{1}{n}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2 \cdot \frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{e}} = 1 \neq 0$$

по правилу разности. жер ниге нигуьен неохорат
услов катв.

$$(5) a_n = \frac{n^5}{2^n + 3^n}$$

коринтемо $\star$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} = 3$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^5}}{\sqrt[n]{2^n + 3^n}} = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \text{по катв.}$$

на условиу Кошијева
тесту

зашто важи $\star$:

$$\underbrace{3}_{\downarrow 3} = \sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{2^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{3^n + 3^n} = \underbrace{3 \cdot \sqrt[n]{2}}_{\downarrow 3}$$

$$\Rightarrow \text{по т. о 2 Кошијева и } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} = 3.$$

$$(6) a_n = \frac{2^n}{n^2 + n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2 + n + 1}}{\frac{2^n}{n^2 + n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n^2 + n)}{n^2 + 3n + 2} = 2 > 1,$$

по правилу разности. на условиу Даламберовог теста



На стр. 107 смо видети развоје неких ф-ја. Понекад ће нам бити корисни развоји логс функција.

$$\sin x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5), x \rightarrow 0$$

$$\cos x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4), x \rightarrow 0$$

$$\operatorname{tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5), x \rightarrow 0$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5), x \rightarrow 0$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5), x \rightarrow 0$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3), x \rightarrow 0$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3), x \rightarrow 0$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3), x \rightarrow 0$$

нпш.

12. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{x}{n}\right)\right)$; (б) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^n$ (в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n}\right)$

решение

(a) 1° $x=0$: $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos 0) = \sum_{n=1}^{\infty} 0$ ксб.

2° $x \neq 0$

$$1 - \cos \frac{x}{n} \sim 1 - \left(1 + \frac{\frac{x^2}{n^2}}{2!}\right) \sim \frac{1}{n^2}, n \rightarrow \infty \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ ксб.}$$

па ксб. и дајим ред на основу 2. пор. кр.

$$(5) \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^n = e^{\ln \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^n} = e^{n \cdot \ln \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)} \sim$$

$$\sim e^{n \left(-\frac{\ln n}{n} - \frac{\ln^2 n}{2n^2}\right)} = \underbrace{e^{-\ln n}}_{\parallel \frac{1}{n}} \cdot \underbrace{e^{-\frac{\ln^2 n}{2n^2}}}_{\downarrow 1} \sim \frac{1}{n}, n \rightarrow \infty$$

$\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ гев. $\xrightarrow{2. \text{пор. кр.}}$ гев. и гармон. ряд

$$(6) \frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) \sim \frac{1}{2n^2}, n \rightarrow \infty$$

$\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ кев. $\xrightarrow{2. \text{пор. кр.}}$ кев. гармон. ряд. $\square$

13. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n-1}}{n}$; (б) $\sum_{n=1}^{\infty} n^a \sin\left(\frac{1}{n^b}\right) \cdot \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b} (n+b)^{n+a}}$$

решение

(a) короче: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$$\frac{\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n-1}}{n} \cdot \frac{(\sqrt[3]{n})^2 + \sqrt[3]{n} \cdot \sqrt[3]{n-1} + (\sqrt[3]{n-1})^2}{(\sqrt[3]{n})^2 + \sqrt[3]{n} \sqrt[3]{n-1} + (\sqrt[3]{n-1})^2} =$$

$$= \frac{n - (n-1)}{n \left(n^{\frac{3}{2}} + \sqrt[3]{n^2 \cdot n} + (n-1)^{\frac{3}{2}} \right)} \sim \frac{1}{n \cdot n^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}, n \rightarrow \infty$$

и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}}$ кѡнв. 2. пѡр. кр. > кѡнв. и гѡтѡ рѡз.

$$(5) n^a \sin\left(\frac{1}{n^b}\right) \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim n^a \cdot \frac{1}{n^b} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^{b+1-a}}, n \rightarrow \infty$$

и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{b+1-a}}$ кѡнв. за $b+1-a > 1$, па на основу
2. пѡр. кр. гѡтѡ рѡз кѡнв. за $b > a$.

$$(6) \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b} (n+b)^{n+a}} = \frac{n^n}{(n+a)^n} \cdot \frac{1}{(n+a)^b} \cdot \frac{n^n}{(n+b)^n} \cdot \frac{1}{(n+b)^a} =$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{a}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{(n+a)^b} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{b}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{(n+b)^a} \sim \frac{1}{e^a} \cdot \frac{1}{n^b} \cdot \frac{1}{e^b} \cdot \frac{1}{n^a} \sim$$

$$\sim \frac{1}{n^{a+b}}, n \rightarrow \infty$$

кѡришѡм ѡн: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$

Рѡз $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a+b}}$ кѡнв. за $a+b > 1$ 2. пѡр. кр. гѡтѡ рѡз
кѡнв. за $a+b > 1$. ■

14. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\frac{n^2}{2}}$; (5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg n}{n^2+1}$; (6) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln^2 n}$

рѡшѡѡ

(a) 1. Наѡнѡ (1. пѡр. кр.)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{e^{n^2/2}} = 0 \Rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) n^3 \leq e^{\frac{n^2}{2}}$$

$$\Rightarrow n^{-3} \geq e^{-\frac{n^2}{2}} \Rightarrow \frac{1}{n^2} \geq n e^{-\frac{n^2}{2}}$$

$$u \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ конв. } \xrightarrow{\text{1-пор. кр.}} \text{конв. гаусс рел.}$$

2. Намиш (линейналы крив.)

$$f(x) = x e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad f: [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

f жетсе негр. и жон нам пиреда жа суара.

$$f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = (1-x^2) e^{-\frac{x^2}{2}} \leq 0 \text{ на } [1, +\infty)$$

$\Rightarrow f$ суара па можено жа применено линей. кр.

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_1^{\beta} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \left[\begin{array}{l} -\frac{x^2}{2} = t \\ x dx = -dt \\ x=1 \rightarrow t = -\frac{1}{2} \\ x=\beta \rightarrow t = -\frac{\beta^2}{2} \end{array} \right] = \\ &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\beta^2}{2}}^{-\frac{1}{2}} e^t dt = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(e^{-\frac{1}{2}} - \underbrace{e^{-\frac{\beta^2}{2}}}_{\downarrow 0} \right) = \frac{1}{\sqrt{e}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ линей. конв. $\xrightarrow{\text{линей. кр.}} \text{конв. гаусс рел.}$

(б) 1. Намиш (2. пор. кр.)

$$\frac{\arctg n}{n^2+1} \sim \frac{\frac{\pi}{2}}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}, \quad n \rightarrow \infty \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ конв.}$$

$\xrightarrow{\text{2-пор. кр.}} \text{конв. гаусс рел.}$

2. Наши (линейные крив.)

$$f(x) = \frac{\arctan x}{x^2+1} \quad - \text{непр.} \quad f: [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

За м f поара?

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x^2}(x^2+1) - 2x \arctan x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-2x \arctan x}{(x^2+1)^2} < 0,$$

та f поара и поново да користио лин. кр.

$$\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{x^2+1} dx = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_1^{\beta} \frac{\arctan x}{x^2+1} dx = \left[\begin{array}{l} t = \arctan x \\ dt = \frac{dx}{x^2+1} \\ x=1 \rightarrow t = \frac{\pi}{4} \\ x=\beta \rightarrow t = \arctan \beta \end{array} \right] =$$

$$= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan \beta} t dt = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left. \frac{1}{2} t^2 \right|_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan \beta} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \arctan^2 \beta - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} \right)^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{4} \right)^2 = \frac{3\pi^2}{32}$$

$\Rightarrow$ лин. крив. линей. кр. $\Rightarrow$ још пој крив.

(б) 1° $p > 1$ нека је $p_1 \in (1, p)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{p_1-p}}{n^{p_1}} = 0 \Rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_0) \frac{n^{p_1-p}}{n^{p_1}} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n^{p_1}} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p_1}} \text{ крив.} \xrightarrow{\text{линей. кр.}} \text{још пој крив.}$$

2° $p < 1$ пока же $p_1 \in (p, 1)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{p_1-p}}{\ln^2 n} = \infty \Rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N}). (\forall n > n_0) \frac{n^{p_1-p}}{\ln^2 n} \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^{p_1} \ln^2 n} \geq \frac{1}{n^{p_1}} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p_1}} \text{ глв.} \xrightarrow{1.\text{пер.кр.}} \text{глв. глв. рег.}$$

3° $p = 1$ Користимо лем. кр.

$$f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}, \quad f: [2, \infty) \rightarrow [0, \infty) \text{ не пр.}$$

f спада ?

$$f'(x) = \frac{-(\ln^2 x + x \cdot 2 \ln^{2-1} x \cdot \frac{1}{x})}{(x \cdot \ln^2 x)^2} =$$

$$= \frac{-\ln^2 x - 2 \ln^{2-1} x}{(x \ln^2 x)^2} < 0$$

$\Rightarrow f$ спада.

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} \text{ конв. за } 2 > 1 \text{ (заг. 11. (a) шр. 117.)}$$

$\xrightarrow{\text{лем. кр.}} \text{глв. рег конв. за } 2 > 1.$

Закључак: рег конв. за $p > 1$ или

$$p = 1 \text{ и } 2 > 1.$$



15. (a) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\ln n + a \ln(n+1) + b \ln(n+2) \right) ;$

(б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\ln \left(\sin \frac{1}{n} \right) \right)^2} ;$ (в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{a} - \frac{\sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{2} \right)$

решение

(a) $\ln(n+1) = \ln \left(n \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) = \ln n + \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \sim \ln n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}, n \rightarrow \infty$

$\ln(n+2) = \ln \left(n \left(1 + \frac{2}{n} \right) \right) = \ln n + \ln \left(1 + \frac{2}{n} \right) \sim \ln n + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}, n \rightarrow \infty$

$a_n \sim \ln n + a \left(\ln n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \right) + b \left(\ln n + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} \right) =$

$= (1+a+b) \ln n + (a+2b) \cdot \frac{1}{n} + \left(-\frac{a}{2} - 2b \right) \cdot \frac{1}{n^2}, n \rightarrow \infty$

1° $1+a+b \neq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Rightarrow$ ряд див. (пер. член может не удовлетворять условию Коши).

2° $a+2b \neq 0 \Rightarrow a_n \sim \frac{1}{n} + (1+a+b) \ln n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ див. по див. и значит ряд не сходится 2-пор-кр.

3° $1+a+b=0$ и $a+2b=0 \Rightarrow a=-2, b=1$

$a_n \sim \left(-\frac{-2}{2} - 2 \cdot 1 \right) \cdot \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}, n \rightarrow \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходит.

$\xrightarrow{2\text{-пор-кр.}}$ сходит. значит ряд.

Заключение: ряд сходится. АККО $a=-2$ и $b=1$.

$$\begin{aligned}
 (0) \quad \left(\ln \left(\sin \frac{1}{n} \right) \right)^2 &\sim \left(\ln \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} \right) \right)^2 = \left(\ln \left(\frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{6n^2} \right) \right) \right)^2 = \\
 &= \left(\underbrace{\ln \left(\frac{1}{n} \right)}_0 + \underbrace{\ln \left(1 - \frac{1}{6n^2} \right)}_0 \right)^2 \sim \left(\ln \left(\frac{1}{n} \right) \right)^2, \quad n \rightarrow \infty
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\left(\ln \left(\sin \frac{1}{n} \right) \right)^2} \sim \frac{1}{\left(\ln \left(\frac{1}{n} \right) \right)^2} = \frac{1}{(\ln n)^2}, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^0 \cdot \ln^2 n} \text{ глв. (заг. 14.(б)) по глв. и глв.}$$

рег на основу 2. пор. кр.

$$(б) \quad a^{\frac{1}{n}} = e^{\ln(a^{\frac{1}{n}})} = e^{\frac{1}{n} \ln a} \sim 1 + \frac{\ln a}{n} + \frac{\ln^2 a}{2n^2}, \quad n \rightarrow \infty$$

$$b^{\frac{1}{n}} \sim 1 + \frac{\ln b}{n} + \frac{\ln^2 b}{2n^2}, \quad n \rightarrow \infty$$

$$c^{\frac{1}{n}} \sim 1 + \frac{\ln c}{n} + \frac{\ln^2 c}{2n^2}, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow a_n \sim 1 + \frac{\ln a}{n} + \frac{\ln^2 a}{2n^2} - \frac{1 + \frac{\ln b}{n} + \frac{\ln^2 b}{2n^2} + 1 + \frac{\ln c}{n} + \frac{\ln^2 c}{2n^2}}{2} =$$

$$= \left(\ln a - \frac{\ln b}{2} - \frac{\ln c}{2} \right) \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{\ln^2 a}{2} - \frac{\ln^2 b}{4} - \frac{\ln^2 c}{4} \right) \cdot \frac{1}{n^2}, \quad n \rightarrow \infty$$

$$1^\circ \quad \ln a - \frac{\ln b}{2} - \frac{\ln c}{2} \neq 0 \Rightarrow a_n \sim \frac{1}{n} \text{ по рег глв. по 2. пор. кр.}$$

$$2^\circ \quad \ln a - \frac{\ln b}{2} - \frac{\ln c}{2} = 0 \Rightarrow a_n \sim \frac{1}{n^2} \text{ по рег глв. по 2. пор. кр.}$$



16. (a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$; (б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^{\alpha}}$; (в) $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{n^{\alpha}} - 1)$

решение

(a) $\ln(n!) \sim \ln(\sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}) = \ln \sqrt{2\pi} + \frac{1}{2} \ln n +$
 $+ n \ln n - n \sim n \ln n, n \rightarrow \infty$

Симплицитет
аппроксимация
ср. 139

$\Rightarrow \frac{1}{\ln(n!)} \sim \frac{1}{n \ln n}, n \rightarrow \infty$ и $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ див. (заг. 14.(б))

2-сер. кр. $\Rightarrow$ див. гармон. ряд.

(б) как у (a): $\ln(n!) \sim n \ln n, n \rightarrow \infty$

$\Rightarrow \frac{\ln(n!)}{n^{\alpha}} \sim \frac{n \ln n}{n^{\alpha}} = \frac{1}{n^{\alpha-1} (\ln n)^{-1}}, n \rightarrow \infty$

и $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1} (\ln n)^{-1}}$ контв. за $\alpha-1 > 1$ (заг. 14.(б))

2-сер. кр. $\Rightarrow$ гармон. ряд контв. за $\alpha > 2$.

(в) $1^{\circ} \alpha > 0$ $n^{n^{\alpha}} \rightarrow \infty \Rightarrow a_n \rightarrow \infty$ на ряд див. пер
 еще можно проверить див.

$2^{\circ} \alpha = 0$ $n^{n^{\alpha}} = n \Rightarrow a_n \rightarrow \infty$ — // —

$$3^\circ \alpha < 0$$

$$n^{n^\alpha} = e^{\ln(n^{n^\alpha})} = e^{n^\alpha \cdot \ln n} \sim 1 + n^\alpha \ln n, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow a_n \sim n^\alpha \ln n, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{-\alpha} (\ln n)^{-1}} \text{ кoнe. зa } -\alpha > 1 \xrightarrow{\text{2. cлoв. кp.}} \text{ пep. кoнe.}$$

$$\text{зa } \alpha < -1. \quad \square$$

$$17. (a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1 \right); \quad (b) \sum_{n=4}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{3}{n} \right) \operatorname{arctg} \left(\frac{n^5 + n^3 + 1}{n^4 + n^2 + n} \right) \quad (\text{Ж4#1})$$

решение

$$(a) \quad a_n = e^{\ln n^{\frac{1}{n^2+1}}} - 1 = e^{\frac{\ln n}{n^2+1}} - 1 \sim 1 + \frac{\ln n}{n^2+1} - 1 \sim$$

$$\sim \frac{\ln n}{n^2} = \frac{1}{n^2 (\ln n)^{-1}}, \quad n \rightarrow \infty \quad \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (\ln n)^{-1}} \text{ кoнe.}$$

$$(\text{зaг. 20}) \xrightarrow{\text{2. cлoв. кp.}} \text{ кoнe. гaмa пep.}$$

$$(b) \quad \ln \left(1 - \frac{3}{n} \right) \operatorname{arctg} \left(\frac{n^5 + n^3 + 1}{n^4 + n^2 + n} \right) \sim -\frac{3}{n} \cdot \frac{\pi}{2} \sim \frac{1}{n}, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ гyб. } \xrightarrow{\text{2. cлoв. кp.}} \text{ гyб. гaмa пep. } \quad \square$$

Редови са произвольним знаковима

Теорема (Лајбницов тест) Нека је $a_n \geq 0, n \in \mathbb{N}$ и $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ опадајући низ бржега ш.г. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Тадa $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ конвертира.

Дефиниција Ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ је алтернирајући ако је $a_n \cdot a_{n+1} < 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

Дефиниција Ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ апсолутно конвертира ако $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ конвертира.

Став Ако ред апс. конв. онда он конв.

Пр (Обрнуто не важи. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ конв.

(по Лајбницовом тесту) али $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ див.

па $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ не конв. апс.

Дефиниција Ред конвертира условно ако конв. али не конв. апс.

У наредним задацима треба испитати условну и апсолутну конвергенцију.

18. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$; (б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + (-1)^n}$; (в) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n + (-1)^n)^\alpha}$

решение

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^p} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ конв. за $p > 1$

$\Rightarrow$ ред аит. конв. за $p > 1$

За ли конв. условно за $p \leq 1$?

За $p \leq 0$ је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ па ред гив.

за $p \in (0, 1]$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0$ и тук $\frac{1}{n^p}$ спада па

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ конв. условно по Лајбницовом кр.

(б) $\alpha \leq 0$: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ па ред гив.

$\alpha > 0$: $|a_n| = \frac{1}{n^2 + (-1)^n} \sim \frac{1}{n^2}$, $n \rightarrow \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ конв. за

$\alpha > 1$, па ред аит. конв. за $\alpha > 1$.

За ли конв. условно за $\alpha \in (0, 1]$?

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{n^2}} \sim \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot \left(1 - \frac{(-1)^n}{n^2} \right) =$$

$$= \frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{1}{n^4}, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\alpha}} \text{ к.ч.в. м.с. (а), а } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}} \text{ к.ч.в. з.а. } 2\alpha > 1$$

$$\underline{\text{2.пор.кр.}} \Rightarrow \text{рег к.ч.в. з.а. } \alpha > \frac{1}{2}.$$

Заклучок: рег к.ч.в. а.ч.с. з.а. $\alpha > 1$ и условно з.а. $\alpha > \frac{1}{2}$.

$$(b) |a_n| = \frac{1}{(n+(-1)^n)^{\alpha}} \sim \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\text{и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ к.ч.в. з.а. } \alpha > 1, \text{ па рег а.ч.с.к. з.а. } \alpha > 1$$

по 2. пор. кр.

$$\underline{\alpha \leq 0}: \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \text{ па рег г.ч.в.}$$

$$\underline{\alpha \in (0, 1]}: \frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^{\alpha}} = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{\alpha}} \sim \frac{(-1)^n}{n^{\alpha}} \left(1 - \frac{\alpha(-1)^n}{n}\right) =$$

$$= \frac{(-1)^n}{n^{\alpha}} - \frac{\alpha}{n^{\alpha+1}}, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\alpha}} \text{ к.ч.в. з.а.ч. (а)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} \text{ к.ч.в. з.а. } \alpha+1 > 1$$

$$\underline{\text{2.пор.кр.}} \Rightarrow \text{рег к.ч.в. з.а. } \alpha > 0.$$

Заклучок: рег а.ч.с.к. з.а. $\alpha > 1$ и условно з.а. $\alpha > 0$. ■

19. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan n}{n^2+1}$; (б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1})$

(в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{4n-1}$

решение

(a) $|a_n| = \frac{\arctan n}{n^2+1} \sim \frac{\frac{\pi}{2}}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}, n \rightarrow \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ конв.

$\xrightarrow{\text{2. критер.}} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ конв. $\Rightarrow$ ряд айс. конв.

(б) $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}) \cdot \frac{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}} =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n - (n^2+1)}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \frac{1}{2}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = -\frac{1}{2}$, па $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$

и ряд див. јер није могућен неопходан услов.

(в) $|a_n| = \frac{\sqrt{n}}{4n-1} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}, n \rightarrow \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ див. па

даш ред не конв. апсолутно.

Испитајмо обичну конвергенцију. Желимо да користимо Лајбницов тест па прво треба да покажемо да $\frac{\sqrt{n}}{4n-1}$ опада.

Нека је $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{4x-1}$.

$$= \frac{-4x-1}{2\sqrt{x}(4x-1)^2} < 0 \quad \text{39} \quad x \in \left(-\frac{1}{4}, +\infty\right)$$

Также $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{4n-1} = 0 \xrightarrow{\text{Лейбниц}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{4n-1}$ к.т.б. $\square$

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2+1}) ; (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{n^2\pi}{n+1})}{\ln^2 n}$$

$$(a) |a_n| = \left| \underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n} \cdot \ln\left(1 + \frac{n}{n^2 + \pi}\right) \right| \sim \frac{n}{n^2 + \pi} \sim \frac{1}{n} \quad , n \rightarrow \infty$$

условна конвергенција: Показујемо $\ln(1 + \frac{n}{n^2 + \pi})$ ситар.

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{x^2 + i\pi}\right)$$

$$f'(x) = \frac{\frac{x^2 + \pi - 2x^2}{(x^2 + \pi)^2}}{1 + \frac{x}{x^2 + \pi}} = \frac{\pi - x^2}{(x^2 + \pi)(x^2 + x + \pi)} < 0 \quad \text{for } (2, \infty)$$

та $\ln(1 + \frac{n}{n^2 + \pi})$ отага за $n > 2$ (првих пар
содража у реду нису дигни јер не упишу на конв.)
Покаже, $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1 + \frac{n}{n^2 + \pi}) = 0$, та на основу
Лајбницовог теста ред конв. условно.

2. Начин

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + \pi}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + \pi - 2x^2}{(x^2 + \pi)^2} = \frac{-x^2 + \pi}{(x^2 + \pi)^2} < 0 \text{ на } (2, \infty)$$

$\Rightarrow \frac{n}{n^2 + \pi}$ отага за $n > 2 \Rightarrow \ln(1 + \frac{n}{n^2 + \pi})$ отага

лајбниц. даје ред конв. условно.

$$(5) |a_n| = \frac{\ln(n+1)}{n^2 + 1} \sim \frac{\ln n}{n^2} = \frac{1}{n^2 (\ln n)^{-1}}, n \rightarrow \infty$$

и знамо да $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (\ln n)^{-1}}$ конв. (заг. 14/6) јер $2 > 1$)

та даје ред аус. конв.

$$(6) a_n = \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1}) = \sin(\underbrace{\pi \sqrt{n^2 + 1} - \pi n}_{(-1)^n} + \underbrace{\pi n}_{0}) =$$

$$= \sin(\pi(\sqrt{n^2 + 1} - n)) \underbrace{\cos(\pi n)}_{(-1)^n} + \cos(\pi(\sqrt{n^2 + 1} - n)) \underbrace{\sin(\pi n)}_0 =$$

- 162 -

$$= (-1)^n \sin(\pi(\sqrt{n^2+1} - n))$$

$$|a_n| = \sin\left(\pi(\sqrt{n^2+1} - n) \cdot \frac{\sqrt{n^2+1} + n}{\sqrt{n^2+1} + n}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1} + n}\right) \sim$$

За $n \geq 10$ је овај
 $\sin > 0$ па зато
 не пишемо $|-1|$

$$\sim \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1} + n} \sim \frac{1}{n}, n \rightarrow \infty$$

и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ губ. $\Rightarrow$ ред не конвер. ас.

Услови на конвер:

тук $\sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1} + n}$ отада и пишемо 0 поједино ред конвер.

$$(\hat{2}) \cos\left(\frac{n^2\pi}{n+1}\right) = \cos\left(\frac{n^2\pi - \pi + \pi}{n+1}\right) = \cos\left(\frac{\pi(n-1)(n+1) + \pi}{n+1}\right) =$$

$$= \cos\left((n-1)\pi + \frac{\pi}{n+1}\right) = \underbrace{\cos((n-1)\pi)}_{(-1)^{n-1}} \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) - \underbrace{\sin((n-1)\pi)}_0 \sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right) =$$

$$= (-1)^{n-1} \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) = (-1)^{n-1} \left(1 - \frac{\pi^2}{2(n+1)^2}\right) \sim (-1)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right), n \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow a_n \sim \frac{(-1)^n \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}{e^{n^2 n}} = \frac{(-1)^n}{e^{n^2 n}} - \frac{1}{n^2 e^{n^2 n}}, n \rightarrow \infty$$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^{n^2}}$ конв. по Лейбнизову тесту, а

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 e^{n^2}}$ конв. здег зед. 14.6).

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конв.

За ми лис. конв. ?

$$|a_n| \sim \frac{1 - \frac{1}{n^2}}{e^{n^2}} \sim \frac{1}{e^{n^2}}, n \rightarrow \infty \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{e^{n^2}} \text{ гвб.}$$

(Зед 14.6)) ми ред не конв. лис. $\square$

21. (a) Доказати за лис $a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ лије мотелит

(б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$; (в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-2)^n}{e^n}$ ЛЕР (ЈАН 2)

решение

(a) лис. за лис једне мотелит Лейбнизу) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ конв.

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}, n \rightarrow \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ конв. (Лейбнизу), али } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ гвб.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} \text{ гвб.}$$

$\Rightarrow$ thus also converges.

$$(5) |a_n| = n^\alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim n^\alpha \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^{1-\alpha}}, n \rightarrow \infty$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-\alpha}}$ conv. $\exists \alpha$ $1-\alpha > 1 \Rightarrow$ series conv.

otherwise $\exists \alpha < 0$.

satisfies conv. $\exists \alpha \geq 0$:

1° $\alpha \geq 1$: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow$ series div.

2° $\alpha \in [0, 1)$

$$f(x) = x^\alpha \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x^\alpha \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} =$$

$$= \alpha x^{\alpha-1} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{x^{\alpha-1}}{x+1} =$$

$$= x^{\alpha-1} \left(\alpha \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \right) <$$

$$< x^{\alpha-1} \left(\alpha \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{\alpha x + \alpha - x}{x(x+1)} \cdot x^{\alpha-1} =$$

$$= \frac{x(\alpha-1) + \alpha}{x(x+1)} \cdot x^{\alpha-1} < 0 \quad \exists \alpha \quad x > \frac{1}{1-\alpha}$$

$\Rightarrow \exists n > n_0$ thus $n^\alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ strictly decreases to 0

$\Rightarrow$ ред конв. условию по Лейбнизовому тесту.

(б) 1° $|x| < e$

$$\frac{x^n + (-2)^n}{e^n} = \left(\frac{x}{e}\right)^n + (-1)^n \cdot \left(\frac{2}{e}\right)^n$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{e}\right)^n$ конв. для $\left|\frac{x}{e}\right| < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{e}\right)^n$ конв.

(Лейбниц) $\Rightarrow$ ред конв.

$$|a_n| \leq \left|\left(\frac{x}{e}\right)^n\right| + \left|(-1)^n \left(\frac{2}{e}\right)^n\right| = \left(\frac{|x|}{e}\right)^n + \left(\frac{2}{e}\right)^n$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|x|}{e}\right)^n \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^n$ конв. $\Rightarrow$ ред конв. апс.

2° $|x| \geq e$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{e}\right)^n \cdot \underbrace{\left(1 + \left(\frac{-2}{x}\right)^n\right)}_{\rightarrow 0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\frac{x}{e}\right)^n}_{\left|\frac{x}{e}\right| \geq 1} \neq 0$$

$\Rightarrow$ ред див. для него не применим
неотходит див. ■

Функционални редови

Дефиниција Функционални низ је низ функција $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ и $X \subseteq \mathbb{R}$.

Дефиниција Низ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвертира у тачки $x_0 \in X$ ка $c \in \mathbb{R}$ ако је $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = c$.

Дефиниција Низ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвертира „тачка по тачка“ ка функцији f ако је $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, за свако $x \in X$. (Означај: $f_n \rightarrow f$.)

Дефиниција Низ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвертира равномерно ка f ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall x \in X) \quad n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

(Означај: $f_n \rightrightarrows f$.)

Теорема $f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$

Теорема $f_n \rightrightarrows f \Rightarrow f_n \rightarrow f$.

Нека је $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ функционални низ. Зафрмисмо функционални ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$.

Означимо $S_N(x) := \sum_{n=1}^N f_n(x)$.

Дефиниција $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ конвертира „тачка по точка“ на X ако $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ конвертира „тачка по точка“ на X .

Дефиниција $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ конвертира равномерно на X ако $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ равномерно конвертира на X .

Теорема 1 Нека ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно конвертира на X и нека је $x_0 \in X$ тачка нагромадавања. и нека постоји $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$. Тада је

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x).$$

Специјално, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ је непр. у x_0 ако

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = f(x_0).$$

Теорема 2 Нека ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равн. конв. на $[a, b]$ и нека су f_n Риман интеграбилне на $[a, b]$.

Тогда
$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Теорема 3 Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ л.г. и $f_n: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируемые и существует $x_0 \in (a, b)$ л.г. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ конвертира ($\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ је одличан бројни ред!) и неки ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ равномерно конвертира на (a, b) . Тогда је $\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ и ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равн. конв. на (a, b) .

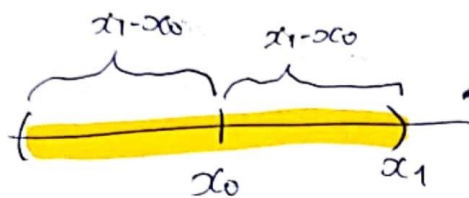
Напомена: Ако је $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, непрекинутост, интегритет и диференцијабилност функције f показујемо помоћу T1, T2 и T3 редом.

Степени редови

Дефиниција Нека је $x_0 \in \mathbb{R}$ и $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ реалних бројева. Ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ назива се степеним редом.

Дефиниција Област конвергенције степеног реда је скуп $D = \{x \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n < +\infty\}$.

Теорема Ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ конв. за x_1 ,
 тогд конв. и за свако $x \in \mathbb{R}$ т.ч. $|x-x_0| < |x_1-x_0|$



ако конв. у x_1
 конв. у целом
 овом интервалу
 око x_0 .

Дефиниција $R = \sup_{x \in D} |x-x_0|$ је радијус (лапуренци)
 конвергенције штејног реда

$$\text{Важно: } R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}, \text{ ако}$$

постоје оба лимеса.

Став (1) $R=0 \Rightarrow D=\{x_0\}$;

(2) $R=+\infty \Rightarrow D=\mathbb{R}$;

(3) $0 < R < +\infty \Rightarrow (x_0-R, x_0+R) \subseteq D \subseteq [x_0-R, x_0+R]$.

Напомена: (3) нам каже да D може да буде нешто
 мање: (x_0-R, x_0+R) , $[x_0-R, x_0+R)$, $(x_0-R, x_0+R]$, $[x_0-R, x_0+R]$.
 Закљ, $(x_0-R, x_0+R) \subseteq D$, а конвергенцију у тачкама
 x_0-R и x_0+R постоје истажујемо.

Теорема Нека је $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$. Тада

- (1) овај ред равн. конв. на сваком $[a, b] \subseteq (x_0-R, x_0+R)$,
- (2) $f(x)$ је непрекиднa на (x_0-R, x_0+R) ;
- (3) ред се може диференцирати и интегралити
члан по члан (T_1, T_2, T_3 на шр. 168-169).

Дефиниција Нека је f бесконачно пута диференцијабилна.
Тејлоров ред функције f у тачки $x_0 \in X$ је

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n.$$

Специјално, за $x_0 = 0$ добијемо Маклоров ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n.$$

22. Одредити области конвергенције редова

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n}; \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n; \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}}$$

решења

$$(a) \frac{(x-2)^n}{10^n} = \underbrace{\frac{1}{10^n}}_{a_n} \underbrace{(x-2)^n}_{x_0} \Rightarrow a_n = \frac{1}{10^n}, \quad x_0 = 2.$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{10^n}}{\frac{1}{10^{n+1}}} = 10$$

$$\Rightarrow (2-10, 2+10) \subseteq D.$$

$\nearrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $x_0 \quad R \quad x_0 \quad R$

п.у. $(-8, 12) \subseteq D$. Тоді треба за спробами знайти проміжок конв. у -8 та у 12 .

конвергенція у $x = -8$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-8-2)^n}{10^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n - \text{збігається}$$

конвергенція у $x = 12$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(12-2)^n}{10^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 - \text{збігається.}$$

Висновок: $D = (-8, 12)$.

$$(5) \quad a_n = \frac{(-1)^n}{n!}, \quad x_0 = 0.$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{n!}}{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = +\infty \Rightarrow D = \mathbb{R}$$

$$(6) a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+3}}, x_0 = 0$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}}{\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+3}}} = 1$$

$$\Rightarrow (0-1, 0+1) = (-1, 1) \subseteq D$$

$\begin{matrix} \nearrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x_0 & R & x_0 & R \end{matrix}$

КОНВ. у $x = -1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+3}} \text{ КОНВ. по Лейбницевому критерию. (серия } \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} \text{ убывает и имеет 0)}$$

КОНВ. у $x = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{\sqrt{n^2+3}} \text{ див. } \text{ } \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} \sim \frac{1}{n}, n \rightarrow \infty \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ див.}$$

2-й пер. кр. див. радиус див.

Конечно: $D = [-1, 1)$. □

23. Определить область конвергенции ряда

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-1)^n}{n} (x+1)^n ; (b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot x^n ; (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}} \cdot x^n$$

решение

$$(a) \quad a_n = \frac{3^n + (-1)^n}{n}, \quad x_0 = -1$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^n + (-1)^n}{n}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot \sqrt[n]{1 + \frac{(-1)^n}{3^n}}}{\sqrt[n]{n}} = 3$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \left(-1 - \frac{1}{3}, -1 + \frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right) \subseteq D.$$

конв. у $x = -\frac{4}{3}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-1)^n}{n} \cdot \left(-\frac{4}{3} + 1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-1)^n}{n} \cdot \frac{(-1)^n}{3^n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 3^n} \quad - \text{конверсира, жер:}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ конв. (Лейбниц)}$$

$$\text{и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 3^n} \text{ конв. жер } \frac{1}{n 3^n} \leq \frac{1}{3^n} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \text{ конв.}$$

$$\text{па по 1. теор. кр. конв. и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 3^n}.$$

конв. у $x = -\frac{2}{3}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-1)^n}{n} \left(-\frac{2}{3} + 1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{жуб.}} + \underbrace{\frac{(-1)^n}{n 3^n}}_{\text{конв.}} \right) - \text{жер жуб.}$$

Заклучак: $D = \left[-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right).$

$$(8) a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad x_0 = 0$$

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = 1$$

$$\Rightarrow (-1, 1) \subseteq D.$$

конв. у $x = -1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\downarrow e} \cdot (-1)^n \quad \text{див. јер не постоји неопходан}$$

услов конв. (оштити план не тешки 0)

конв. у $x = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\downarrow e} \cdot 1^n \quad \text{див. по истој разлоги.}$$

Закључак: $D = (-1, 1)$

$$(9) a_n = \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}, \quad x_0 = 0$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}}{\frac{3^{-\sqrt{n+1}}}{\sqrt{(n+1)^2+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n+1)^2+1}}{\sqrt{n^2+1}} \cdot 3^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = 1$$

може се показати
да је $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$
(радишмо само лимитом)

$$\Rightarrow (-1, 1) \subseteq D.$$

конв. у $x = -1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n^2+1}} \quad \text{конв. по Лейбницовому критерию. (из}$$
$$\frac{1}{3^{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n^2+1}} \text{ очевидно убывает и стремится к 0)}$$

конв. у $x = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n^2+1}} \quad \text{да ли конв. ?}$$

$$\frac{1}{\underbrace{3^{\sqrt{n}}}_{\approx n} \cdot \sqrt{n^2+1}} \leq \frac{1}{n \cdot \sqrt{n^2+1}} \sim \frac{1}{n^2}, \quad n \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

конв., по конв. и давши ряд на основе 1. и 2.

пер. кр.

Заключение: $D = [-1, 1]$. $\square$

На стр. 171 видим что такое ряды Тейлора и Маклорена полином, а сейчас будем видеть какие существуют маклореновы полиномы.

Упрадукаемо прво дејствено развијање фјје $f(x) = \sin x$ за $x_0 = 0$, а остале ћемо касније само навести.

Маклоренов полином за $f(x) = \sin x$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n, \quad \text{за } x \in D \leftarrow$$

тук треба да
видимо шта
је D

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -1$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x \Rightarrow f^{(4)}(0) = 0$$

...

уочавано мадект, тј.
периодично се понавља
нум: 0, 1, 0, -1

$$\Rightarrow \sin x = \frac{f(0)}{0!} \cdot x^0 + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x^1 + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \dots =$$

$$= 0 + 1 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + \frac{-1}{3!} \cdot x^3 + \dots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}}_{a_n} \cdot x^{2n+1}$$

Сада да одредимо област конвергенције D .

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}}{\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)!}{(2n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+3)(2n+2) = +\infty$$

$$\Rightarrow \mathcal{D} = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

Сара навођуно постоје елементарних фја:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1]$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad x \in \mathcal{D}, \text{ где је}$$

$$\mathcal{D} = \begin{cases} [-1, 1], & \alpha > 0 \\ (-1, 1], & \alpha \in (-1, 0] \\ (-1, 1), & \alpha \leq -1 \end{cases}$$

24. Успоредити сље:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}; \quad (b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4^n}{(2n)!}; \quad (c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 3n + 1}{n!}; \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n \cdot n}$$

решиће

$$(a) e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow e^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad \boxed{\text{ојо}}$$

Rezultat je konvergentna suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - 1 = e^1 - 1 = e - 1$$

↑
od 1

Mašina na $\cos x$

$$(8) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4^n}{(2n)!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n}}{(2n)!} -$$

$$- \frac{(-1)^0 \cdot 2^0}{0!} - \frac{(-1)^1 \cdot 2^2}{2!} = \cos 2 - 1 + 2 = \cos 2 + 1$$

$$(9) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 3n + 1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1+1}{(n-1)!} + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{(n-1)!} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e + 4e + e = 6e$$

↑ ↑
pomerili smo drugu
za kratak od 0

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n \cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \ln \frac{3}{2} \quad \square$$

Сада могу пој задајка са применим теореме
са свр. 171 (а то је у савари сав. случај
T1, T2, T3 са свр. 168-169).

25. Развитиј у Маклоренов ред и одредиш
област дефинисаности:

$$(a) f(x) = \operatorname{arctg} x; \quad (b) f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

решење

$$(a) f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ и знамо } \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1, 1),$$

$$\text{па је } f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n}, \quad x \in (-1, 1).$$

Ред аис. поњ. у области деф. па смо интегрални
члан по члан:

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x (-1)^n t^{2n} dt \right) =$$

∫ и ∑ смо да
окрето због
Т. № свр. 171

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \right) \Big|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

Область сходимости:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{2n+1}}{\frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}} \right| = 1$$

$$\Rightarrow (-1, 1) \subseteq D$$

КОНВ. у $x = -1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (-1)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \quad \text{конв. по Лейбницу}$$

конв. у $x = 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 1^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{конв. по Лейбницу}$$

$$\Rightarrow D = [-1, 1].$$

(с) Нека је $g(x) = \frac{1}{1-x}$. Приметимо $g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = f(x)$

$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in (-1, 1)$ - све се диференцирамо члан по члан у области конв.

$$f(x) = g'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot x^n.$$

область конвергенције:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$$

$$\Rightarrow (-1, 1) \subseteq D$$

конв. у $x = -1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(n+1) \cdot (-1)^n}_{\downarrow 0} \quad \text{див. јер није могуће неопходан услов}$$

конв. у $x = 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(n+1) \cdot 1^n}_{\downarrow \infty} \quad - // -$$

Закљ, $D = (-1, 1)$. □

26. Сумирајте редове

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2n+1}}{2n+1}; \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$$

решење

$$(a) \text{ Нека је } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^{2n+1}}{2n+1}. \text{ Израчунајмо } f\left(\frac{1}{4}\right).$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}}{\frac{(-1)^{n+2}}{2n+3}} \right| = 1$$

$$\Rightarrow (-1, 1) \subseteq D$$

Рез конв. и за $x = \pm 1$ (Лажбину), па је $D = [-1, 1]$.

Нађимо $f'(x)$ (јер насмукћујемо да је тај рез једноставнији од $f(x)$).

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{2n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot (2n+1) \cdot x^{2n}}{2n+1} =$$

$$= - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n} =$$

$$= - \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = - \frac{1}{1+x^2}$$

рез равн. конв.
на $[-1, 1]$ па
извод узавн
у суму

користићемо

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1, 1)$$

$$\text{Дакле, } f'(x) = - \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \int_0^x f'(t) dt = - \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = - \operatorname{arctg} t \Big|_0^x = - \operatorname{arctg} x$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2n+1}}{2n+1} = f\left(\frac{1}{4}\right) = - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{4}\right)$$

(δ) Нека је $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^{n+1}}{n(n+1)}$. Пратимо $f(1)$.

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}}{\frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}} \right| = 1$$

$$\Rightarrow (-1, 1) \subseteq D.$$

Конв. у $x = -1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot (-1)^{n+1}}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{— конв. (2. пор. кр.)}$$

конв. у $x = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 1^{n+1}}{n(n+1)} \quad \text{— конв. (Лажетис)}$$

$\Rightarrow D = [-1, 1]$ па та D можемо диференцирати f макс по макс.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^{n+1}}{n(n+1)} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1} \cdot x^{n+1}}{n(n+1)} \right)' = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n+1) \cdot x^n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^n}{n} = \ln(1+x) \end{aligned}$$

Закле, $f(x) = \ln(1+x)$

$$\Rightarrow f(x) = \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \ln(1+t) dt = \left[\begin{array}{ll} u = \ln(1+t) & dv = dt \\ du = \frac{dt}{1+t} & v = t \end{array} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= t \ln(1+t) \Big|_0^x - \int_0^x \frac{t+1}{1+t} dt = \\
&= x \ln(1+x) - \left(t - \ln|1+t| \right) \Big|_0^x = \\
&= x \ln(1+x) - x + \ln(1+x)
\end{aligned}$$

Коначно, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} = f(1) = \ln 2 - 1 + \ln 2 = 2 \ln 2 - 1$. □

27. Сумирајте редове

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n^2 x^n$; (б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$

решење

(a) Узредимо прво област конвергенције.

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} n^2}{(-1)^{n+2} (n+1)^2} \right| = 1$$

$$\Rightarrow (-1, 1) \subseteq D.$$

Лако се види да ред конвертира за $x = \pm 1$, па је $D = (-1, 1)$.

Сада рачунамо суму.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^2 x^n = - \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (-x)^n$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \quad \left/ \frac{d}{dx} \right. \leftarrow \boxed{\text{можно дифференцировать по членам}}$$

$$\frac{-1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(-x)^{n-1} \cdot (-1)$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(-x)^{n-1} \quad \left/ \cdot (-x) \right.$$

$$\frac{-x}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(-x)^n \quad \left/ \frac{d}{dx} \right. \leftarrow \boxed{\text{дифференцируем по членам по членам}}$$

$$\frac{-(1+x)^2 + 2x(1+x)}{(1+x)^4} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2(-x)^{n-1} \cdot (-1)$$

$$\frac{1-x}{(x+1)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2(-x)^{n-1} \quad \left/ \cdot (-x) \right.$$

$$\frac{x(x-1)}{(x+1)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2(-x)^n = -S(x)$$

$$\Rightarrow S(x) = \frac{x(1-x)}{(x+1)^3}$$

5) Определим область сходимости.

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{(n+1)(n+2)}} \right| = 1 \Rightarrow (-1, 1) \subseteq D.$$

Нико е биги гај рег контв. и за $x = \pm 1$,
ма је $D = [-1, 1]$.

$$\text{Густина } S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$$

ми на херу
паскеј ер ен
јеј је гае сомо
n+1

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n+1} =$$

$$= \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot (-x)^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (-x)^n}{n} =$$

$$= \frac{1}{x^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-x)^n}{n} - \frac{(-1)^1 \cdot (-x)^1}{1} \right) =$$

$$= \frac{1}{x^2} \left(- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (-x)^n}{n} - x \right) =$$

$$= \frac{1}{x^2} \left(- \ln(1-x) - x \right)$$

$$\Rightarrow S'(x) = - \frac{\ln(1-x) + x}{x^2}$$

$$\Rightarrow S(x) = \underbrace{S(0)}_0 + \int_0^x S'(t) dt = - \int_0^x \frac{\ln(1-t) + t}{t^2} dt = \dots$$

$$\dots = \frac{(1-x) \ln(1-x)}{x} \quad \square$$

28. Развити у Маклорови ред и одредити област конвергенције:

$$(a) f(x) = \frac{1}{4-x^2} ; (b) f(x) = \ln(1+x+x^2+x^3)$$

$$(c) f(x) = x \operatorname{arctg}\left(\frac{2-x}{2+x}\right) + \ln(x^2+4)$$

решење

$$(a) f(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{4^{n+1}}$$

За дамо одредити D , уведимо мету $t=x^2$.

Сад ред постоје $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{4^{n+1}}$ и $t_0=0, a_n = \frac{1}{4^{n+1}}$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 4 \Rightarrow t \in (-4, 4) \Rightarrow x \in (-2, 2).$$

Закле, $(-2, 2) \subseteq D$ и јав за проверити ± 2 .

конв. у $x=-2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^{2n}}{4^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4} \text{ губ.}$$

конв. у $x=2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{4^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4} \text{ губ.}$$

Закле, $D = (-2, 2)$.

$$(\delta) f(x) = \ln(1+x+x^2+x^3) = \ln(1+x+x^2(1+x)) =$$

$$= \ln((1+x)(1+x^2)) = \ln(1+x) + \ln(1+x^2) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad (*)$$

где же:
$$a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^{n+1}}{n}, & n \text{ нечетно} \quad \leftarrow n \in \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\} \\ 0, & n \equiv 2 \pmod{4} \quad \leftarrow n \in \{2, 6, 10, 14, 18, \dots\} \\ -\frac{2}{n}, & n \equiv 0 \pmod{4} \quad \leftarrow n \in \{4, 8, 16, 20, 24, \dots\} \end{cases}$$

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2}{n}}} = 1$$

$$\Rightarrow (-1, 1) \subseteq D$$

конт. у $x = -1$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (-1)^n &\stackrel{(*)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot (-1)^{2n}}{n} = \\ &= \underbrace{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{губ.}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}}_{\text{конт.}} = \text{губ.} \end{aligned}$$

конт. у $x = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 1^n \stackrel{(*)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \text{конт.}$$

$$\text{Таким образом, } D = (-1, 1].$$

(в) Третино изводе фјѐ f у нади да ће се поједноставити.

$$f(x) = x \operatorname{arctg}\left(\frac{2-x}{2+x}\right) + \ln(x^2+4)$$

$$f'(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2-x}{2+x}\right) + x \cdot \frac{\frac{-(2+x)-(2-x)}{(2+x)^2}}{1+\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^2} + \frac{2x}{x^2+4} =$$

$$= \operatorname{arctg}\left(\frac{2-x}{2+x}\right) + x \cdot \frac{-4}{(2+x)^2 + (2-x)^2} + \frac{2x}{x^2+4} =$$

$$= \operatorname{arctg}\left(\frac{2-x}{2+x}\right) - \frac{2x}{x^2+4} + \frac{2x}{x^2+4} =$$

$$= \operatorname{arctg}\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$$

$$f''(x) = -\frac{2}{4+x^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)^n =$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{4^n} \quad / \int$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{4^n} dt = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C / \int$$

$$f(x) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)} \int_0^x t^{2n+1} dt + cx + d =$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+2}}{4^n(2n+1)(2n+2)} + cx + d$$

Такође одређујемо константе c и d .

$$d = f(0) = 0 \cdot \operatorname{arctg} 1 + \ln(4) = \ln 4$$

$$c = f'(0) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Закључавајући,

$$f(x) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{4n(2n+1)(2n+2)} + x \cdot \frac{\pi}{4} + \ln 4$$

Тако област конвергенције.

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{4n(2n+1)(2n+2)}}} = 1$$

$$\Rightarrow (-1, 1) \subseteq D$$

Користећи Лајбницову теорему о радијусу конвергенције и за $x = \pm 1$, тада је $D = [-1, 1]$. $\square$

29. Развинути $f(x) = \sin x$ у Тјјлоров ред у околицы $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

решење
1. Наћи (стандардно)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n, \text{ Нађимо изводе.}$$

$$f(x) = \sin x \rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f'(x) = \cos x \rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f''(x) = -\sin x \rightarrow f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f'''(x) = -\cos x \rightarrow f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x \rightarrow f^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

...

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 2!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 3!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \dots = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{n!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^n \end{aligned}$$

2. Найти (применением Маклореновой развоя)

$$\text{смена: } t = x - \frac{\pi}{4}$$

$$\sin x = \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \sin t \cos \frac{\pi}{4} + \cos t \sin \frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin t + \cos t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n}}{(2n)!} \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{n!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^n. \quad \blacksquare$$

Фурijeови редови

Нека је $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -периодична и $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$

Дефиниција Фурijeов ред f је f је

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

$$\text{где је } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

Теорема Ако је f глс по глс тачка и S_f њен Фурijeов ред, онда је $S_f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$,

$$\text{где је } f(x+) = \lim_{t \rightarrow x+} f(t) \text{ и } f(x-) = \lim_{t \rightarrow x-} f(t).$$

(Зачу. ако је f непр. у x , онда је $f(x-) = f(x) = f(x+)$)

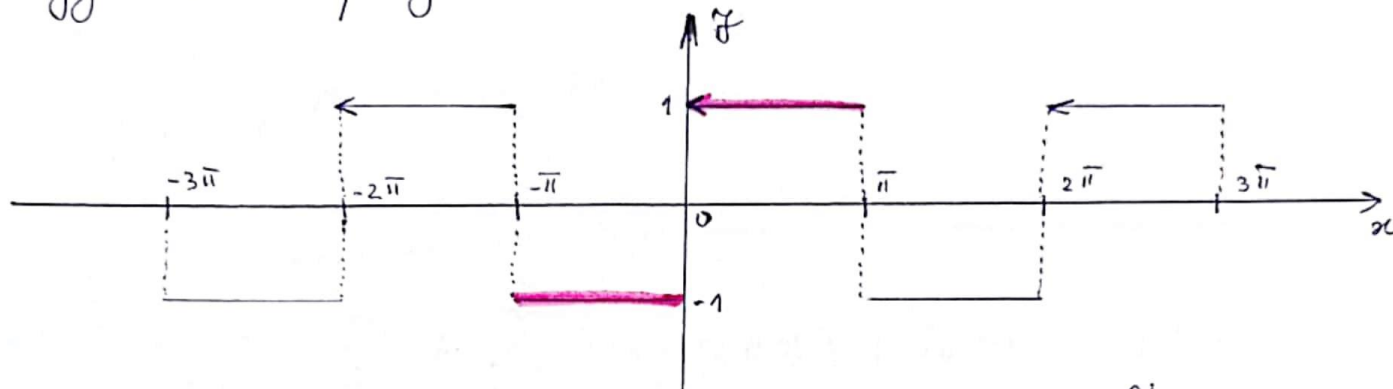
Теорема (Парсевалова једнакост)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

30. функцију $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 1, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$ развијти у Фурјеов ред и израчунати $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

решење

Потребно је да прво проширимо фкју f на $\mathbb{R}$ п-г. Оуде 2π -периодична.



Дефинишемо проширење $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ тако да $\tilde{f}(x + k \cdot 2\pi) = f(x)$, за $x \in [-\pi, \pi]$ и $k \in \mathbb{Z}$.

Развијемо $\tilde{f}$ у Фурјеов ред.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) \cos(nx) dx = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \cos(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nt) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) \sin(nx) dx = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \sin(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \cdot \cos(nx) \Big|_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{2}{n\pi} \cos(n\pi) + \frac{2}{n\pi} \cos 0 = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) =$$

$$= \begin{cases} 0, & n \text{ парно} \\ \frac{4}{n\pi}, & n \text{ не парно} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{\tilde{f}}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi} \sin((2n+1)x)$$

Како је $f = \tilde{f}$ на $[-\pi, \pi]$, тако је $S_f = S_{\tilde{f}}$ на $[-\pi, \pi]$.

Тада га одредимо негде друге.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = ?$$

$$S_f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi} \cdot \sin\left(\overbrace{(2n+1) \cdot \frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + n\pi}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4 \cdot (-1)^n}{(2n+1)\pi} = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

↑
кратка
сума

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} S_f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{f\left(\frac{\pi}{2}^+\right) + f\left(\frac{\pi}{2}^-\right)}{2} =$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} = \frac{\pi}{4} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

f је неуп. у $\frac{\pi}{2}$
па је
 $f\left(\frac{\pi}{2}^+\right) = f\left(\frac{\pi}{2}^-\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = ?$$

Користимо Парсегову једнакост.

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|f(x)|^2}_1 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{(2n+1)\pi} \right)^2 = \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{16} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx =$$

$$= \frac{\pi}{16} \cdot 2\pi = \frac{\pi^2}{8} \quad \square$$

пухнећа
сума

Коментар: Ако је f парна, онда је $f(x)\sin(nx)$ непарна па је $b_n = 0$ и гласимо ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$, а ако је f непарна, онда, $a_n = 0$, па гласимо ред $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(nx)$. Ово нам служи за селекту зај.

31. Развити функцију $f(x) = x$, $0 \leq x \leq \pi$ у Фурјеов ред на $(-\pi, \pi)$

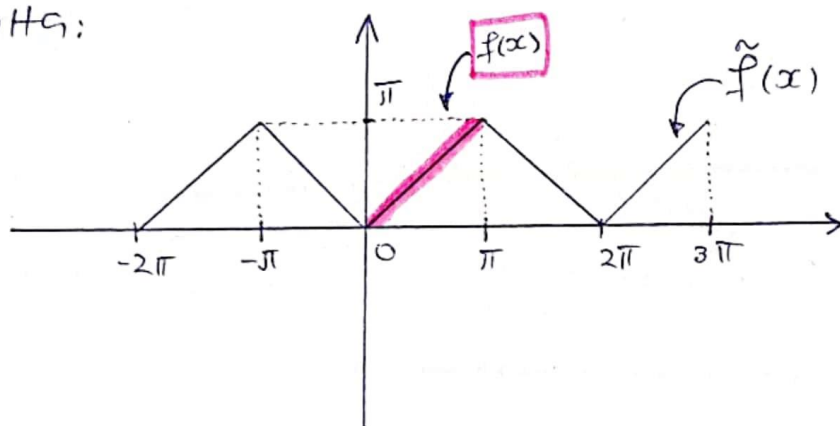
(a) по косинусима;

(b) по синусима;

(c) израчунати $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$; $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

решење

(a) Желимо да се у реду појављују само $\cos(nx)$, тј. да је $b_n = 0$, па f проширимо да буде парна:



$$S_{\tilde{f}}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} x^2 \Big|_0^{\pi} = \pi$$

↑
парна

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx =$$

↑
парна

$$= \left[\begin{array}{l} u = x \\ du = dx \end{array} \quad \begin{array}{l} dv = \cos(nx) \\ v = \frac{1}{n} \sin(nx) \end{array} \right] = \underbrace{\frac{2}{\pi} x \cdot \frac{1}{n} \sin(nx)}_0 \Big|_0^{\pi} -$$

$$- \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx = \frac{2}{n^2 \pi} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} =$$

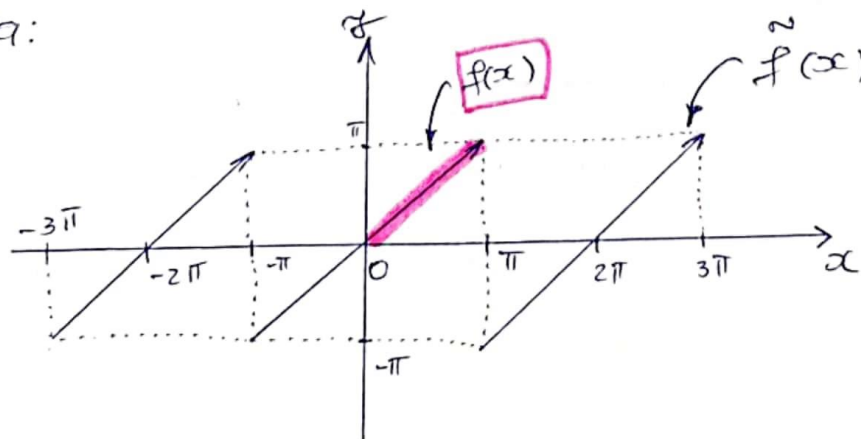
$$= \frac{2}{n^2 \pi} \left((-1)^n - 1 \right) = \begin{cases} 0, & n \text{ парно} \\ -\frac{4}{n^2 \pi}, & n \text{ нечетно} \end{cases}$$

$b_n = 0$ (тако смо намерно проширили f)

Закле,

$$S_{\tilde{f}}(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-4}{(2n+1)^2 \pi} \cos((2n+1)x).$$

(б) Желимо да се у реду појављује само $\sin(nx)$, тј. да је $a_n = 0$, па f проширимо за дуге нечетна:



$$S_{\tilde{f}}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) dx = 0$$

$\uparrow$
непарная

$$a_n = 0 \quad (\text{так как мы имеем нечетную } \tilde{f})$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx =$$

$\uparrow$
парная

$$= \left[\begin{array}{ll} u=x & dv = \sin(nx) dx \\ du=dx & v = -\frac{1}{n} \cos(nx) \end{array} \right] = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{x}{n} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} +$$

$$+ \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx = -\frac{2}{n} (-1)^n + \underbrace{\frac{2}{n^2\pi} \sin(nx)}_0 \Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

$$\Rightarrow S_{\tilde{f}}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx).$$

(б) Рассмотрим теперь us (a) и (б). Да же on одно значение уберем иначе:

$$f_1 = \tilde{f} \text{ us (a)}, \quad S_1(x) = S_{\tilde{f}}(x) \text{ us (a)} = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-4}{(2n+1)^2\pi} \cos((2n+1)x)$$

$$f_2 = \tilde{f} \text{ us (б)}, \quad S_2(x) = S_{\tilde{f}}(x) \text{ us (б)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx).$$

$$S_1(0) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-4}{(2n+1)^2 \pi} \underbrace{\cos 0}_1$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}} = \frac{S_1(0) - \frac{\pi}{2}}{-4} \cdot \pi = \frac{\frac{f_1(0^+) + f_1(0^-)}{2} - \frac{\pi}{2}}{-4} \cdot \pi = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{(2n)^2}}_{\text{парни}} + \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{(2n+1)^2}}_{\text{нечетные}} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8}$$

$\boxed{\text{предположим на леву сумму}}$

$$\frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} \Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{\pi^2}{6}$$

Парсевалова једнакост за f_1 и S_1 ($\text{из}(a)$):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_1(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) =$$

$$= \frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16}{(2n+1)^4 \pi^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}} = \frac{\pi^2}{16} \left(\underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_1(x)|^2 dx}_{\frac{2\pi^3}{3}} - \frac{\pi^2}{2} \right) =$$

$$= \frac{\pi^2}{16} \left(\frac{2\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{2} \right) = \frac{\pi^4}{96}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{1}{16} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} + \frac{\pi^4}{96}$$

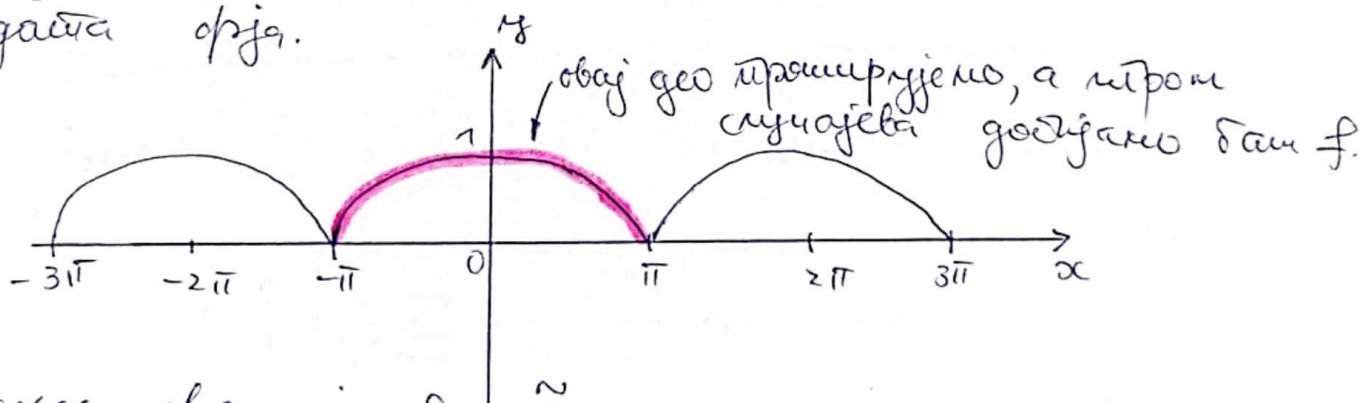
$$\Rightarrow \frac{15}{16} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96} \Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}} \quad \square$$

32. Развити, $f(x) = |\cos \frac{x}{2}|$ у Фурijeов ред
на $(-\pi, \pi)$ и израчунати $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}$

решење

Како је функција дефинисана на сваким интервалу
од $(-\pi, \pi)$, узмемо овај део $(-\pi, \pi)$ и проширимо
да проширење буде 2π -периодично.

Обде се баш изостаје да је проширење баш
дама функција.



Закле, обде је $f = \tilde{f}$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} dx = \frac{4}{\pi} \sin \frac{x}{2} \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos(nx) dx =$$

↑
πаритет

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(\cos\left(\frac{x}{2} - nx\right) + \cos\left(\frac{x}{2} + nx\right) \right) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{\frac{1}{2} - n} \sin\left(\frac{x}{2} - nx\right) + \frac{1}{\frac{1}{2} + n} \sin\left(\frac{x}{2} + nx\right) \right) \Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{1-2n} (-1)^n + \frac{2}{1+2n} (-1)^n \right) = \frac{4 \cdot (-1)^{n-1}}{\pi(4n^2 - 1)}$$

$b_n = 0$ (геп је f паритет).

$$\Rightarrow S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) =$$

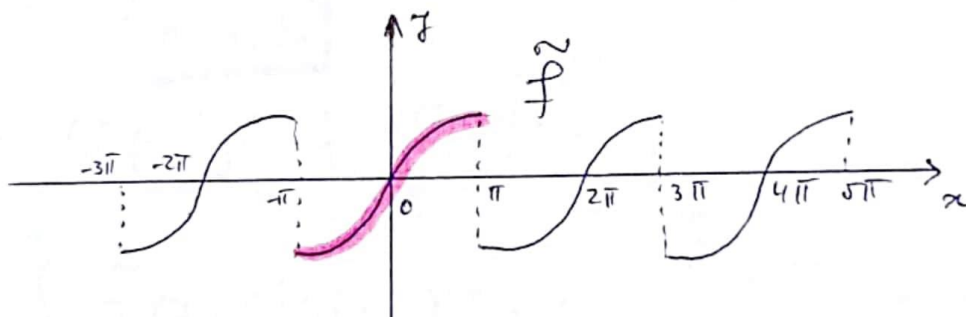
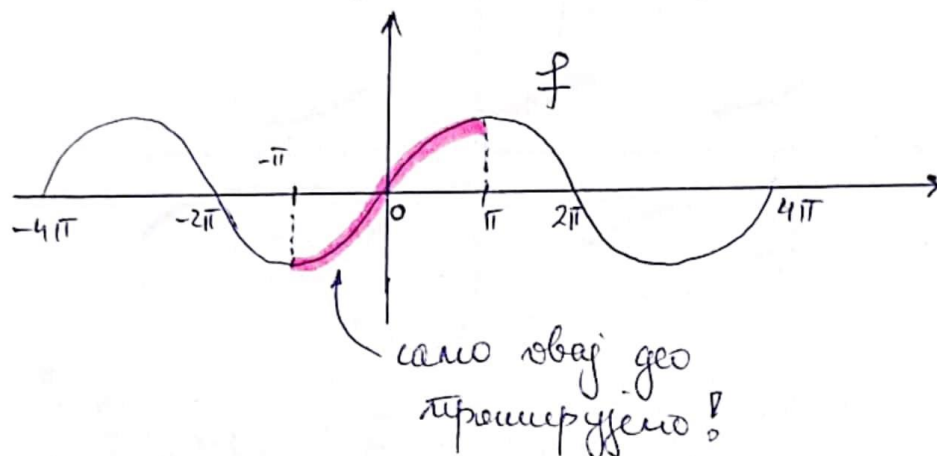
$$= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2 - 1} \cos(nx)$$

$$S_f(0) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2 - 1} \underbrace{\cos 0}_{=1}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2 - 1} = \frac{S_f(0) - \frac{2}{\pi}}{\frac{4}{\pi}} = \frac{\frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} - \frac{2}{\pi}}{\frac{4}{\pi}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

Напомена: За свако имаме фкц којој је период већи од 2π , узели бисмо део на интервалу од $(-\pi, \pi)$ и то проширили, а остатак фкце ван $(-\pi, \pi)$ не бисмо користили.

Напр. $f(x) = \sin \frac{x}{2}$ има период 4π



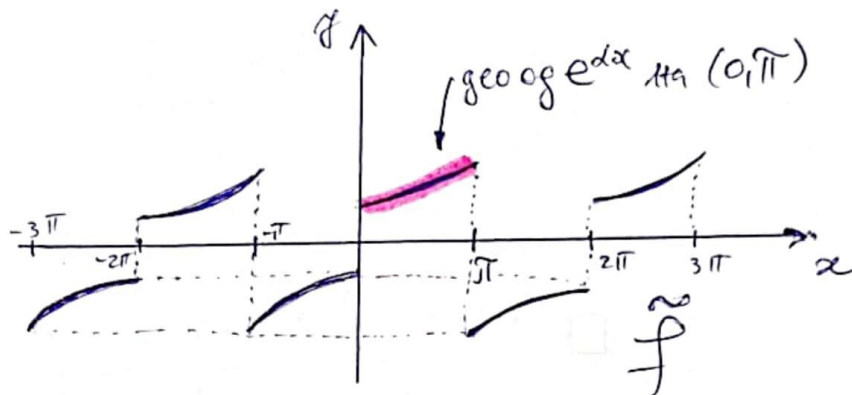
33. (ЈАН1) Нека је $\alpha > 0$ и $f(x) = e^{\alpha x}$.

(а) Развинути фкц f у синусни фурјеов ред на $(0, \pi)$

(б) Израчунаати $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + 4}$

Решение

(а) функцију са $(0, \pi)$ проширимо на $(-\pi, \pi)$ да буде непарна (да бисмо добили синусни ред) и онда проширимо на $\mathbb{R}$ да буде 2π -периодична.



$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) dx = 0$$

↑
Непарна

$$a_n = 0 \quad (\text{јер је } f \text{ непарна})$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^x \sin(nx) dx =$$

↑
парна

↑
користимо заг. 11. (а) стр. 12

$$= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{n}{\lambda^2 + n^2} e^{\lambda x} \cos(nx) + \frac{\lambda}{\lambda^2 + n^2} e^{\lambda x} \sin(nx) \right) \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{-2n(e^{\lambda\pi}(-1)^n - 1)}{\pi(\lambda^2 + n^2)}$$

$$\Rightarrow S_{\tilde{f}}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(1 - e^{\alpha\pi}(-1)^n)}{\pi(\alpha^2 + n^2)} \sin(nx)$$

$$(\circ) S_{\tilde{f}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\tilde{f}\left(\frac{\pi}{2}^+\right) + \tilde{f}\left(\frac{\pi}{2}^-\right)}{2} = \tilde{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\alpha\pi}{2}} \quad (1)$$

Παράγει,

$$S_{\tilde{f}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(1 - e^{\alpha\pi}(-1)^n)}{\pi(\alpha^2 + n^2)} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \textcircled{A}$$

$$\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}}, & n \text{ περιττό} \\ 0, & n \text{ άρτιο} \end{cases}$$

$$\textcircled{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)(1 - e^{\alpha\pi}(-1)^{2n+1})}{\pi(\alpha^2 + (2n+1)^2)} \cdot (-1)^n \quad (2)$$

Υπολογίζουμε (1) και (2).

$$e^{\frac{\alpha\pi}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)(1 - e^{\alpha\pi} \overbrace{(-1)^{2n+1}}^{-1})}{\pi(\alpha^2 + (2n+1)^2)} (-1)^n$$

Υπολογίζουμε $\alpha = 2$:

$$e^{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)(1 + e^{2\pi})}{\pi(4 + (2n+1)^2)} \cdot (-1)^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + 4} = \frac{\pi e^{\pi}}{1+e^{2\pi}}$$

Тамо се израчуна $\sum_{n=1}^{\infty} (n \neq 1)$

за $n=0$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + 4} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + 4} - (-1)^0 \cdot \frac{2 \cdot 0 + 1}{(2 \cdot 0 + 1)^2 + 4} = \\ &= \frac{\pi e^{\pi}}{1+e^{2\pi}} - \frac{1}{5} \quad \square \end{aligned}$$

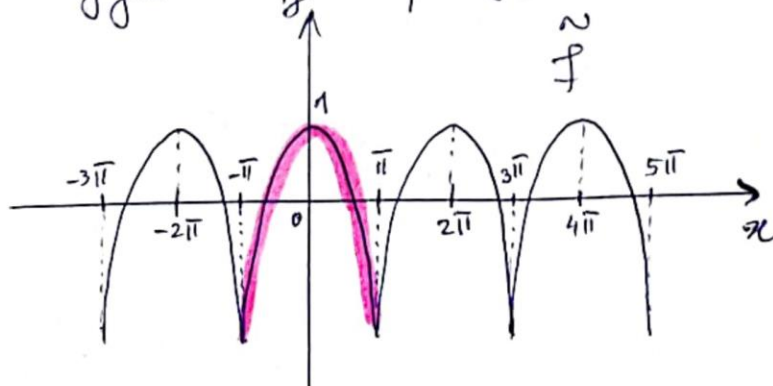
34. (ТТН1) Нека је $f(x) = 1 - x^2$.

(а) Развијте f у Фурјеову серију на $(-\pi, \pi)$;

(б) Израчунајте $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

решење

(а) Проширујемо дефиницију f са $(-\pi, \pi)$ на $\mathbb{R}$ т.г. буде 2π -периодична



$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1-x^2) dx = \frac{2}{\pi} \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{\pi} =$$

↑
напрям

$$= \frac{2}{\pi} \left(\pi - \frac{\pi^3}{3} \right) = 2 - \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1-x^2) \cos(nx) dx =$$

↑
напрям

$$= \left[\begin{array}{ll} u = 1-x^2 & dv = \cos(nx) dx \\ du = -2x dx & v = \frac{1}{n} \sin(nx) \end{array} \right] =$$

$$= \underbrace{\frac{2}{\pi} (1-x^2) \cdot \frac{1}{n} \sin(nx)}_0 \Big|_0^{\pi} + \frac{4}{n^3 \pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u = x & dv = \sin(nx) dx \\ du = dx & v = -\frac{1}{n} \cos(nx) \end{array} \right] = -\frac{4}{n^2 \pi} x \cos(nx) \Big|_0^{\pi} +$$

$$+ \frac{4}{n^2 \pi} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx = \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2} + \underbrace{\left(\frac{4}{n^3 \pi} \sin(nx) \right)}_0 \Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{4 \cdot (-1)^{n+1}}{n^2}$$

$b_n = 0$ (jer je $\tilde{f}$ парна)

$$\Rightarrow S_{\tilde{f}}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) =$$
$$= 1 - \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (-1)^{n+1}}{n^2} \cos(nx)$$

(8) $S_{\tilde{f}}(0) = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = f(0) = 1$

↑
jer je f
непр-у 0

Потоме,

$$S_{\tilde{f}}(0) = 1 - \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (-1)^{n+1}}{n^2} \underbrace{\cos 0}_1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{S_{\tilde{f}}(0) - 1 + \frac{\pi^2}{3}}{-4} = \frac{1 - 1 + \frac{\pi^2}{3}}{-4} = -\frac{\pi^2}{12} \quad \square$$

До сада смо радили са 2π -перодичним функцијама, али можемо радити и са $2l$ -перодичним функцијама користећи следеће формуле:

Нека је $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $2l$ -пермодична и $\int_{-l}^l |f(x)|^2 dx < \infty$.

Фурјеов ред обје фјје је

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \right),$$

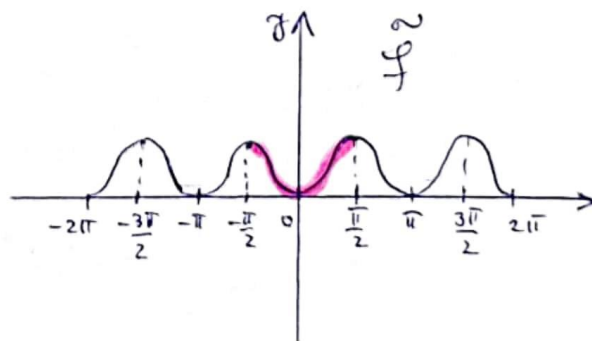
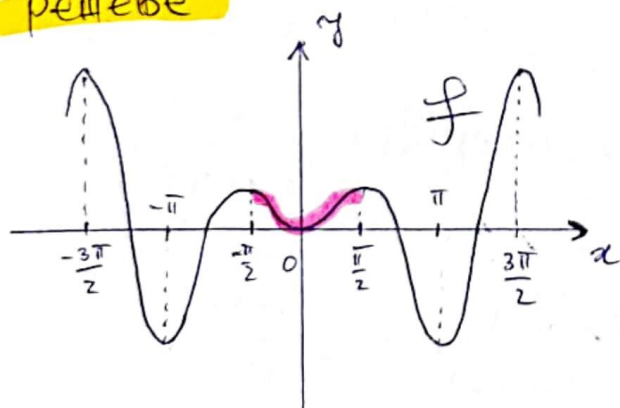
где су $a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx$,

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx$$

35. Развину $f(x) = x \sin x$ у Фурјеов ред на $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. и израчунајте $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2+1}{(4n^2-1)^2}$.

решене



Проширимо део f са $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ на $\mathbb{R}$ н.г.

оде π -пермодична, (обје је $l = \frac{\pi}{2}$).

$$a_0 = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} \tilde{f}(x) dx = \frac{2}{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi/2} x \sin x dx = \left[\begin{array}{ll} u=x & dv=\sin x dx \\ du=dx & v=-\cos x \end{array} \right]$$

$$= \frac{4}{\pi} \left(\underbrace{-x \cos x}_0 \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x dx \right) = \frac{4}{\pi} \sin x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{4}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tilde{f}(x) \cos\left(\frac{n\pi}{2} x\right) dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} x \sin x \cos(2nx) dx$$

$$= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} x \cdot \frac{1}{2} (\sin((2n+1)x) - \sin((2n-1)x)) dx =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u=x & dv = (\sin((2n+1)x) - \sin((2n-1)x)) dx \\ du=dx & v = \frac{-1}{2n+1} \cos((2n+1)x) + \frac{1}{2n-1} \cos((2n-1)x) \end{array} \right] =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\underbrace{u \cdot v}_0 \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2n+1} \int_0^{\pi/2} \cos((2n+1)x) dx - \frac{1}{2n-1} \int_0^{\pi/2} \cos((2n-1)x) dx \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{(2n+1)^2} \sin((2n+1)x) - \frac{1}{(2n-1)^2} \sin((2n-1)x) \right) \Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} - \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \right) = \frac{2(-1)^n}{\pi} \cdot \frac{(2n-1)^2 + (2n+1)^2}{(4n^2-1)^2} =$$

$$= \frac{4(-1)^n (4n^2+1)}{\pi (4n^2-1)^2} ; \quad \text{len} = 0 \text{ (for } \tilde{f} \text{ парна)}$$

$$S_{\tilde{f}}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n (4n^2+1)}{\pi (4n^2-1)^2} \cdot \cos(2nx)$$

$$S_{\tilde{f}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\tilde{f}\left(\frac{\pi}{2}^+\right) + \tilde{f}\left(\frac{\pi}{2}^-\right)}{2} = \tilde{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Therefore,

$$S_{\tilde{f}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n (4n^2+1)}{\pi (4n^2-1)^2} \cdot \underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2+1}{(4n^2-1)^2}} = \frac{(S_{\tilde{f}}(\frac{\pi}{2}) - \frac{2}{\pi}) \cdot \pi}{4} = \frac{(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}) \cdot \pi}{4} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}.$$



Kpzi ☺