

9. У зависности од параметара испитати конв.

$$(a) \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cdot \cos^q x}, \quad p, q \in \mathbb{R}$$

$$(b) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}, \quad p, q \in \mathbb{R}, \quad p < q$$

$$(c) \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^p)}$$

решение

(a) сингуларности у 0 и $\frac{\pi}{2}$

(ако је $p=0$, 0 није синт., ако је $q=0$, $\frac{\pi}{2}$ није синт. па размотримо случај $p, q \neq 0$)

$$\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}}_{I} = \underbrace{\int_0^1}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{\frac{\pi}{2}}}_{I_2} \quad \text{до њи I конв. морају оба } I_1 \text{ и } I_2 \text{ да конв.}$$

конвергенција I_1 :

$$\left. \begin{array}{l} \sin x \sim x, x \rightarrow 0 \\ \cos x \sim 1, x \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{\sin^p x \cos^q x} \sim \frac{1}{x^p} \sim \int_0^1 \frac{dx}{x^p} \text{ конв.}$$

ако је $p < 1$, та I_1 конв. за $p < 1$.

конвергенција I_2 :

$$\int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x} = \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{2} - x \\ dt = -dx \\ x=1 \rightarrow t = \frac{\pi}{2} - 1 \\ x = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 0 \end{array} \right] = \int_0^{\frac{\pi}{2}-1} \frac{dt}{\cos^p t \sin^q t}$$

Сингуларности
је 0

$$\left. \begin{array}{l} \cos t \sim 1, t \rightarrow 0 \\ \sin t \sim t, t \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{\cos^p t \sin^q t} \sim \frac{1}{t^q} \sim \int_0^{\frac{\pi}{2}-1} \frac{dt}{t^q} \text{ конв.}$$

за $q < 1$, то I_2 конв. за $q < 1$.

Коначно, I конв за $p < 1$ и $q < 1$.

(б) синт. у 0 и ∞ .

$$\int_0^\infty = \underbrace{\int_0^1}_{I_1} + \underbrace{\int_1^\infty}_{I_2}$$

конвергенција I_1 :

$$x^p + x^q \sim x^p, x \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{x^p + x^q} \sim \frac{1}{x^p}, x \rightarrow 0 \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{x^p + x^q}$$

конв. за $p < 1$

конвергенција I_2 :

$$x^p + x^q \sim x^q, x \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{x^p + x^q} \sim \frac{1}{x^q}, x \rightarrow \infty \Rightarrow \int_1^\infty \frac{dx}{x^p + x^q}$$

конв. за $q > 1$.

Коначно, I конв. за $p < 1$ и $q > 1$.

(в) сингуларитет је ∞ .

$$\int_0^\infty = \underbrace{\int_0^1}_{I_1} + \underbrace{\int_1^\infty}_{I_2}$$

Мако 0 није синт. дељимо интеграл на 2 дела јер хоћемо да користимо конвергенцију $\int_1^\infty \frac{dx}{x^q}$.

I_1 завжди конв.

конвергенція I_2 :

1° $p = 0$

$$\frac{1}{(1+x^2)(1+x^0)} = \frac{1}{2(1+x^2)} \sim \frac{1}{x^2} \text{ и } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ конв., та конв.}$$

$$\text{и } \int_1^{\infty} \frac{dx}{2(1+x^2)}$$

2° $p < 0$

$$1+x^p \sim 1, x \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{(1+x^2)(1+x^p)} \sim \frac{1}{1+x^2} \sim \frac{1}{x^2}, x \rightarrow \infty \text{ и}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ конв., та конв. и } \int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^p)}$$

3° $p > 0$

$$\frac{1}{(1+x^2)(1+x^p)} \sim \frac{1}{x^{p+2}} \text{ и } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{p+2}} \text{ конв. за } p+2 > 1, \text{ та}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^p)} \text{ конв. за } p > -1$$

Контантно, дами миш, конв. за $p \in \mathbb{R}$. □

10. (a) $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(ax)}{x^b} dx$; (б) $\int_0^1 \frac{\arcsin(x^2)}{x^2 \sqrt[3]{1-x^5}} dx$

решение

(a) асимптотически у 0 и ∞ .

$$\int_0^{\infty} = \underbrace{\int_0^1}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{\infty}}_{I_2}$$

конвергенция I_1 :

$$\operatorname{arctg}(ax) \sim ax, x \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\operatorname{arctg}(ax)}{x^b} \sim \frac{a}{x^{b-1}}, x \rightarrow 0$$

$$\int_0^1 \frac{a}{x^{b-1}} dx \text{ кнв. за } a=0 \text{ или } b < 2, \text{ либо и } I_1.$$

конвергенция I_2 :

$$1^\circ a=0 \Rightarrow \int_1^{\infty} 0 dx = 0 \text{ кнв.}$$

$$2^\circ a \neq 0$$

$$\operatorname{arctg}(ax) \sim \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sgn}(a), x \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{\operatorname{arctg}(ax)}{x^b} \sim \frac{\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(a)}{x^b}$$

$$\Rightarrow I_2 \text{ кнв. за } b > 1.$$

Кстати, I кнв. за $b \in (1, 2)$ и $a \in \mathbb{R}$ или

за $a=0$ и $b \in \mathbb{R}$.

(б) асимпт. у 0 и 1

$$\int_0^1 = \underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}}}_{I_1} + \underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1}_{I_2}$$

конвергенция I_1 :

$$\left. \begin{array}{l} \arcsin(x^2) \sim x^2, x \rightarrow 0 \\ \sqrt[3]{1-x^5} \sim 1, x \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\arcsin(x^2)}{x^\alpha \sqrt[3]{1-x^5}} \sim \frac{1}{x^{\alpha-2}}, \text{ на}$$

I_1 к.в. за $\alpha-2 < 1$, т.е. $\alpha < 3$

конвергенция I_2 :

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\arcsin(x^2)}{x^\alpha \sqrt[3]{1-x^5}} dx = \left[\begin{array}{l} t=1-x \\ dt=-dx \\ x=\frac{1}{2} \rightarrow t=\frac{1}{2} \\ x=1 \rightarrow t=0 \end{array} \right] = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin(1-t)^2}{(1-t)^\alpha \sqrt[3]{1-(1-t)^5}} dt$$

$$\arcsin(1-t)^2 \sim \frac{\pi}{2}, t \rightarrow 0$$

$$(1-t)^\alpha \sim 1, \alpha \rightarrow 0$$

$$\sqrt[3]{1-(1-t)^5} = \sqrt[3]{t^5 - 5t^4 + 10t^3 - 10t^2 + 5t} \sim \sqrt[3]{5t} \sim \sqrt[3]{t}, t \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \frac{\arcsin(1-t)^2}{(1-t)^\alpha \sqrt[3]{1-(1-t)^5}} \sim \frac{\frac{\pi}{2}}{t^{\frac{1}{3}}} \sim \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^{\frac{1}{3}}} \text{ к.в., на}$$

I_2 к.в. за $\alpha \in \mathbb{R}$.

Конечно, давай и I_1 к.в. за $\alpha < 3$. ■

11. Изучавање конвергенцију

$$(a) \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^p \ln^2 x}$$

$$(b) \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} dx$$

решење

(a) сит. је ∞

1° $p > 1$

Нека је $1 < \tau < p$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\tau}{x^p \ln^2 x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\tau-p}}{\ln^2 x} = 0 \Rightarrow \text{за довољно велико}$$

$$x \text{ је } \frac{x^\tau}{x^p \ln^2 x} \leq 1, \text{ тј. } \frac{1}{x^{p-\tau} \ln^2 x} \leq \frac{1}{x^\tau}.$$

$$\text{Како } \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^\tau} \text{ конв. (јер } \tau > 1), \text{ по конв. и } \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^p \ln^2 x}.$$

2° $p < 1$

Нека је $p < \tau < 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\tau}{x^p \ln^2 x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\tau-p}}{\ln^2 x} = \infty \Rightarrow \text{за довољно}$$

$$\text{велико } x \text{ је } \frac{x^\tau}{x^p \ln^2 x} \geq 1, \text{ тј. } \frac{1}{x^{p-\tau} \ln^2 x} \geq \frac{1}{x^\tau}.$$

$$\text{Како } \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^\tau} \text{ губ. (јер } \tau < 1), \text{ по губ. и } \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^p \ln^2 x}$$

3° $p = 1$

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \left[\begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \\ x = 2 \rightarrow t = \ln 2 \\ x = \infty \rightarrow t = \infty \end{array} \right] = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{t^2} - \text{конв. за } 2 > 1.$$

Конечно, дајте мнџ-конт. ако је $p > 1$ или
ако је $p = 1$ и $q > 1$.

Напомена: (a) се може користити та мџноу
без гџаса.

(b) анти. је 0

$$\frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} \sim \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, x \rightarrow 0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} (\ln x)^{-1}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} \ln(\frac{1}{x})} = \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{x} \\ dx = -\frac{1}{t^2} dt \\ x=0 \rightarrow t=\infty \\ x=\frac{\pi}{2} \rightarrow t=\frac{2}{\pi} \end{array} \right] =$$

$$= \int_{\frac{2}{\pi}}^{\infty} \frac{\frac{1}{t^2} dt}{t^{-\frac{1}{2}} \ln t} = \int_{\frac{2}{\pi}}^{\infty} \frac{dt}{t^{3/2} \ln t} \quad \text{конт. на резултат}$$

гџо (a) јер је $p = \frac{3}{2} > 1$.

Морали смо га уведемо мџну $t = \frac{1}{x}$ и

намџишмо га интџларитџи бџје ∞ га

бџмо примџити (a). ■

Гамма функција

$$\Gamma : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$$

$$\Gamma(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} x^{x-1} e^{-x} dx$$

особине:

1 $\Gamma(1) = 1$

2 $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$, $x > 0$

специјално $\Gamma(n) = (n-1)!$, $n \in \mathbb{N}$

3 $\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$, $x \in (0, 1)$

специјално $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}}} = \sqrt{\pi}$

Бета функција

$$B : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$$

$$B(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 x^{x-1} (1-x)^{y-1} dx$$

особине:

1 $B(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{x^{x-1}}{(1+x)^{x+y}} dx$, $x, y > 0$

2 $B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, $x, y > 0$

12. (a) $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$; (б) $\int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-\sqrt{x}} dx$; (в) $\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^p dx$
 $p > -1$

(г) $\int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-x^3} dx$ (7442); (г) $\int_0^1 x^2 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^3 dx$

период

(a) $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \left[\begin{array}{l} x^2 = t \\ x = \sqrt{t} \\ dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}} \end{array} \middle| \begin{array}{l} x=0 \rightarrow t=0 \\ x=\infty \rightarrow t=\infty \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt =$

$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$\boxed{\alpha = \frac{1}{2}}$

(б) $\int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-\sqrt{x}} dx = \left[\begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \\ x=0 \rightarrow t=0 \\ x=\infty \rightarrow t=\infty \end{array} \right] = 6 \int_0^{\infty} t^3 \cdot e^{-t} \cdot t^5 dt =$

$\boxed{\alpha = 9}$

$= 6 \int_0^{\infty} t^{9-1} e^{-t} dt = 6 \cdot \Gamma(9) = 6 \cdot 8!$

(в) $\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^p dx = \left[\begin{array}{l} t = \ln \frac{1}{x} \\ x = e^{-t} \\ dx = -e^{-t} dt \end{array} \middle| \begin{array}{l} x=0 \rightarrow t=\infty \\ x=1 \rightarrow t=0 \end{array} \right] = \int_0^{\infty} t^p e^{-t} dt = \Gamma(p+1)$

$\boxed{\alpha = p+1}$

(г) $\int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-x^3} dx = \left[\begin{array}{l} t = x^3 \\ dx = \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}} dt \\ x=0 \rightarrow t=0 \\ x=\infty \rightarrow t=\infty \end{array} \right] = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{3}$

$\boxed{\alpha = \frac{1}{2}}$

$$(g) \int_0^1 x^2 (\ln \frac{1}{x})^3 dx = \left[\begin{array}{l} t = \ln \frac{1}{x} \\ x = e^{-t} \\ dx = -e^{-t} dt \end{array} \middle| \begin{array}{l} x=0 \rightarrow t=\infty \\ x=1 \rightarrow t=0 \end{array} \right] =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-2t} \cdot t^3 e^{-t} dt = \int_0^{\infty} t^3 e^{-3t} dt = \left[\begin{array}{l} p=3t \\ dt = \frac{1}{3} dp \end{array} \middle| \begin{array}{l} t=0 \rightarrow p=0 \\ t=\infty \rightarrow p=\infty \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{\infty} \frac{1}{27} p^3 e^{-p} dp = \frac{1}{81} \cdot \Gamma(4) = \frac{1}{81} \cdot 3! = \frac{2}{27} \quad \square$$

13. (a) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx$; (б) $\int_0^2 x \sqrt[3]{8-x^3} dx$

решение

$$(a) \int_0^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{5}{4}-1}}{(1+x)^{\frac{5}{4}+\frac{3}{4}}} dx \stackrel{\text{Вводятся } \textcircled{1} \text{ за } B}{=} B\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right) \stackrel{\text{Вводятся } \textcircled{2} \text{ за } B}{=}$$

$$\alpha = \frac{5}{4}, \beta = \frac{3}{4}$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{5}{4})\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(2)} = \Gamma\left(\frac{1}{4}+1\right) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \stackrel{\text{Вводятся } \textcircled{2} \text{ за } \Gamma}{=} \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \stackrel{\text{Вводятся } \textcircled{3} \text{ за } \Gamma}{=} \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$$(8) \int_0^2 x \sqrt[3]{8-x^3} dx = 2 \int_0^2 x \sqrt[3]{1-\left(\frac{x}{2}\right)^3} dx = \left[\begin{array}{l} t = \left(\frac{x}{2}\right)^3 \\ x = 2 \sqrt[3]{t} \\ dx = \frac{2}{3} t^{-\frac{2}{3}} dt \end{array} \right] \begin{array}{l} x=0 \rightarrow t=0 \\ x=2 \rightarrow t=1 \end{array}$$

$$= 2 \cdot \frac{2}{3} \int_0^1 2 \cdot t^{\frac{1}{3}} \cdot (1-t)^{\frac{1}{3}} \cdot t^{-\frac{2}{3}} dt = \frac{8}{3} \int_0^1 t^{-\frac{1}{3}} (1-t)^{\frac{1}{3}} dt =$$

$\alpha = \frac{2}{3}, \beta = \frac{4}{3}$

$$= \frac{8}{3} B\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{\Gamma(2)=1} = \frac{8}{3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \Gamma\left(1+\frac{1}{3}\right) \stackrel{\text{свойства } \textcircled{2} \text{ за } \Gamma}{=}$$

$$= \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{3} \Gamma\left(1-\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \stackrel{\text{свойства } \textcircled{3} \text{ за } \Gamma}{=} \frac{8}{9} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{8}{9} \cdot \frac{\pi}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{16\pi}{9\sqrt{3}}$$

$\text{свойства } \textcircled{3} \text{ за } \Gamma$

14. Определить за koje значения $m, n \in \mathbb{N}$ конвертируется $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx$ и за те значения та изразити.

решение

∞ је сингуларитет

$$\int_0^\infty = \underbrace{\int_0^1}_{I_1} + \underbrace{\int_1^\infty}_{I_2}$$

I_1 конвертира јер нема синг.

конвергенция I_2 :

$$\frac{x^{m-1}}{1+x^n} \sim \frac{x^{m-1}}{x^n} = \frac{1}{x^{n-m+1}}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{n-m+1}} \text{ конв. } \text{зг } n-m+1 > 1, \text{ т.е. } n > m, \text{ т.е.}$$

на основе 2. порябкеной кр. и I_2 конв. зг $n > m$.

Сгга рачунамо интеграл:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx = \left[\begin{array}{l} x^n = t \\ dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt \end{array} \middle| \begin{array}{l} x=0 \rightarrow t=0 \\ x=\infty \rightarrow t=\infty \end{array} \right] =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{t^{\frac{m-1}{n}}}{1+t} \cdot \frac{1}{n} \cdot t^{\frac{1}{n}-1} dt = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} \frac{t^{\frac{m}{n}-1}}{(1+t)^{\frac{m}{n}+\frac{n-m}{n}}} dt =$$

$$= \frac{1}{n} B\left(\frac{m}{n}, \frac{n-m}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m}{n}\right) \Gamma\left(1-\frac{m}{n}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{\sin\left(\frac{m\pi}{n}\right)} \quad \square$$

15. $\int_0^{\pi/2} \sin^p x \cos^q x dx, \quad p, q > -1$

решение

$$\int_0^{\pi/2} \sin^p x \cos^q x dx = \left[\begin{array}{l} t = \sin x \\ \cos x = \sqrt{1-t^2} \\ dt = \cos x dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} x=0 \rightarrow t=0 \\ x=\frac{\pi}{2} \rightarrow t=1 \end{array} \right] =$$

$$= \int_0^1 t^p (\sqrt{1-t^2})^{q-1} dt = \int_0^1 t^p (1-t^2)^{\frac{q-1}{2}} dt =$$

$$= \left[\begin{array}{l} y = t^2 \\ dt = \frac{dy}{2\sqrt{y}} \end{array} \middle| \begin{array}{l} t=0 \rightarrow y=0 \\ t=1 \rightarrow y=1 \end{array} \right] = \int_0^1 y^{\frac{p}{2}} (1-y)^{\frac{q-1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} dy =$$

$$= \int_0^1 y^{\frac{p-1}{2}} (1-y)^{\frac{q-1}{2}} dy = B\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2}\right) \quad \square$$

16. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \sqrt[3]{\operatorname{ctg} x} dx$

решение

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \sqrt[3]{\operatorname{ctg} x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^{\frac{1}{3}} dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{7}{3}} x \cdot \sin^{-\frac{1}{3}} x dx \stackrel{\substack{\text{табл.} \\ 15.}}{=} B\left(\frac{-\frac{1}{3}+1}{2}, \frac{\frac{7}{3}+1}{2}\right) =$$

$$= B\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{5}{3})}{\Gamma(2)} = \Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(1+\frac{2}{3}) =$$

$$= \frac{2}{3} \Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(1-\frac{1}{3}) = \frac{2}{3} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2}{3} \frac{\pi}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \quad \square$$

Редови

Бројни редови

Нека је $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ реалних бројева.
Желимо да дефинишемо бесконачни збир

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots$$

Означимо са $S_N \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^N a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_N$

N -ту парцијалну суму реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Дефиниција Ако низ $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвертира, кажемо да ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвертира и пишемо $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$

Ако низ $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ дивертира, кажемо да ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивертира.

Теорема Ако редови $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвертирају

1) конвертира и $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$, $c \in \mathbb{R}$ и важи $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$;

2) конвертира и $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ и важи $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Теорема (Необходан услов конвергенције)

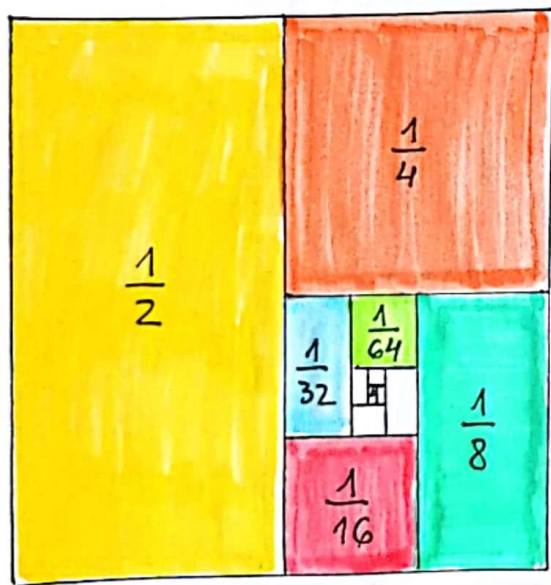
Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвертира, онда $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Напомена: (1) Обрнуто не важи! Ако је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ може и да конвертира и да дивертира.

(2) Корисна је контрапозиција теореме: ако $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, онда ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивертира.

Пример. Како је уопште могуће да бесконачна сума буде коначан број?!

Обојимо квадрате тако што прво обојимо $\frac{1}{2}$, па $\frac{1}{4}$



па $\frac{1}{8}$, па $\frac{1}{16}$, ... и тако до бесконачности. На овај начин ћемо увек имати део који није обојен спреман за бојење и када завршимо ову бесконачну процедуру имаћемо $\mathbb{N}$ обојених квадрата.

Мисамо у субари изради? Сумирамо смо ред:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots = 1$$

$$\text{тј. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

1. Ишпийтайн конвергенцийг дараа по дээрхигүй

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$; (б) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})$; (в) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$

решение

(a) Үргэлжлүүлж $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$S_N = \sum_{n=1}^N a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{N(N+1)} =$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} =$$

$$= 1 - \frac{1}{N+1}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 1$$

$\Rightarrow$ гэвч дарааг конвергент и тийсвэр сум нь 1.

$$(б) S_N = \sum_{n=1}^N a_n = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[3]{N+1} - \sqrt[3]{N} =$$

$$= \sqrt[3]{N+1} - 1$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{N+1} - 1) = +\infty, \text{ та дарааг}$$

дарааг конвергент.

$$(в) S_N = \sum_{n=1}^N a_n = \sum_{n=1}^N \left((\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \right)$$

Ойшгож $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$$\Rightarrow S_N = \sum_{n=1}^N (x_{n+1} - x_n) = x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + \dots + x_{N+1} - x_N =$$

$$= x_{N+1} - x_1 = \sqrt{N+2} - \sqrt{N+1} - (\sqrt{2} - \sqrt{1})$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = 1 - \sqrt{2} + \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sqrt{N+2} - \sqrt{N+1} \right) \cdot \frac{\sqrt{N+2} + \sqrt{N+1}}{\sqrt{N+2} + \sqrt{N+1}} =$$

$$= 1 - \sqrt{2} + \lim_{N \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{N+2 - (N+1)}{\sqrt{N+2} + \sqrt{N+1}}}_0 = 1 - \sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ дати ред конвертира и збир му је $1 - \sqrt{2}$. $\blacksquare$

2. Ишитајте конвергенцију реда по дефиницији

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$; (б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$; (в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

(г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)\dots(n+p)}$

решење

(a) $S_N = \sum_{n=1}^N (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^N = \begin{cases} 0, & N \text{ парно} \\ -1, & N \text{ непарно} \end{cases}$

Закључујемо да $S_N = (-1, 0, -1, 0, -1, 0, \dots)$ а овај низ конвертира, па конвертира и дати ред.

(б) Применимо $\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right)$ 

Зато смо можемо рећи да низ конвертира као ред

линейных рациональных ф-х, запишем:

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{A}{3n-2} + \frac{B}{3n+1},$$

Найдем A и B и получим 

Оставим $x_n := \frac{1}{3n-2}$. Тогда же

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^N a_n = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right) = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^N (x_n - x_{n+1}) = \\ &= \frac{1}{3} (x_1 - x_2 + x_2 - x_3 + x_3 - x_4 + \dots + x_N - x_{N+1}) = \\ &= \frac{1}{3} (x_1 - x_{N+1}) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3 \cdot 1 - 2} - \frac{1}{3N+1} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3N}{3N+1} = \frac{N}{3N+1} \end{aligned}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{3N+1} = \frac{1}{3}, \text{ по правилу Лопиталя}$$

и сумма му же $\frac{1}{3}$.

$$(b) \text{ Примем } \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\text{Оставим } x_n := \frac{1}{n^2}$$

$$S_N = \sum_{n=1}^N a_n = \sum_{n=1}^N (x_n - x_{n+1}) = x_1 - x_{N+1} = 1 - \frac{1}{(N+1)^2}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{(N+1)^2} \right) = 1, \text{ по правилу Лопиталя}$$

и сумма му же 1.

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)} &= \frac{1}{p} \cdot \frac{p+n-n}{n(n+1)\dots(n+p)} = \\
 &= \frac{1}{p} \left(\underbrace{\frac{1}{n(n+1)\dots(n+p-1)}}_{\substack{|| \\ x_n}} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+p)} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_N &= \sum_{n=1}^N a_n = \frac{1}{p} \sum_{n=1}^N (x_n - x_{n+1}) = \frac{1}{p} (x_1 - x_{N+1}) = \\
 &= \frac{1}{p} \left(\frac{1}{p!} - \frac{1}{(N+1)(N+2)\dots(N+p)} \right)
 \end{aligned}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \frac{1}{p \cdot p!}, \text{ па јави ред конв. и сумирају}$$

$$\text{је } \frac{1}{p \cdot p!} \quad \blacksquare$$

3. Сумирајте редове

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n; \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 2^n, |2| < 1; \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{3^n}; \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$$

решење

(a) Ово је геометријски ред.

$$\begin{aligned}
 S_N &= 2 + 2^2 + \dots + 2^N \\
 2 \cdot S_N &= 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{N+1}
 \end{aligned} \quad \ominus$$

$$(1-2) S_N = 2 - 2^{N+1}$$

$$S_N = \frac{2 - 2^{N+1}}{1-2} = \frac{2}{1-2} \cdot (1 - 2^{N+1})$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \frac{q}{1-q} \left(1 - \lim_{N \rightarrow \infty} q^{N+1} \right) = \begin{cases} \frac{q}{1-q}, & |q| < 1 \\ +\infty, & q \geq 1 \\ \text{не существует}, & q \leq -1 \end{cases}$$

Закле, геометријски ред конвер. ако је $|q| < 1$ и тада му је сума $\frac{q}{1-q}$.

$$\begin{aligned} (8) \quad S_N &= q + 2q^2 + 3q^3 + \dots + Nq^N \\ qS_N &= q^2 + 2q^3 + 3q^4 + \dots + Nq^{N+1} \end{aligned} \quad \text{---} \quad \ominus$$

$$(1-q)S_N = q + q^2 + q^3 + \dots + q^N - Nq^{N+1} =$$

$$= q \left(1 + q + \dots + q^{N-1} - Nq^N \right) =$$

$$= q \left(\frac{1-q^N}{1-q} - Nq^N \right)$$

$$\Rightarrow S_N = \frac{q}{1-q} \left(\frac{1-q^N}{1-q} - Nq^N \right)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{q}{1-q} \left(\frac{1-q^N}{1-q} - Nq^N \right) = \frac{q}{(1-q)^2}$$

користимо $|q| < 1$,
та $\lim_{N \rightarrow \infty} q^N = 0$ и
 $\lim_{N \rightarrow \infty} Nq^N = 0$

Закле, $\sum_{n=1}^{\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}$.

$$(9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n + \left(\frac{-1}{3} \right)^n \right) \stackrel{(a)}{=} \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} + \frac{\frac{-1}{3}}{1 - \left(-\frac{1}{3} \right)} = \frac{7}{4}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \stackrel{(8)}{=} \frac{\frac{1}{3}}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3}{4} \quad \square$$