

## Теорема (II поредбени критеријум)

Нека су  $f, g: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  непрекидне и позитивне и  
нека је  $c = \lim_{\beta \rightarrow b-} \frac{f(\beta)}{g(\beta)}$ . Тада

- 1 Ако је  $0 < c < +\infty$ , онда су  $\int_a^b f(x) dx$  и  $\int_a^b g(x) dx$   
еквивалентни (тј. или оба конв. или оба див.)
- 2 Ако је  $c = 0$  и  $\int_a^b g(x) dx$  конв., онда  $\int_a^b f(x) dx$  конв.
- 3 Ако је  $c = \infty$  и  $\int_a^b f(x) dx$  конв., онда  $\int_a^b g(x) dx$  конв.

1. (a)  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$  (б)  $\int_0^1 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) dx$

Решение

(a)  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_2^{\beta} \frac{dx}{(x+2)(x-1)} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \int_2^{\beta} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right) dx =$

Сингулярный  
в  $+\infty$

$= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} (\ln|x-1| - \ln|x+2|) \Big|_2^{\beta} =$

$= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} (\ln(\beta-1) - \ln(\beta+2) - \ln 1 + \ln 4) =$

$= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{3} \underbrace{\ln \frac{\beta-1}{\beta+2}}_0 + \frac{\ln 4}{3} \right) = \frac{\ln 4}{3}$

Пояснение: можно сделать так:

$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2} = \frac{1}{3} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x+2}$

пер оба этих интеграла проверяя

(б)  $\int_0^1 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \int_{\alpha}^1 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) dx = \left[ \begin{array}{l} u = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \quad dv = dx \\ du = \frac{x}{x+1} \cdot \frac{-1}{x^2} dx \quad v = x \end{array} \right]$

Сингулярный  
в 0

$= \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \left( x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \Big|_{\alpha}^1 + \int_{\alpha}^1 \frac{dx}{x+1} \right) =$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \left( \ln 2 - \alpha \ln \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right) + \ln(\alpha + 1) \right) =$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \left( \ln 2 - \alpha \ln \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right) + \ln 2 - \underbrace{\ln(\alpha + 1)}_{\downarrow 0} \right) =$$

$$= 2\ln 2 - \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \frac{\ln \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right)}{\frac{1}{\alpha}} \stackrel{\substack{\text{н.н.} \\ \frac{\infty}{\infty}}}{=} 2\ln 2 - \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \frac{\frac{\alpha}{\alpha+1} \cdot \frac{-1}{\alpha^2}}{-\frac{1}{\alpha^2}} = 2\ln 2 \quad \square$$

2.  $\int_0^{\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$

разделить  $\int_0^{\infty} = \int_0^1 + \int_1^{\infty}$

суть  $\int_0^{\infty}$   $\int_0^1$   $\int_1^{\infty}$

суть  $\int_0^{\infty}$   $\int_0^1$   $\int_1^{\infty}$

суть  $\int_0^{\infty}$   $\int_0^1$   $\int_1^{\infty}$

$$I_1 = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \int_{\alpha}^1 \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx = \left[ \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \end{array} \quad \begin{array}{l} dv = \frac{x dx}{(1+x^2)^2} \\ v = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \end{array} \right] =$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \left( -\frac{1}{2} \cdot \frac{\ln x}{1+x^2} \Big|_{\alpha}^1 + \frac{1}{2} \int_{\alpha}^1 \frac{dx}{x(x^2+1)} \right) =$$

рациональная функция

$$= \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln \alpha}{1+\alpha^2} + \frac{1}{2} \int_{\alpha}^1 \left( \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} \right) dx \right) =$$

$$= \lim_{d \rightarrow 0+} \left( \frac{1}{2} \frac{\ln d}{1+d^2} + \frac{1}{2} \left( \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right) \Big|_d^1 \right) =$$

$$= \lim_{d \rightarrow 0+} \left( \frac{1}{2} \frac{\ln d}{1+d^2} + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \ln 2 - \ln d + \frac{1}{2} \ln(d^2+1) \right) \right) =$$

$$= \lim_{d \rightarrow 0+} \left( \frac{1}{2} \ln d \cdot \frac{-d^2}{1+d^2} - \frac{1}{4} \ln 2 + \underbrace{\frac{1}{4} \ln(d^2+1)}_{\downarrow 0} \right) =$$

$$= -\frac{1}{4} \ln 2 - \frac{1}{2} \lim_{d \rightarrow 0+} \frac{\ln d}{\frac{1+d^2}{d^2}} \stackrel{\frac{-\infty}{\infty}}{=} -\frac{1}{4} \ln 2 - \frac{1}{2} \lim_{d \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{d}}{\frac{-2}{d^3}} = -\frac{1}{4} \ln 2$$

$$I_2 = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_1^\beta \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx = \left[ \begin{array}{ll} u = \ln x & dv = \frac{x dx}{(1+x^2)^2} \\ du = \frac{dx}{x} & v = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \end{array} \right] =$$

$$= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left( -\frac{\ln x}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \Big|_1^\beta + \frac{1}{2} \int_1^\beta \frac{dx}{x(1+x^2)} \right) =$$

$$= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left( -\frac{\ln \beta}{2(1+\beta^2)} + \frac{1}{2} \left( \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right) \Big|_1^\beta \right) =$$

$$= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left( -\frac{\ln \beta}{2(1+\beta^2)} + \frac{1}{2} \left( \ln \beta - \frac{1}{2} \ln(1+\beta^2) + \frac{1}{2} \ln 2 \right) \right) =$$

$$= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left( \underbrace{\frac{1}{4} (2 \ln \beta - \ln(1+\beta^2))}_{\ln(\beta^2)} + \frac{1}{4} \ln 2 \right) =$$

$$= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left( \underbrace{\frac{1}{4} \cdot \ln \left( \underbrace{\frac{\beta^2}{1+\beta^2}}_{\downarrow 1} \right)}_{\downarrow 0} + \frac{1}{4} \ln 2 \right) = \frac{1}{4} \ln 2$$

$$\Rightarrow I = I_1 + I_2 = -\frac{1}{4} \ln 2 + \frac{1}{4} \ln 2 = 0. \quad \square$$

3.  $\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2} dx$

перейдем

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2} dx = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^{\beta} \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2} dx =$$

интегрируем  
по  $\infty$

$$= \left[ \begin{array}{l} u = \ln(1+x+x^2) \\ du = \frac{1+2x}{1+x+x^2} dx \end{array} \quad \begin{array}{l} dv = \frac{dx}{(1+x)^2} \\ v = -\frac{1}{1+x} \end{array} \right] =$$

разложим на  
дроби

$$= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left( -\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x} \Big|_0^{\beta} + \int_0^{\beta} \frac{1+2x}{(1+x)(1+x+x^2)} dx \right) =$$

$$= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left( -\frac{\ln(1+\beta+\beta^2)}{1+\beta} + \int_0^{\beta} \left( \frac{x+2}{x^2+x+1} - \frac{1}{x+1} \right) dx \right) =$$

$$= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left( -\frac{\ln(1+\beta+\beta^2)}{1+\beta} + \frac{1}{2} \int_0^{\beta} \left( \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{3}{x^2+x+1} \right) dx - \ln|x+1| \Big|_0^{\beta} \right) =$$

$\uparrow$   
 $t = x^2+x+1$

$\uparrow$   
 $t = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$

$$= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left( -\frac{\ln(1+\beta+\beta^2)}{1+\beta} - \ln(1+\beta) + \left( \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) \Big|_0^{\beta} \right) =$$

$$= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left( -\frac{\ln(1+\beta+\beta^2)}{1+\beta} - \ln(1+\beta) + \frac{1}{2} \ln(\beta^2+\beta+1) + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2\beta+1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{6} \right)$$

$\downarrow$   
 $\sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{2}$

$$= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left( -\frac{\ln(1+\beta+\beta^2)}{1+\beta} + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\beta^2+\beta+1}{(1+\beta)^2} \right) \right) + \frac{\sqrt{3}\pi}{3} \underset{\substack{\text{н.п.} \\ \text{"} \infty \text{"}}}{=}$$

$\downarrow$   
 $0$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \underbrace{\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\frac{2\beta+1}{\beta^2+\beta+1}}{1}}_0 = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \quad \square$$

4. Виконайте конверсію інтеграла:

(а)  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ ; (б)  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ ; (в)  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ; (г)  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

**Решение**

(а)  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$

$\frac{1}{1+x^3}$  је непрекиднa на  $[0, 1]$ , па је  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} < \infty$ .

У  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$  сингуларитет је  $\infty$ .

Како је  $\frac{1}{1+x^3} \sim \frac{1}{x^3}$  кад  $x \rightarrow \infty$  (тј. два интеграла

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^3} \sim \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$  су еквивалентни јер  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^3+1}}{\frac{1}{x^3}} = 1$ )

и како  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$  конвертира, то конвертира и  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ .

$\Rightarrow$  конвертира  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ .

Напомена: О томе сингуларитет за  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ , али јесће за  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3}$ , па ако због тога дамо интеграл поделити на два.

$$(v) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \leftarrow \boxed{\text{сингуларитет је 1}} = \left[ \begin{array}{l} t=1-x \\ dt=-dx \\ x=0 \rightarrow t=1 \\ x=1 \rightarrow t=0 \end{array} \right] = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int_0^1 \frac{dt}{t^{1/2}} < \infty$$

јер  $\frac{1}{2} < 1$ .

$$(b) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[ \begin{array}{l} t=1-x \\ dt=-dx \\ x=0 \rightarrow t=1 \\ x=1 \rightarrow t=0 \end{array} \right] = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(2-t)}}$$

$\boxed{\text{сингуларитет је 1}}$

$\boxed{\text{убедимо се да је сингуларитет због 0, а не због 1}}$

Како је  $\frac{1}{\sqrt{2-t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}$ ,  $t \rightarrow 0$  и како  $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$  конвергира,  
 то конвертира и дати интеграл.

(2)  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x^2+1}}$  ← сингуларитет  
је  $\infty$

1. Начин (1. поређење крив.)

$$x^2+1 > x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > x \quad (\text{јер } x \in (1, \infty), \text{ па } |x| = x)$$

$$\Rightarrow x \sqrt{x^2+1} > x^2 \Rightarrow \frac{1}{x \sqrt{x^2+1}} < \frac{1}{x^2}$$

Како  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$  конвергира, то конвертира и дати  
 интеграл.

2. Начин (2. поређење криверцијум)

$$\frac{1}{x \sqrt{x^2+1}} \sim \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}, \quad x \rightarrow \infty, \text{ па како } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ конв.,}$$

то конв. и дати интеграл. ■

5. Ишитајте конвергенцију интеграла

(a)  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+e^x}$  ; (б)  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+x}}$

решење

(a) сингуларитет је  $\infty$ . Зналимо да је  $e^x$  много

Функция  $e^x$  (и ее обратная) не являются полиномами, но можно показать, что они превосходят  $x^2$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \infty \Rightarrow (\exists x_0 \in (0, \infty)) (\forall x \geq x_0) e^x \geq x^2$$

$$\Rightarrow e^x + 1 \geq x^2 + 1 \Rightarrow \frac{1}{e^x + 1} \leq \frac{1}{x^2 + 1} \quad (*)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+e^x} = \underbrace{\int_0^{x_0} \frac{dx}{1+e^x}}_{\text{конв. по } \frac{1}{1+e^x} \text{ на } [0, x_0]} + \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{1+e^x}$$

Имеем  $\frac{1}{x^2+1} \sim \frac{1}{x^2}$ ,  $x \rightarrow \infty$ , но пока  $\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{x^2}$  конв., то на основании 1. пер. крит. конв.  $\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{1+e^x}$ , а отсюда на основании 2. пер. крит. за  $(*)$  конв. и  $\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{e^x+1}$ , то конв., и интеграл сходится.

$$(8) \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+x}} = \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^4+x}}}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+x}}}_{I_2}$$

интегрируем от 0 до  $\infty$

$\frac{1}{\sqrt{x^4+x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ ,  $x \rightarrow 0$  и  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$  конв.  $\Rightarrow I_1$  конв. на основании 2. пер. кр.

$$\frac{1}{\sqrt{x^4+x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x^4}} = \frac{1}{x^2}, x \rightarrow \infty \sim \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ кoнв.} \Rightarrow I_2 \text{ кoнв. на основу пор. кр.}$$

Како  $I_1$  и  $I_2$  кoнв., то кoнв. и даиш мнш. □

6. Ишпшати кoнвeргенцију интеграла

$$(a) \int_1^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) dx ; (b) \int_1^2 \frac{dx}{\ln x} ; (c) \int_0^{\pi/2} \tan x dx$$

решетбе

(a) сшт. је  $\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = 1 \Rightarrow \ln(1+\frac{1}{x}) \sim \frac{1}{x}, x \rightarrow \infty, a$$

како  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$  див., то див. и даиш мнш. на

основу 2. пор. крм.

(b) сшт. је 1.

користимо  
 $\ln(1+x) \sim x, x \rightarrow 0$

$$\ln x = \ln(1+(x-1)) \sim x-1, x \rightarrow 1$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x-1} = \left[ \begin{array}{l} t = x-1 \\ dt = dx \\ x=1 \rightarrow t=0 \\ x=2 \rightarrow t=1 \end{array} \right] = \int_0^1 \frac{dt}{t} \text{ - див., па див. и даиш мнш. на основу 2. пор. кр.}$$

(c) сшт. је  $\frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\pi/2} \tan x dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left[ \begin{array}{l} t = \frac{\pi}{2} - x \\ dt = -dx \\ x=0 \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} \rightarrow t=0 \end{array} \right] = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-t)}{\cos(\frac{\pi}{2}-t)} dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t} dt \quad \leftarrow \text{лиміт } 0$$

$$\frac{\cos t}{\sin t} \sim \frac{1}{t}, \quad t \rightarrow 0 \quad \sim \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{t} \text{ губ.} \Rightarrow \text{губ. згідно мнв. на основі 2-го р. кр.} \quad \square$$

Постановка аналізу 1:

$$\sin x \sim x, \quad x \rightarrow 0$$

$$\ln(1+x) \sim x, \quad x \rightarrow 0$$

$$\cos x \sim 1, \quad x \rightarrow 0$$

$$\operatorname{arctg} x \sim x, \quad x \rightarrow 0$$

$$\operatorname{arctg} x \sim \frac{\pi}{2}, \quad x \rightarrow +\infty$$

$$e^x \sim 1+x, \quad x \rightarrow 0$$

мнв.

7. Виконати конвергенцію інтеграла

$$(a) \int_2^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^3} dx; \quad (b) \int_0^{2021} \frac{\sqrt{x} \ln(1+x)}{\operatorname{arctg}(x^{3/2}) \sin \sqrt{x}} dx$$

(ТНН 2)

Решение

(a) ліміт. је  $\infty$ .

$$\text{Число } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \text{ то } \ln x \leq x \text{ за } x \geq x_0 \in (2, \infty)$$

$$\Rightarrow \frac{\ln x}{1+x^3} \leq \frac{x}{1+x^3} \sim \frac{1}{x^2}, x \rightarrow \infty$$

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ кoнв., лa кoнв. } \int_2^{\infty} \frac{x dx}{1+x^3} \text{ на oснoвy 2. пop. кp,}$$

а пoтeм на oснoвy 1. пop. кp. кoнв. и гaтoм мнe.

(8) интeгрaлнeйшeм y вpeднocтeм  $x \in [0, 2021]$  зa кoje je  $\sin \sqrt{x} = 0$ , a тo je  $\sqrt{x} = k\pi$  тo.  $x = k^2 \pi^2$ ,

$0 \leq k \leq 14$  лa гaтoм мнe. гeмo нa:

$$\int_0^{2021} = \int_0^1 + \int_1^{\pi^2} + \int_{\pi^2}^{2\pi^2} + \int_{2\pi^2}^{4\pi^2} + \int_{4\pi^2}^{10\pi^2} + \dots + \int_{190\pi^2}^{196\pi^2} + \int_{196\pi^2}^{2021}$$

oзнaчeтeм y интeгрaлнeйшeм

зa кoje  $\int_0^x$  кoнв., пoтeм cвaкe oд oвeк мнe. je кoнв.

oтaкимo пoдмeнeмo фyнкцy  $f(x) = \frac{\sqrt{x} \ln(1+x)}{\arctg(x^{3/2}) \sin \sqrt{x}}$

кoнвeрeнцyje,  $\int_0^1 f(x) dx$ :

$$\ln(1+x) \sim x, x \rightarrow 0$$

$$\arctg(x^{3/2}) \sim x^{3/2}, x \rightarrow 0$$

$$\sin \sqrt{x} \sim \sqrt{x}, x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow f(x) \sim \frac{\sqrt{x} \cdot x}{x^{3/2} \cdot \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}, x \rightarrow 0 \text{ и } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \text{ кoнв., лa кoнв. и } \int_0^1 f(x) dx$$

на oснoвy 2. пop. кp.

конвергенция  $\int_1^{\pi^2} f(x) dx$ :

хотено да преобразуваме сингулярните у 0.

$$\int_1^{\pi^2} f(x) dx = \left[ \begin{array}{l} t = \pi - \sqrt{x} \\ x = (\pi - t)^2 \\ dx = (2t - 2\pi) dt \\ x = 1 \rightarrow t = \pi - 1 \\ x = \pi^2 \rightarrow t = 0 \end{array} \right] = 2 \int_0^{\pi-1} \frac{(\pi-t)^2 \ln(1+(\pi-t)^2)}{\underbrace{\operatorname{arctg}((\pi-t)^3)}_{\sin t} \cdot \underbrace{\sin(\pi-t)}_{\sin t}} dt$$

$$= 2 \int_0^{\pi-1} \frac{(\pi-t)^2 \ln(1+(\pi-t)^2)}{\underbrace{\operatorname{arctg}((\pi-t)^3) \cdot \sin t}_{g(t)}} dt$$

$$\left. \begin{array}{l} (\pi-t)^2 \sim \pi^2, t \rightarrow 0 \\ \ln(1+(\pi-t)^2) \sim \ln(1+\pi^2), t \rightarrow 0 \\ \operatorname{arctg}((\pi-t)^3) \sim \operatorname{arctg} \pi^3, t \rightarrow 0 \\ \sin t \sim t, t \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow g(t) \sim \frac{\pi^2 \ln(1+\pi^2)}{\operatorname{arctg} \pi^3 \cdot t} \sim \frac{1}{t}, t \rightarrow 0$$

$\sim \int_0^{\pi-1} \frac{dt}{t}$  губ., неа

губ. и  $\int_0^{\pi-1} g(t) dt$  не

ослову 2. пер. крит.

$\Rightarrow$  губертура и  $\int_0^{2021} f(x) dx$ . ■

8. (а) Импитатв конв. и израунаит  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{2 + e^{x/2}}$

(б) Импитатв конв.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x} \cdot \cos x}$

решение

(а) аитугаритет  $\rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{x/2}} = 0 \Rightarrow (\exists x_0 \in (0, +\infty)) (\forall x \geq x_0) x^2 \leq e^{x/2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2 + e^{x/2}} \leq \frac{1}{2 + x^2} \sim \frac{1}{x^2} \text{ и } \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{x^2}, \text{ на конв.}$$

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{2 + e^{x/2}} \text{ на основу 1. пор. крит.}$$

Пакоже, конв. и  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{2 + e^{x/2}}$ , на конв. даиш итв.

Сага да на израунамо.

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{2 + e^{x/2}} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^{\beta} \frac{e^{x/2} dx}{e^{x/2} (2 + e^{x/2})} = \left[ \begin{array}{l} t = e^{x/2} \\ 2 dt = e^{x/2} dx \\ x=0 \rightarrow t=1 \\ x=\beta \rightarrow t=e^{\beta/2} \end{array} \right] =$$

$$= \lim_{\beta \rightarrow \infty} 2 \int_1^{e^{\beta/2}} \frac{dt}{t(2+t)} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} 2 \int_1^{e^{\beta/2}} \left( \frac{\frac{1}{2}}{t} - \frac{\frac{1}{2}}{t+2} \right) dt = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left( \ln|t| - \ln|t+2| \right) \Big|_1^{\beta} =$$

рационална  
функција

$$= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left( \underbrace{\ln\left(\frac{\beta}{\beta+2}\right)}_{\downarrow 1} + \ln 3 \right) = \ln 3$$

(8) сингулярностей у 0 и  $\frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} = \underbrace{\int_0^1}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{\frac{\pi}{2}}}_{I_2}$$

конвергенция  $I_1$ :

$$\left. \begin{array}{l} \sin x \sim x, x \rightarrow 0 \\ \cos x \sim 1, x \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\sin x} \cos x} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}, x \rightarrow 0 \text{ и}$$

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$  контв, по контв. и  $I_1$  на основе 2-го кр.

конвергенция  $I_2$ :

$$\int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x} \cos x} = \left[ \begin{array}{l} t = \frac{\pi}{2} - x \\ dt = -dx \\ x = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 0 \\ x = 1 \rightarrow t = \frac{\pi}{2} - 1 \end{array} \right] = \int_0^{\frac{\pi}{2}-1} \frac{dt}{\sqrt{\cos t} \cdot \sin t}$$

сингулярность  
в 0

$$\left. \begin{array}{l} \cos t \sim 1, t \rightarrow 0 \\ \sin t \sim t, t \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\cos t} \cdot \sin t} \sim \frac{1}{t}, t \rightarrow 0 \text{ и } \int_0^{\frac{\pi}{2}-1} \frac{dt}{t} \text{ гув.}$$

на гув. и  $I_2$  на основе 2-го кр.

$\Rightarrow$  гамма-функция.  $\blacksquare$