

18. $I(m, n) = \int_0^1 x^m (\ln x)^n dx, \quad m, n \in \mathbb{N}$

per parte

$$I(m, n) = \int_0^1 x^m (\ln x)^n dx = \left[\begin{array}{ll} u = (\ln x)^n & dv = x^m dx \\ du = \frac{n (\ln x)^{n-1}}{x} dx & v = \frac{1}{m+1} x^{m+1} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1} \cdot (\ln x)^n \Big|_0^1 - \frac{n}{m+1} \int_0^1 x^m (\ln x)^{n-1} dx =$$

$$= \left(\frac{1}{m+1} (\ln 1)^n - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^{m+1}}{m+1} (\ln x)^n \right) \right) - \frac{n}{m+1} I(m, n-1) =$$

$$= - \frac{n}{m+1} I(m, n-1).$$

$$I(m, n) = -\frac{n}{m+1} I(m, n-1) = \left(-\frac{n}{m+1}\right) \cdot \left(-\frac{n-1}{m+1}\right) I(m, n-2) = \dots$$

$$\dots = \left(-\frac{n}{m+1}\right) \left(-\frac{n-1}{m+1}\right) \dots \left(-\frac{2}{m+1}\right) \left(-\frac{1}{m+1}\right) I(m, 0) =$$

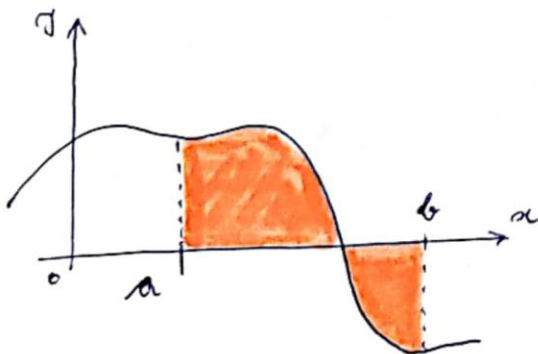
$$= \frac{(-1)^n \cdot n!}{(m+1)^n} I(m, 0)$$

$$I(m, 0) = \int_0^1 x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{m+1}$$

$$\Rightarrow I(m, n) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(m+1)^{n+1}} \quad \square$$

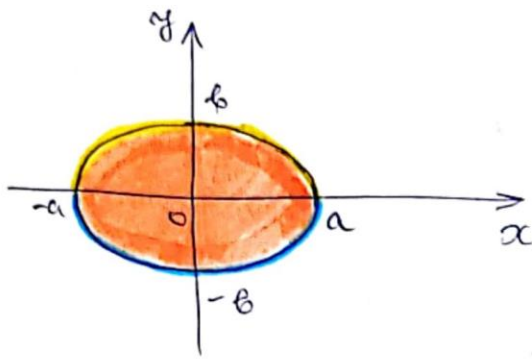
Примена одрежених интеграла

1) Површина равной линии



$$p = \int_a^b |f(x)| dx$$

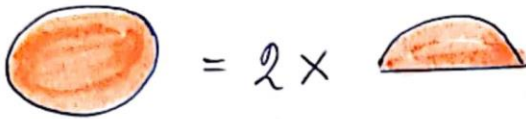
Пример Найти площадь ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$.



$$y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)$$

$$y_1 = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

$$y_2 = -b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$



$$P = 2 \cdot \int_{-a}^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = \left[\begin{array}{l} \frac{x}{a} = \sin t \\ dx = a \cos t dt \\ t = \arcsin \frac{x}{a} \end{array} \left| \begin{array}{l} x = -a \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ x = a \rightarrow t = -\frac{\pi}{2} \end{array} \right. \right] =$$

$$= 2b \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot a \cos t dt = 4b \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos^2 t dt =$$

$\uparrow$ nap+9

$$= 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 4ab \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 4ab \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin \pi - 0 \right) = ab\pi \quad \square$$

2 Дужина лука криве

Крива је непрекинуто пресликавање $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$.
(координат може бити $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, али ћемо се ми
бавити само случајем $\mathbb{R}^2$.)

Дужина лука криве $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ даје се
 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ је

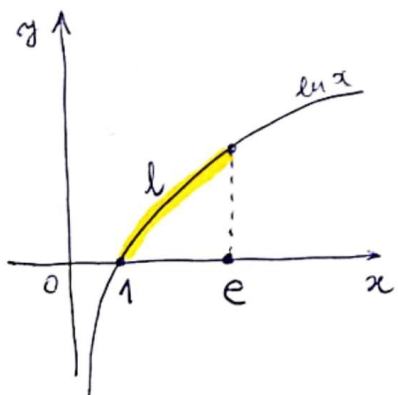
$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Специјално, ако је крива график функције $y = f(x)$,
дужина криве $y = f(x)$ за $x \in [a, b]$ је

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Пр
Пример

Наћи дужину лука криве $y = \ln x$, $1 \leq x \leq e$.



$$\begin{aligned} l &= \int_1^e \sqrt{1 + ((\ln x)')^2} dx = \\ &= \int_1^e \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx = \end{aligned}$$

$$= \int_1^e \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx = \int_1^e \frac{x \sqrt{x^2+1}}{x^2} dx = \left[\begin{array}{l} t^2 = x^2 + 1 \\ t dt = x dx \\ x=1 \rightarrow t=\sqrt{2} \\ x=e \rightarrow t=\sqrt{e^2+1} \end{array} \right] =$$

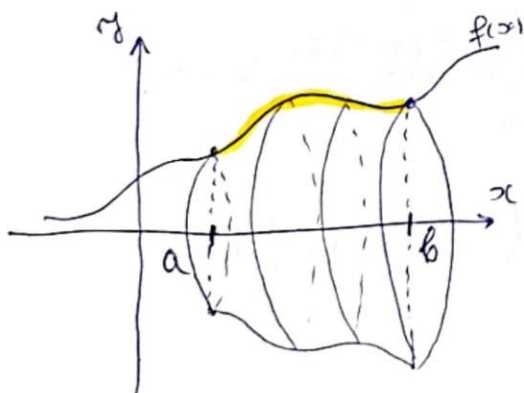
$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^2+1}} \frac{t^2-1+1}{t^2-1} dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^2+1}} \left(1 + \frac{\frac{1}{2}}{t-1} - \frac{\frac{1}{2}}{t+1} \right) dt =$$

$$= \left(t + \frac{1}{2} \ln |t-1| - \frac{1}{2} \ln |t+1| \right) \Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^2+1}} =$$

$$= \sqrt{e^2+1} + \frac{1}{2} \ln (\sqrt{e^2+1}-1) - \frac{1}{2} \ln (\sqrt{e^2+1}+1) -$$

$$- \sqrt{2} - \frac{1}{2} \ln (\sqrt{2}-1) + \frac{1}{2} \ln (\sqrt{2}+1) \quad \square$$

3 Запрещена сферична тела

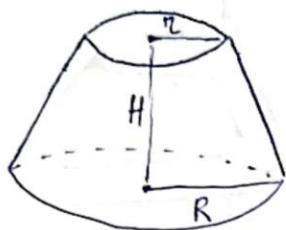


$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

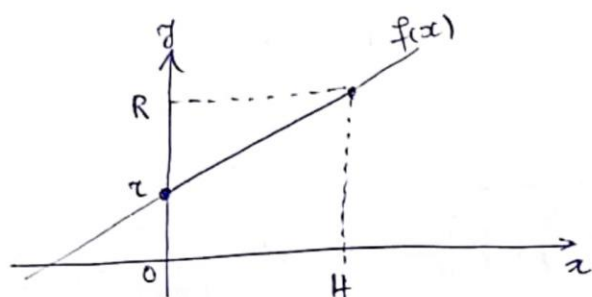
← образувано $f(x)$
око x -осе

ПР

Пример Найти заданную функцию криво



Представим это как поворачивающуюся функцию.



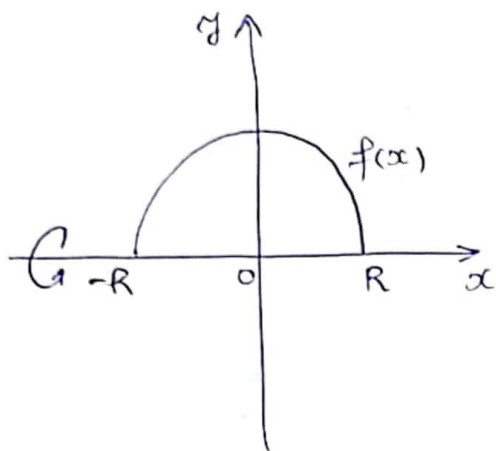
$$f(x) = \frac{R-r}{H}x + r, \quad x \in [0, H]$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^H f^2(x) dx = \pi \int_0^H \left(\frac{R-r}{H}x + r \right)^2 dx = \pi \int_0^H \left(\left(\frac{R-r}{H} \right)^2 x^2 + \frac{2r(R-r)}{H}x + r^2 \right) dx \\ &= \pi \left(\left(\frac{R-r}{H} \right)^2 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{2r(R-r)}{H} x^2 + r^2 x \right) \Big|_0^H = \\ &= \pi \left(\frac{(R-r)^2}{H^2} \cdot \frac{H^3}{3} + \frac{2r(R-r)}{H} \cdot H^2 + r^2 H - 0 \right) = \\ &= \pi H \cdot \frac{R^2 - 2Rr + r^2 + 3rR - 3r^2 + 3r^2}{3} = \\ &= \frac{\pi H}{3} (R^2 + Rr + r^2) \quad \square \end{aligned}$$

4) Площадь поверхности

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Пр пример Найти поверхность сферы радиуса R .



$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

Как полю круга закрутили
вокруг x -оси получили сферу.

$$P = 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2} dx =$$

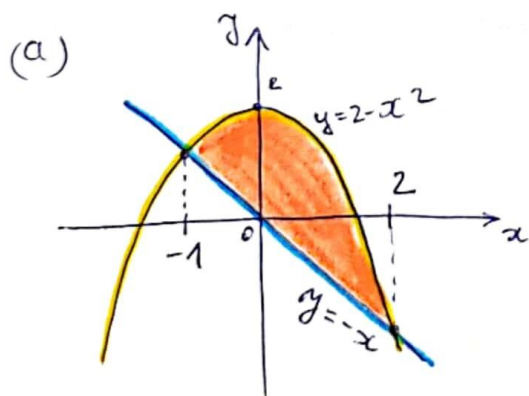
$$= 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = 2\pi R \int_{-R}^R dx = 4\pi R^2 \quad \square$$

19. Найти поверхность фигуры, ограниченной кривыми

(а) $y = 2 - x^2$, $x + y = 0$;

(б) $y = x^4 - 2x^2$, $y = 2x^2$.

решение



Определим пересек кривых:

$$-x = 2 - x^2$$

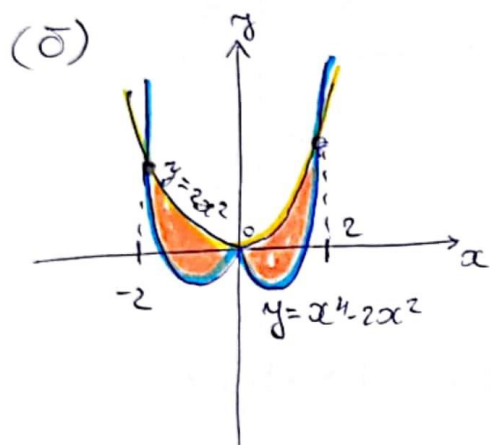
$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$\boxed{x_1 = -1, x_2 = 2}$$

$$P = \int_{-1}^2 (2 - x^2 - (-x)) dx = \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) dx =$$

$$= -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \Big|_{-1}^2 = -\frac{8}{3} + 2 + 4 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{9}{2}$$



Пересек:

$$2x^2 = x^4 - 2x^2$$

$$x^2(x^2 - 4) = 0$$

$$x^2(x - 2)(x + 2) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -2$$

$$P = \int_{-2}^2 (2x^2 - (x^4 - 2x^2)) dx = \int_{-2}^2 (-x^4 + 4x^2) dx =$$

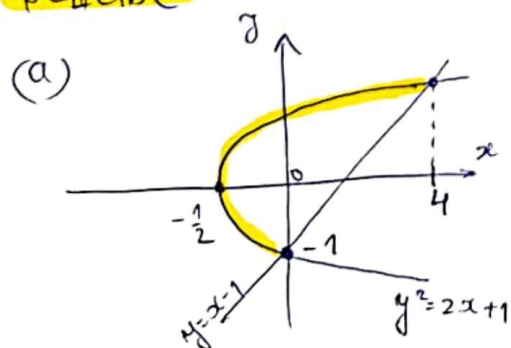
↑
парна

$$= -\frac{2}{5}x^5 + \frac{8}{3}x^3 \Big|_0^2 = -\frac{2}{5} \cdot 32 + \frac{8}{3} \cdot 8 = \frac{128}{15} \quad \square$$

20. (а) Найдите длину дуги кривой на параболе $y^2 = 2x + 1$ отсекающей прямая $x - y = 1$;

(б) Вычислите длину дуги кривой $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, a > 0$.

решение



Пересек:

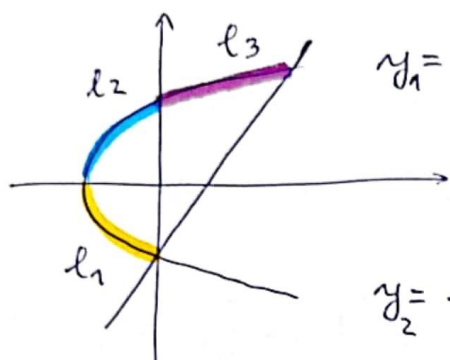
$$2x + 1 = (x - 1)^2$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 4$$

1. Намиш (линеаризација по x)

Криву поделимо на 3 дела:



$y_1 = \sqrt{2x+1}$ — десна половина параболе

$y_2 = -\sqrt{2x+1}$ — лева половина параболе

$$L = L_1 + L_2 + L_3 = 2L_2 + L_3 =$$

$$= 2 \int_{-\frac{1}{2}}^0 \sqrt{1 + (y_1'(x))^2} dx + \int_0^4 \sqrt{1 + (y_1'(x))^2} dx =$$

$$= 2 \int_{-\frac{1}{2}}^0 \sqrt{1 + \frac{1}{2x+1}} dx + \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{1}{2x+1}} dx =$$

$$= 2 \int_{-\frac{1}{2}}^0 \sqrt{\frac{2x+2}{2x+1}} dx + \int_0^4 \sqrt{\frac{2x+2}{2x+1}} dx = \begin{cases} t = \frac{2x+2}{2x+1} \\ x = \frac{2-t^2}{t^2-1} \\ dx = -\frac{2t}{(t^2-1)^2} dt \end{cases} =$$

$$= -4 \int_{+\infty}^{\sqrt{2}} \frac{t^2}{(t^2-1)^2} dt - 2 \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{10}{9}}} \frac{t^2}{(t^2-1)^2} dt = \dots$$

рационална функција

2. Найдит (интеграция по y)

$$y^2 = 2x + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2} = g(y)$$

$$l = \int_{-1}^3 \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy = \int_{-1}^3 \sqrt{1 + y^2} dy =$$

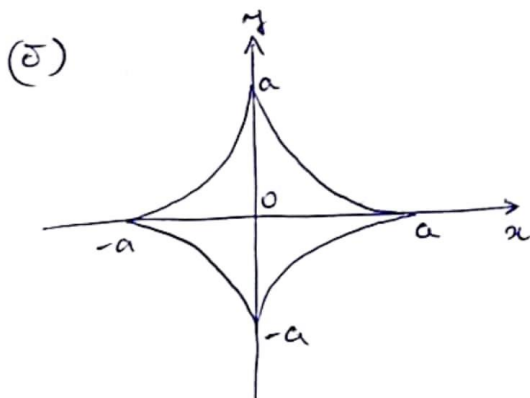
користимо
задачу 26. (а)
из неограничен
интеграла

$$= \frac{1}{8} (y + \sqrt{y^2 + 1})^2 + \frac{1}{2} \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) - \frac{1}{8} \frac{1}{(y + \sqrt{1 + y^2})^2} \Big|_{-1}^3 =$$

$$= \frac{1}{8} (3 + \sqrt{10})^2 + \frac{1}{2} \ln(3 + \sqrt{10}) - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(3 + \sqrt{10})^2} -$$

$$- \frac{1}{8} (\sqrt{2} - 1)^2 - \frac{1}{2} \ln(\sqrt{2} - 1) + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(\sqrt{2} - 1)^2} =$$

$$= \frac{1 + 3\sqrt{5}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{3 + \sqrt{10}}{\sqrt{2} - 1}\right)$$



Запишем кривую γ
параметрической формой:

$$\mu(t) = (x(t), y(t))$$

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 \quad \text{★}$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}} \in [-1, 1], \text{ па је } \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}} = \cos t.$$

$$\text{Ако } \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{3}} = \sin t$$

$$\text{Закле, } x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, \text{ па је}$$

$$\mu(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t), t \in [0, 2\pi]$$

$$L(\mu) = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9 \cos^4 t \sin^2 t + 9 \sin^4 t \cos^2 t} dt$$

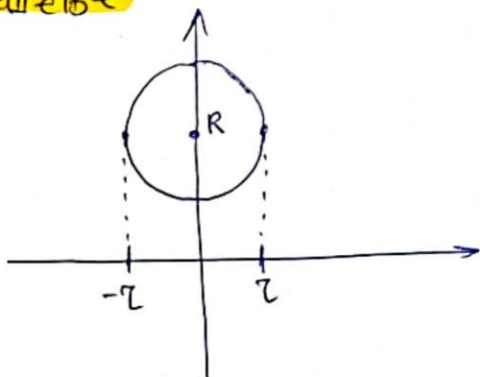
$$= 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} dt =$$

$$= 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt = 6a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = -3a \cos 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -3a \cdot (-1) - 3a \cdot 1 = 6a \quad \square$$

21. Одредити задремину торуца.

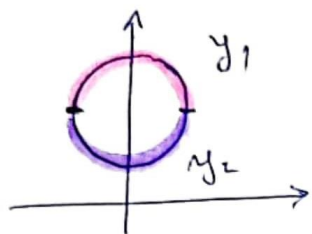
решение



$(y-R)^2 + x^2 = r^2$ - једначина круга са шире

Поруа добијамо кад овај круг заротирамо око x-осе.

Круг је график функције реалне ове реалне
применимо па морамо да га поделимо на 2 дела.



Како заправо ова подела изгледа
на торусу?



$$y_1 = R + \sqrt{r^2 - x^2}, \quad y_2 = R - \sqrt{r^2 - x^2}$$

Како рачунамо запремину?

$$V = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{запуњено} \\ y_1}}{V_1} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{запуњено} \\ y_2}}{V_2} = \text{[Diagram of a cylinder]} - \text{[Diagram of a cylinder]} = \text{[Diagram of a disk]}$$

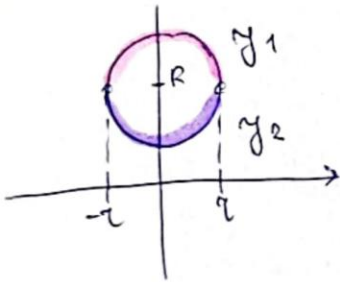
$$V = \pi \int_{-r}^r (R + \sqrt{r^2 - x^2})^2 dx - \pi \int_{-r}^r (R - \sqrt{r^2 - x^2})^2 dx =$$

$$= \pi \int_{-r}^r (R^2 + 2R\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2 - (R^2 - 2R\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2)) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= 4R\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 4rR\pi \int_{-r}^r \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} d\left(\frac{x}{r}\right) = \begin{cases} \frac{x}{r} = \sin t \\ dx = r \cos t dt \\ x = -r \rightarrow t = -\frac{\pi}{2} \\ x = r \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{cases} \\
&= 4r^2R\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t dt = 8r^2R\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \\
&= 8r^2R\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 8r^2R\pi \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
&= 8r^2R\pi \cdot \frac{\pi}{4} = 2r^2R\pi^2 \quad \square
\end{aligned}$$

22. Вычислить площадь поверхности тора.

решение



$$\begin{aligned}
P &= P_1 + P_2 \\
&\quad \begin{matrix} \nearrow & \nearrow \\ \text{замкнуто} & \text{замкнуто} \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{matrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= R + \sqrt{r^2 - x^2} \\
\gamma_2 &= R - \sqrt{r^2 - x^2}
\end{aligned}$$

$$P_1 = 2\pi \int_{-r}^r (R + \sqrt{r^2 - x^2}) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2} dx =$$

$$= 2\pi \int_{-r}^r (R + \sqrt{r^2 - x^2}) \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx =$$

$$= 2\pi \int_{-r}^r \left(\frac{Rr}{\sqrt{r^2 - x^2}} + r \right) dx = 2\pi r x \Big|_{-r}^r + 2\pi \int_{-r}^r \frac{Rr}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx =$$

$$= 4\pi r^2 + 2\pi R \int_{-r}^r \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{r})^2}} = 4r^2\pi + 4\pi R \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{r})^2}} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \frac{x}{r} = \sin t \\ dx = r \cos t dt \\ x=0 \rightarrow t=0 \\ x=r \rightarrow t=\frac{\pi}{2} \end{array} \right] = 4r^2\pi + 4\pi R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} dt =$$

$$= 4r^2\pi + 4\pi R \cdot t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4r^2\pi + 2\pi R = 2r\pi(2r+R). \quad \square$$

23. (Определить заперенную массу које настаје ротацијом
графика функције $f(x) = \sqrt{x \arctg x}$, за $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

решение

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \arctg x dx = \left[\begin{array}{ll} u = \arctg x & dv = x \\ du = \frac{dx}{1+x^2} & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{\pi}{2} x^2 \arctg x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx =$$

$$= \frac{\pi^3}{32} \arctg \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \frac{1}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= \frac{\pi^3}{32} \arctg \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} (x - \arctg x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{\pi^3}{32} \arctg \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \arctg \frac{\pi}{4} \right) \quad \square$$

Умномо ово партије:

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x)$$

$$\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt \right)' = f(b(x)) \cdot b'(x) - f(a(x)) \cdot a'(x)$$

Сада јеш пар задатака из овим интервалом.

24. Докажи да је $F(x) = \int_0^{\sin^2 x} \arcsin \sqrt{t} dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t} dt = \frac{\pi}{4}$,

за $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Решавање

$$\begin{aligned} F'(x) &= \arcsin \sqrt{\sin^2 x} \cdot 2 \sin x \cos x - \arccos \sqrt{\cos^2 x} \cdot 2 \cos x \sin x = \\ &= x \cdot 2 \sin x \cos x - x \cdot 2 \cos x \sin x = 0 \end{aligned}$$

Користимо ово: $\arcsin \sqrt{\sin^2 x} = \arcsin |\sin x| = \arcsin(\sin x) = x$

Слично за $\arccos$.

јер $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ и
је $\sin x > 0$

Како је $F'(x) = 0$ на $[0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow F = \text{const}$ на $[0, \frac{\pi}{2}]$

Да би одредили $F(x)$ довољно је да одредимо $F(0)$ (јер је $F = \text{const}$).

$$F(0) = \underbrace{\int_0^0 \arcsin \sqrt{t} dt}_0 + \int_0^1 \arccos \sqrt{t} dt = \left[\begin{array}{ll} u = \arccos \sqrt{t} & dw = dt \\ du = \frac{-1}{\sqrt{1-t}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} dt & v = t \end{array} \right] =$$

$$= \underbrace{t \arccos \sqrt{t}}_0 \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1-t}} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{\frac{t}{1-t}} dt =$$

$$= \left[\begin{array}{l} p^2 = \frac{t}{1-t} \\ t = \frac{p^2}{1+p^2} \\ dt = \frac{2p dp}{(1+p^2)^2} \end{array} \left| \begin{array}{l} t=0 \rightarrow p=0 \\ t=1 \rightarrow p=+\infty \end{array} \right. \right] = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} p \cdot \frac{2p}{(1+p^2)^2} dp =$$

3 арг. 18 вып. 27
 3 арг. * вып. 14

$$= \int_0^{+\infty} \frac{p^2 + 1 - 1}{(1+p^2)^2} dp = \int_0^{+\infty} \frac{dp}{1+p^2} - \int_0^{+\infty} \frac{dp}{(1+p^2)^2} =$$

$$= \arctg p \Big|_0^{+\infty} - \left(\frac{p}{2(p^2+1)} + \frac{1}{2} \arctg p \right) \Big|_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0 - \left(0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - 0 - \frac{1}{2} \cdot 0 \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Закле, $F(x) = \frac{\pi}{4}$ на $[0, \frac{\pi}{2}]$ ■

25. Определит $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}$

решение

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt} \stackrel{\text{Л.Н.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot \left(\int_0^x e^{t^2} dt\right) \cdot e^{x^2}}{e^{2x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \int_0^x e^{t^2} dt}{e^{x^2}} \stackrel{\text{Л.Н.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 e^{x^2}}{e^{x^2} \cdot 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

26. Определит $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_1^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt$

решение Дать ответ не обязательно:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_1^x \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_1^x \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt}{\sqrt{x}} \stackrel{\text{Л.Н.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 2$$

Корреспондент

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

27. Определит x за koje функција $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{t} \ln\left(\frac{t-1}{9}\right) dt$ достигне минимум на $(1, +\infty)$.

решение $\frac{1}{t} \ln\left(\frac{t-1}{9}\right)$ је неуп., па је F густојерекотна на $[x, x^2]$, тј. постоји $x \in (1, +\infty)$, F је глф. на $(1, +\infty)$

$$F'(x) = \left(\int_x^{x^2} \frac{1}{t} \ln\left(\frac{t-1}{9}\right) dt \right)' = \frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{x^2-1}{9}\right) \cdot 2x - \frac{1}{x} \ln\left(\frac{x-1}{9}\right) \cdot 1 =$$

$$= \frac{1}{x} \ln\left(\frac{x^2-1}{9}\right)^2 - \frac{1}{x} \ln\left(\frac{x-1}{9}\right) = \frac{1}{x} \cdot \ln \frac{(x-1)^2(x+1)^2}{\frac{81}{\frac{x-1}{9}}} =$$

$$= \frac{1}{x} \ln \frac{(x-1)(x+1)^2}{9} \quad \leftarrow \text{предела не определяем}$$

тут и знак не фикс

убав
возрастает

$$F'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln \frac{(x-1)(x+1)^2}{9} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+1)^2}{9} > 1$$

$$(x-1)(x^2+2x+1) > 9$$

$$x^3+x^2-x-1 > 9$$

$$x^3+x^2-x-10 > 0$$

$$x^3+3x^2+5x-2x^2-6x-10 > 0$$

$$x(x^2+3x+5) - 2(x^2+3x+5) > 0$$

$$(x-2)(x^2+3x+5) > 0$$

Нена реальных
мы не жд
свужа позитивно

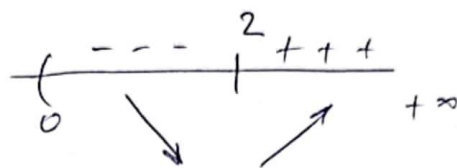
$$x-2 > 0$$

$$\boxed{x > 2}$$

$$\text{Закле, } F'(x) > 0 \text{ за } x > 2$$

$$F'(x) < 0 \text{ за } x < 2$$

$$F'(x) = 0 \text{ за } x = 2$$



$\Rightarrow F$ достиже максимум у $x=2$. ■

Несвојствени интеграл

Дефиниција Нека је f дефинисана на $[a, b)$ и интегрална на сваком $[a, \beta] \subset [a, b)$ (где је $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, сингуларна функција f). Несвојствени интеграл функције f је

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\beta \rightarrow b} \int_a^{\beta} f(x) dx$$

Ако овај лимес постоји кажемо да интеграл конвергује а иначе дивергује.

Елимина, ако је f деф-на $(a, b]$, где је a сингуларна, онда је

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow a} \int_{\alpha}^b f(x) dx.$$

Несвојствени интеграл $\int_a^b f(x) dx$ са сингуларитетом f конвертира, ако и само ако $\int_c^b f(x) dx$ конв. за све $c \in (a, b)$

Ако су a и b сингуларитети, онда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad c \in (a, b)$$

Дефиниција Несвојствени интеграл $\int_a^b f(x) dx$ апсолутно конвертира ако конвертира $\int_a^b |f(x)| dx$.

Користимо:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \quad \text{конвертира за } \alpha < 1$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad \text{конвертира за } \alpha > 1$$

Теорема (I поредбени критеријум)

Нека су $f, g: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ непрекинуте и $g \geq 0$, $0 \leq f(x) \leq g(x)$, за свако $x \in [a, b)$.

1. Ако $\int_a^b g(x) dx$ конт., тога $\int_a^b f(x) dx$ конт.;

2. Ако $\int_a^b f(x) dx$ див., тога $\int_a^b g(x) dx$ див.

Напомена: Ако $\int_a^b f(x) dx$ конт., не знамо ништа о конвергенцији $\int_a^b g(x) dx$. И слично, ако $\int_a^b g(x) dx$ див., не знамо ништа о $\int_a^b f(x) dx$.