17. (а) $\displaystyle\int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}\,dx$; (б) $\displaystyle\int \frac{x^5}{x^4+1}\,dx$

решење

(а) $$\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} \quad \Big/ \cdot (x^2+1)(x-1)^2$$

$$-2x+4 = (Ax+B)(x-1)^2 + C(x^2+1)(x-1) + D(x^2+1)$$

$$-2x+4 = Ax^3 + (-2A+B)x^2 + (A-2B)x + B + Cx^3 - Cx^2 + Cx - C + Dx^2 + D$$

$$-2x+4 = (A+C)x^3 + (-2A+B-C+D)x^2 + (A-2B+C)x + B-C+D$$

уз x^3: $\quad 0 = A+C$

уз x^2: $\quad 0 = -2A+B-C+D$

уз x: $\quad -2 = A-2B+C$

уз 1: $\quad 4 = B+C-D$

решимо систем

(... рачун ...)

$A = 2,\ B = 1,\ C = -2,\ D = 1$

$$\int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}\,dx = \int \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx - 2\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} =$$

$$= \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{dx}{x^2+1} - 2\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} =$$

$$= \ln|x^2+1| + \operatorname{arctg} x - 2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

смена
$t = x^2+1$
$dt = 2x\,dx$

смена
$t = x-1$
$dt = dx$

(б) x^5 је већег степена од x^4+1, па делимо:

$$\begin{array}{l} x^5 : (x^4+1) = x \\ \underline{-x^5 \pm x} \\ \quad\quad -x \end{array}$$

x — количник

$-x$ — остатак

$$\frac{x^5}{x^4+1} = \frac{(x^4+1)\cdot x - x}{x^4+1} = x - \frac{x}{x^4+1}$$

Сада растављамо x^4+1 на чиниоце:

$$x^4+1 = x^4+2x^2+1-2x^2 = (x^2+1)^2-(x\sqrt{2})^2 =$$

$$= (x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)$$

ови квадратни полиноми се не могу даље раставити (немају реалних нула)

$$\frac{x}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1} \quad \Big/ \cdot (x^4+1)$$

$$x = (Ax+B)(x^2-x\sqrt{2}+1) + (Cx+D)(x^2+x\sqrt{2}+1)$$

$$x = Ax^3 + (-A\sqrt{2}+B)x^2 + (A-B\sqrt{2})x + B +$$
$$+ Cx^3 + (C\sqrt{2}+D)x^2 + (C+D\sqrt{2})x + D$$

$$x = (A+C)x^3 + (-A\sqrt{2}+B+C\sqrt{2}+D)x^2 + (A-B\sqrt{2}+C+D\sqrt{2})x + B + D$$

уз x^3: $0 = A + C$

уз x^2: $0 = -A\sqrt{2} + B + C\sqrt{2} + D$

уз x: $1 = A - B\sqrt{2} + C + D\sqrt{2}$

уз 1: $0 = B + D$

(... рачун ...)

$A = 0, \quad B = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad C = 0, \quad D = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

Коначно,

$$\int \frac{x^5}{x^4+1}\,dx = \int\left(x - \frac{x}{x^4+1}\right)dx = \int x\,dx - \int \frac{x}{x^4+1}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \int \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}}{x^2+x\sqrt{2}+1}\,dx - \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\frac{1}{2}\left(\left(x\sqrt{2}+1\right)^2+1\right)} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\frac{1}{2}\left(\left(x\sqrt{2}-1\right)^2+1\right)} =$$

смена
$t = x\sqrt{2}+1$

смена
$t = x\sqrt{2}-1$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1) + c$$

У теореми на стр. 20 се добијају изрази $\frac{a}{(x-\alpha)^k}$ и $\frac{ax+b}{(px^2+qx+r)^m}$ које треба да знамо како да интегралимо. $\int \frac{a}{(x-\alpha)^k}dx$ се решава сменом $t=x-\alpha$.

$\int \frac{ax+b}{(px^2+qx+r)^m}dx$ решавамо на следећи начин:

наместимо бројилац на облик: $2px+q+c$, па поделимо на два дела: $\int \frac{2px+q}{(px^2+qx+r)^m}dx$ и $\int \frac{c\,dx}{(px^2+qx+r)^m}$

Први интеграл се решава сменом $t=px^2+qx+r$.

Други интеграл се сменом $t=\sqrt{p}x+\frac{q}{2\sqrt{p}}$ своди на интеграл $\int \frac{dt}{(t^2+s^2)^m}$.

Погледајмо на примеру:

$$\int \frac{x+5}{(x^2+x+1)^5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1+9}{(x^2+x+1)^5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^5}dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int \frac{9}{(x^2+x+1)^5} = \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^5}dx}_{I_1} + \frac{9}{2}\underbrace{\int \frac{dx}{\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^5}}_{I_2}$$

I_1 решавамо сменом $t=x^2+x+1$

I_2 се сменом $t=x+\frac{1}{2}$ своди на $\int \frac{dt}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^5}$

Остаје још да видимо како да израчунамо

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}, \quad n\in\mathbb{N},\ a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

$\boxed{18.}$ $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$

решење

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \left[\begin{array}{l} x = tg\, t \\ dx = \frac{1}{\cos^2 t}\, dt \end{array}\right] = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 t}\, dt}{(tg^2 t+1)^n} =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{\left(\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}+1\right)^n}\, dt = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{\left(\frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\cos^2 t}\right)^n}\, dt =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos^{2n} t}}\, dt = \underbrace{\int \cos^{2n-2} t\, dt}$$

овај интеграл смо рачунали у задатку 13. (б) на стр. 16

За $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ имамо:

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^{2n}} \int \frac{dx}{\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2+1\right)^n} = \left[\begin{array}{l} t = \frac{x}{a} \\ dx = a\,dt \end{array}\right] = \frac{1}{a^{2n-1}} \underbrace{\int \frac{dt}{(t^2+1)^n}}_{\text{зад. 18}},$$

па сада знамо да одредимо интеграл сваке рационалне функције.

Интеграли облика $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$

R је рационална функција

1 смена: $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$

ова смена решава сваки интеграл, али не увек на најбржи начин.

формуле за dx, $\sin x$ и $\cos x$ можемо памтити напамет

$$x = 2\operatorname{arctg} t$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} \overset{:\cos^2\frac{x}{2}}{=} \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1} = \frac{2t}{t^2+1}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} \overset{:\cos^2\frac{x}{2}}{=} \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1} = \frac{1-t^2}{t^2+1}$$

2 смена $t = \operatorname{tg} x$

ова смена пролази ако је R парна функција по обе променљиве

$$x = \operatorname{arctg} t$$

$$dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$1+\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\sin^2 x = 1-\cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$\boxed{3}$ смена: $t = \sin x$

смена пролази ако је R непарна по другој променљивој

$\boxed{4}$ смена: $t = \cos x$

смена пролази ако је R непарна по првој променљивој.

Закључак: увек прво пробамо да уведемо смене $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ и $\boxed{4}$ па ако ништа не прође радимо $\boxed{1}$.

Свим овим сменама тригонометријски интеграл сводимо на интеграл рационалне функције.

19. (а) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$; (б) $\int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^3 x}\, dx$

решење

(а) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} = \begin{bmatrix} t = \operatorname{tg} x \\ dx = \frac{1}{1+t^2}\, dt \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \end{bmatrix} = \int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2} + 2\cdot\frac{1}{1+t^2}}\, dt =$

парно по обе променљиве

$= \int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + c = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + c$

мало „другачији" начин:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} \overset{:\cos^2 x}{\underset{:\cos^2 x}{=}} \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x + 2}\, dx = \begin{bmatrix} t = \operatorname{tg} x \\ dt = \frac{1}{\cos^2 x}\, dx \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + c$$

(б) $$\int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^3 x}\,dx = \int \frac{\cos^2 x\,(1+\cos^2 x)\cos x}{\sin^2 x + \sin^3 x}\,dx =$$

непарно по $\cos x$,
смена $t = \sin x$

$$= \int \frac{(1-\sin^2 x)(2-\sin^2 x)\cos x\,dx}{\sin^2 x + \sin^3 x} = \left[\begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x\,dx \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{(1-t^2)(2-t^2)}{t^2+t^3}\,dt = \int \frac{(1-t)(1+t)(2-t^2)}{t^2(1+t)}\,dt$$

$$= \int \frac{2-2t-t^2+t^3}{t^2}\,dt = \int \left(\frac{2}{t^2} - \frac{2}{t} - 1 + t\right)dt =$$

$$= -\frac{2}{t} - 2\ln|t| - t + \frac{t^2}{2} + c = -\frac{2}{\sin x} - 2\ln|\sin x| - \sin x + \frac{\sin^2 x}{2} + c.$$

Шта би било да смо уводили смену $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$?

$$\int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^3 x}\,dx = \left[\begin{array}{l} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ dx = \frac{2\,dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} \end{array}\right] = \int \frac{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^3 + \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^5}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

компликован рачун за који се радујемо да смо избегли

$\boxed{20.}$ (а) $\int \frac{dx}{\sin x}$; (б) $\int \frac{1}{4\sin x + 3\cos x + 5}\,dx$

решење

(а) $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx = \left[\begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x\,dx \end{array}\right] =$

$\boxed{\text{непарно по } \sin x, \text{ смена } t = \cos x}$

$= \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + c$

(б) $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \left[\begin{array}{l} t = tg\frac{x}{2} \\ dx = \frac{2\,dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}\right] = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{4\cdot 2t}{1+t^2} + \frac{3(1-t^2)}{1+t^2} + 5}\,dt =$

$\boxed{\text{може само смена } t = tg\frac{x}{2}}$

$= \int \frac{2}{8t + 3(1-t^2) + 5(1+t^2)}\,dt = \int \frac{dt}{t^2+4t+4} = \int \frac{dt}{(t+2)^2} =$

$\boxed{\text{смена } p = t+2}$

$= -\frac{1}{t+2} + c = -\frac{1}{tg\frac{x}{2} + 2} + c$ ■

$\boxed{21.}$ (а) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$; (б) $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,dx$

решење

(а) $\int \frac{dx}{1+\cos x} = \left[\begin{array}{l} t = tg\frac{x}{2} \\ dx = \frac{2\,dt}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}\right] = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}}\,dt = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{1+t^2+1-t^2}{1+t^2}}\,dt$

$= \int dt = t + c = tg\frac{x}{2} + c$

(б) $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int \frac{2\sin x\cos x}{1+\cos^2 x}\,dx = \begin{bmatrix} t=\cos x \\ dt=-\sin x\,dx \end{bmatrix} =$

$= -2\int \frac{t}{1+t^2}\,dt = \begin{bmatrix} p=1+t^2 \\ dp=2t\,dt \end{bmatrix} = -\int \frac{dp}{p} =$

$= -\ln|p| + c = -\ln(1+t^2) + c = -\ln(1+\cos^2 x) + c$ ■

Интеграли облика $\int R(\sqrt{ax^2+bx+c},\, x)\,dx$

рационална ф-ја

1. корак:

$\underbrace{ax^2+bx}_{} + c = \left(x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$

правимо квадрат бинома од прва два сабирка

та у интеграл уводимо смену $t = x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}$ чиме се интеграл своди на неки од:

(а) $\int R_1(\sqrt{x^2+1},\, x)\,dx$ — смена $x = \operatorname{tg} t$

(б) $\int R_1(\sqrt{x^2-1},\, x)\,dx$ — смена $x = \frac{1}{\cos t}$

(в) $\int R_1(\sqrt{1-x^2},\, x)\,dx$ — смена $x = \sin t$

ове смене су 2. корак

нека нова рационална функција

Биће лакше на конкретним примерима.

$\boxed{23.}$ $\int \sqrt{x^2+x+1}\, dx$

решење

$$\int \sqrt{x^2+x+1}\, dx = \int \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\, dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\int \sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\, dx$$

$$= \begin{bmatrix} t = \dfrac{2x+1}{\sqrt{3}} \\ dx = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, dt \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2}\int \sqrt{t^2+1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\, dt =$$

$$= \frac{3}{4}\int \sqrt{t^2+1}\, dt = \begin{bmatrix} t = tg\, p \\ dt = \dfrac{1}{\cos^2 p}\, dp \end{bmatrix} = \frac{3}{4}\int \sqrt{tg^2 p+1}\cdot\frac{1}{\cos^2 p}\, dp =$$

$\boxed{\text{случај (а)}}$

$$= \frac{3}{4}\int \sqrt{\frac{\sin^2 p+\cos^2 p}{\cos^2 p}}\cdot\frac{1}{\cos^2 p}\, dp = \frac{3}{4}\int \frac{1}{\cos^3 p}\, dp =$$

$$= \frac{3}{4}\int \frac{\cos p}{(\cos^2 p)^2}\, dp = \frac{3}{4}\int \frac{\cos p}{(1-\sin^2 p)^2}\, dp = \begin{bmatrix} y = \sin p \\ dy = \cos p\, dp \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{3}{4}\int \frac{dy}{(1-y^2)^2} = \frac{3}{4}\int \frac{dy}{(1-y)^2(1+y)^2} = \star$$

$$\frac{1}{(1-y)^2(1+y)^2} = \frac{A}{1-y}+\frac{B}{(1-y)^2}+\frac{C}{1+y}+\frac{D}{(1+y)^2} \Big/ \cdot(1-y)^2(1+y)^2$$

$$1 = A(-y^3 - y^2 + y + 1) + B(y^2 + 2y + 1) +$$

$$+ C(y^3 - y^2 - y + 1) + D(y^2 - 2y + 1)$$

$$1 = y^3(-A + C) + y^2(-A + B - C + D) + y(A + 2B - C - 2D) +$$

$$+ A + B + C + D$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{уз } y^3: & 0 = -A + C \\ \text{уз } y^2: & 0 = -A + B - C + D \\ \text{уз } y: & 0 = A + 2B - C - 2D \\ \text{уз } 1: & 1 = A + B + C + D \end{array}\right\} \quad (\ldots \text{рачун} \ldots) \qquad \begin{array}{l} A = \frac{1}{4} \\ B = \frac{1}{4} \\ C = \frac{1}{4} \\ D = \frac{1}{4} \end{array}$$

Враћамо се у (A):

$$(A) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{(1-y)^2} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{(1+y)^2} \right) dy =$$

$$= \frac{3}{16} \left(\ln|1-y| + \frac{1}{1-y} + \ln|1+y| - \frac{1}{1+y} \right) + c =$$

$$= \frac{3}{16} \ln|1-y^2| + \frac{3}{8} \frac{y}{1-y^2} + c =$$

$$= \frac{3}{16} \ln\left(\cos^2\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right)\right) + \frac{3}{8} \cdot \frac{\sin\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right)}{\cos^2\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right)} + c$$

$\boxed{24.}$ $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$

случај (б)

решење

$$\int \frac{x+2}{2\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2-1}}\,dx = \left[\begin{array}{l} t=\frac{x}{2} \\ dx = 2dt \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int \frac{2t+2}{\sqrt{t^2-1}}\cdot 2\,dt =$$

$$= \left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{\cos p} \\ dt = \frac{\sin p}{\cos^2 p}\,dp \end{array}\right] = \int \frac{\frac{2}{\cos p}+2}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 p}-1}}\cdot\frac{\sin p}{\cos^2 p}\,dp =$$

$$= \int \frac{\frac{2}{\cos p}+2}{\frac{\sin p}{\cos p}}\cdot\frac{\sin p}{\cos^2 p}\,dp = \int \frac{2+2\cos p}{\cos^2 p}\,dp =$$

$$= \left[\begin{array}{l} y=\operatorname{tg}\frac{p}{2} \\ dp = \frac{2\,dy}{1+y^2} \\ \cos p = \frac{1-y^2}{1+y^2} \end{array}\right] = \int \frac{2+2\cdot\frac{1-y^2}{1+y^2}}{\frac{(1-y^2)^2}{(1+y^2)^2}}\cdot\frac{2}{1+y^2}\,dy =$$

Као у зад 23.

$$= 8\int \frac{1}{(1-y^2)^2}\,dy = 2\ln|1-y^2| + \frac{4y}{1-y^2} + C =$$

$$= 2\ln\left|1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\arccos\frac{2}{x}}{2}\right)\right| + \frac{4\operatorname{tg}\left(\frac{\arccos\frac{2}{x}}{2}\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\arccos\frac{2}{x}}{2}\right)} + C$$