31. Развити функцију $f(x) = x$, $0 \le x \le \pi$ у Фуријеов ред на $(-\pi, \pi)$

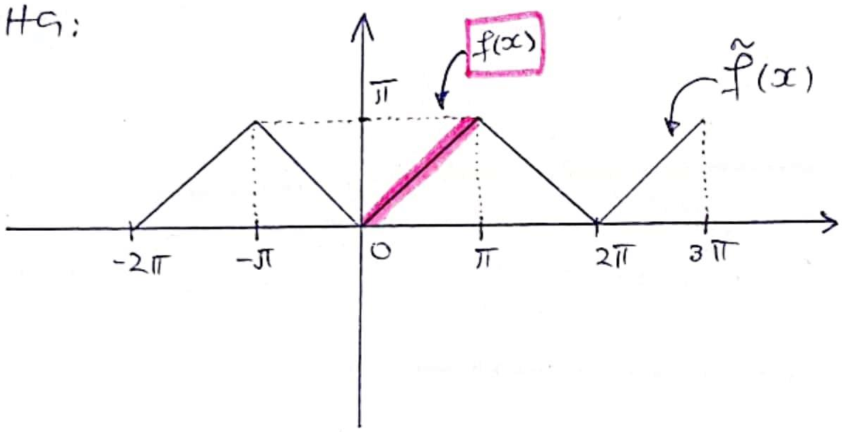
(а) по косинусима;

(б) по синусима;

(в) израчунати $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

решење

(а) Желимо да се у реду појављују само $\cos(nx)$, тј. да је $b_n = 0$, па f проширујемо да буде парна:



$$S\tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\tilde{f}(x)}_{\text{парна}} \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \frac{1}{\pi} x^2 \Big|_0^{\pi} = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\tilde{f}(x) \cos(nx)}_{\text{парна}} \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) \, dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = x & dv = \cos(nx) \\ du = dx & v = \frac{1}{n}\sin(nx) \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{2}{\pi}\, x \cdot \frac{1}{n}\sin(nx)\Big|_0^{\pi}}_{0} -$$

$$- \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx = \frac{2}{n^2\pi}\cos(nx)\Big|_0^{\pi} =$$

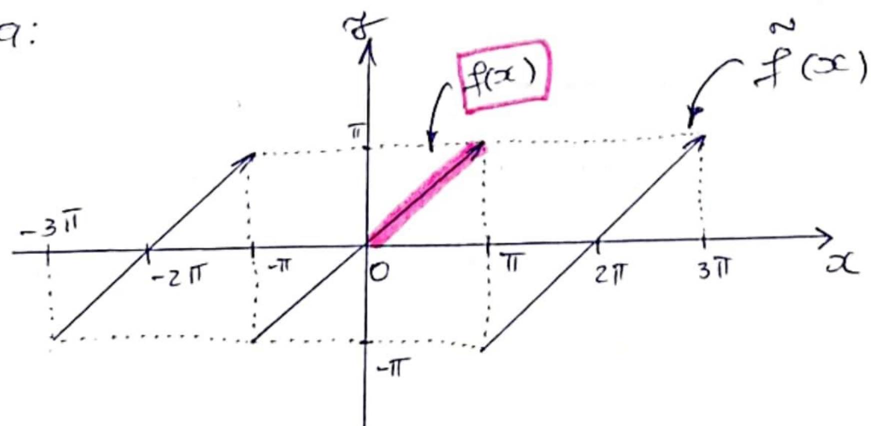
$$= \frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} 0, & n \text{ парно} \\ -\frac{4}{n^2\pi}, & n \text{ непарно} \end{cases}$$

$b_n = 0$ (тако смо намерно проширили f)

Дакле,

$$\boxed{S_{\tilde{f}}(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-4}{(2n+1)^2\pi}\cos\left((2n+1)x\right)}$$

(б) Желимо да се у реду појављује само $\sin(nx)$, тј. да је $a_n = 0$, па f проширујемо да буде непарна:



$$S_{\tilde{f}}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\tilde{f}(x)}_{\boxed{\text{непарна}}}\, dx = 0$$

$a_n = 0$ (тако смо наместили $\tilde{f}$)

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\tilde{f}(x)\sin(nx)}_{\boxed{\text{парна}}}\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\, dx =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u = x & dv = \sin(nx)\,dx \\ du = dx & v = -\frac{1}{n}\cos(nx) \end{array}\right] = -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x}{n}\cos(nx)\Big|_0^{\pi} +$$

$$+ \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos(nx)\, dx = -\frac{2}{n}(-1)^n + \underbrace{\frac{2}{n^2\pi}\sin(nx)\Big|_0^{\pi}}_{0} =$$

$$= \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

$$\Rightarrow \boxed{S_{\tilde{f}}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx).}$$

(в) Користимо развоје из (а) и (б). Да не би било забуне уведимо ознаке:

$f_1 = \tilde{f}$ из (а), $S_1(x) = S_{\tilde{f}}(x)$ из (а) $= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-4}{(2n+1)^2\pi}\cos((2n+1)x)$

$f_2 = \tilde{f}$ из (б), $S_2(x) = S_{\tilde{f}}(x)$ из (б) $= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx).$

$$S_1(0) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-4}{(2n+1)^2\pi} \underbrace{\cos 0}_{1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}} = \frac{S_1(0) - \frac{\pi}{2}}{-4} \cdot \pi = \frac{\frac{f_1(0^+) + f_1(0^-)}{2} - \frac{\pi}{2}}{-4} \cdot \pi = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \underbrace{\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}_{} + \frac{\pi^2}{8}$$

парни

непарни

пребацимо на леву страну

$$\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} \Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{\pi^2}{6}$$

Парсевалова једнакост за f_1 и S_1 (из (а)):

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_1(x)|^2\, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) =$$

$$= \frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16}{(2n+1)^4\pi^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}} = \frac{\pi^2}{16}\left(\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_1(x)|^2 dx}_{\frac{2\pi^3}{3}} - \frac{\pi^2}{2} \right) =$$

$$= \frac{\pi^2}{16}\left(\frac{2\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{\pi^4}{96}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{1}{16} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} + \frac{\pi^4}{96}$$

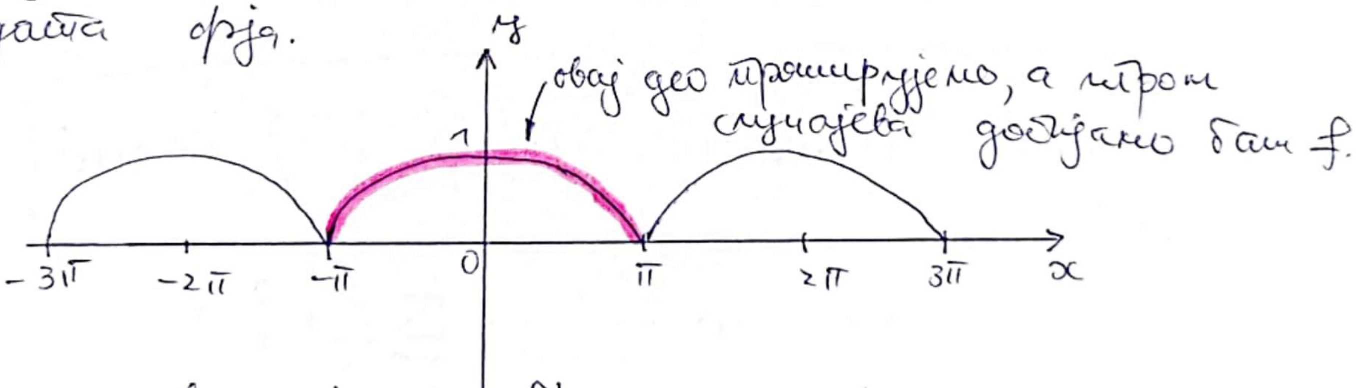
$$\Rightarrow \frac{15}{16} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96} \Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}} = \frac{\pi^4}{90} \quad \blacksquare$$

32. Развити $f(x) = |\cos \frac{x}{2}|$ у Фуријеов ред на $(-\pi, \pi)$ и израчунати $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}$

решење

Кад је фја дефинисана на већем интервалу од $(-\pi, \pi)$, узмемо тај део $(-\pi, \pi)$ и проширимо да проширење буде 2π-периодично.

Овде се баш испостави да је проширење баш дата фја.



Дакле, овде је $f = \tilde{f}$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \cos \frac{x}{2}\,dx = \frac{4}{\pi} \sin \frac{x}{2} \Big|_{0}^{\pi} = \frac{4}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underset{\boxed{\text{парна}}}{\underset{\uparrow}{f(x)\cos(nx)}}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos(nx)\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\cos\left(\frac{x}{2}-nx\right)+\cos\left(\frac{x}{2}+nx\right)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}-n}\sin\left(\frac{x}{2}-nx\right)+\frac{1}{\frac{1}{2}+n}\sin\left(\frac{x}{2}+nx\right)\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{1-2n}(-1)^n+\frac{2}{1+2n}(-1)^n\right) = \frac{4\cdot(-1)^{n-1}}{\pi(4n^2-1)}$$

$b_n = 0$ (јер је f парна).

$$\Rightarrow S_f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right) =$$

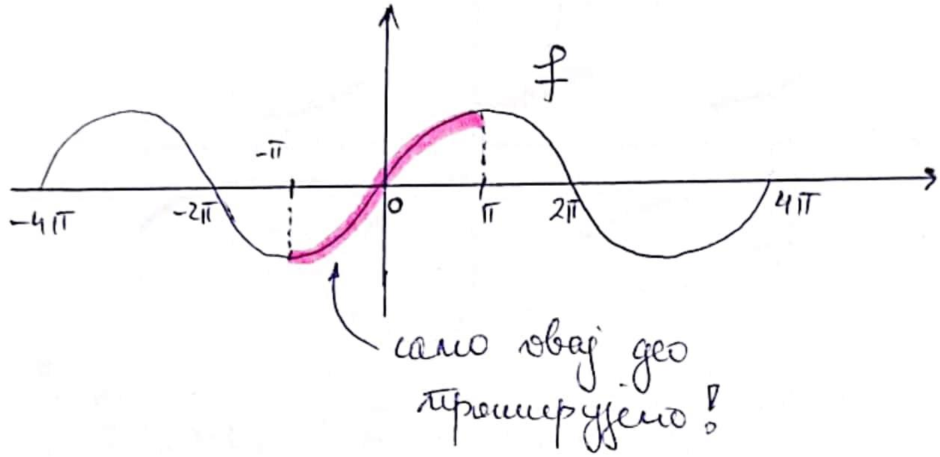
$$= \frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}\cos(nx)$$

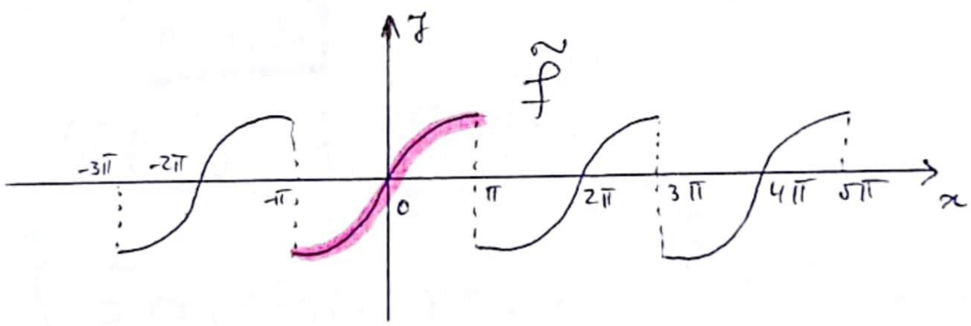
$$S_f(0) = \frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}\underbrace{\cos 0}_{=1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}} = \frac{S_f(0)-\frac{2}{\pi}}{\frac{4}{\pi}} = \frac{\frac{f(0^+)+f(0^-)}{2}-\frac{2}{\pi}}{\frac{4}{\pi}} = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2} \quad \blacksquare$$

Напомена: Да смо имали фју којој је период већи од 2π, узели бисмо део на интервалу од $(-\pi,\pi)$ и то проширили, а остатак фје ван $(-\pi,\pi)$ не бисмо користили.

Нпр. $f(x) = \sin \frac{x}{2}$ има период 4π





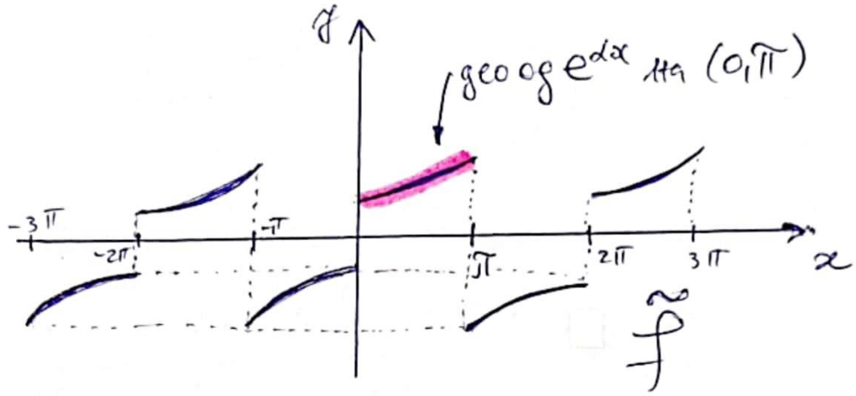
$\boxed{33.}$ (ЈАН1) Нека је $\alpha > 0$ и $f(x) = e^{\alpha x}$.

(а) Развити фју f у синусни Фуријеов ред на $(0,\pi)$

(б) Израчунати $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2+4}$.

решење

(а) функцију са $(0,\pi)$ проширимо на $(-\pi,\pi)$ да буде непарна (да бисмо добили синусни ред) и онда проширимо на $\mathbb{R}$ да буде 2π-периодична.



$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\,dx = 0$$

непарна

$a_n = 0$ (јер је f непарна)

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{\alpha x}\sin(nx)\,dx =$$

парна

користимо зад. 11. (а) стр. 12

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{n}{\alpha^2+n^2}e^{\alpha x}\cos(nx) + \frac{\alpha}{\alpha^2+n^2}e^{\alpha x}\sin(nx)\right)\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \frac{-2n\left(e^{\alpha\pi}(-1)^n - 1\right)}{\pi(\alpha^2+n^2)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} S\tilde{f}(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\left(1-e^{\alpha\pi}(-1)^n\right)}{\pi(\alpha^2+n^2)} \sin(nx) \end{aligned}}$$

(б) $S\tilde{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\tilde{f}\left(\frac{\pi}{2}^+\right) + \tilde{f}\left(\frac{\pi}{2}^-\right)}{2} = \tilde{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\alpha\pi}{2}}$ (1)

Такође,

$$S\tilde{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\left(1-e^{\alpha\pi}(-1)^n\right)}{\pi(\alpha^2+n^2)} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \star$$

$$\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}}, & n \text{ непарно} \\ 0, & n \text{ парно} \end{cases}$$

$$\star = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)\left(1-e^{\alpha\pi}(-1)^{2n+1}\right)}{\pi\left(\alpha^2+(2n+1)^2\right)} \cdot (-1)^n \quad (2)$$

Изједначимо (1) и (2).

$$e^{\frac{\alpha\pi}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)\left(1-e^{\alpha\pi}\overbrace{(-1)^{2n+1}}^{-1}\right)}{\pi\left(\alpha^2+(2n+1)^2\right)} (-1)^n$$

Убацимо $\alpha = 2$:

$$e^{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)\left(1+e^{2\pi}\right)}{\pi\left(4+(2n+1)^2\right)} \cdot (-1)^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2+4} = \frac{\pi e^{\pi}}{1+e^{2\pi}}$$

Нама се тражи $\sum_{n=1}^{\infty}$ (од $\underline{\underline{1}}$)

за $n=0$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2+4}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2+4} - (-1)^0 \cdot \frac{2\cdot 0+1}{(2\cdot 0+1)^2+4} =$$

$$= \frac{\pi e^{\pi}}{1+e^{2\pi}} - \frac{1}{5}$$

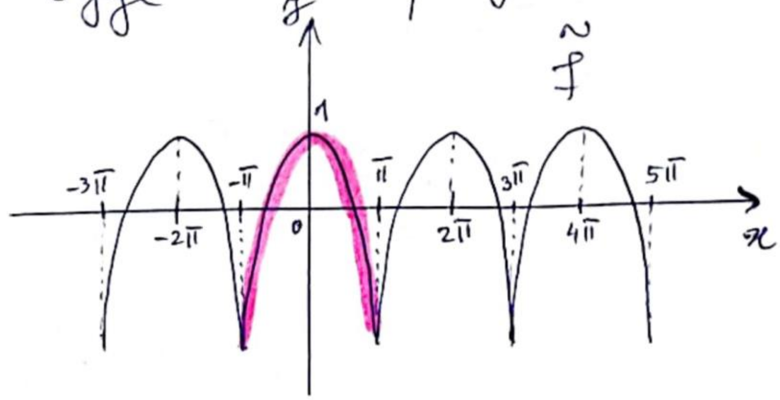
34. (ЈУН1) Нека је $f(x)=1-x^2$.

(а) Развити f у Фуријеов ред на $(-\pi,\pi)$;

(б) Израчунати $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

решење

(а) Проширујемо део фје f са $(-\pi,\pi)$ на $\mathbb{R}$ т.д. буде 2π-периодична



$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underset{\boxed{\text{парна}}}{\tilde{f}(x)}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}(1-x^2)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\pi-\frac{\pi^3}{3}\right) = 2-\frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underset{\boxed{\text{парна}}}{\tilde{f}(x)}\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}(1-x^2)\cos(nx)\,dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u=1-x^2 & dv=\cos(nx)\,dx \\ du=-2x\,dx & v=\frac{1}{n}\sin(nx) \end{bmatrix} =$$

$$= \underbrace{\frac{2}{\pi}(1-x^2)\cdot\frac{1}{n}\sin(nx)\Bigg|_0^{\pi}}_{0} + \frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u=x & dv=\sin(nx)\,dx \\ du=dx & v=-\frac{1}{n}\cos(nx) \end{bmatrix} = -\frac{4}{n^2\pi}x\cos(nx)\Bigg|_0^{\pi} +$$

$$+ \frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx = \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2} + \underbrace{\left(\frac{4}{n^3\pi}\sin(nx)\right)\Bigg|_0^{\pi}}_{0} =$$

$$= \frac{4\cdot(-1)^{n+1}}{n^2}$$

$b_n = 0$ (јер је $\tilde{f}$ парна)

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} S_{\tilde{f}}(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right) = \\ &= 1 - \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (-1)^{n+1}}{n^2} \cos(nx) \end{aligned}}$$

(б) $S_{\tilde{f}}(0) = \dfrac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = f(0) = 1$

јер је f непр. у 0

Такође,

$$S_{\tilde{f}}(0) = 1 - \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (-1)^{n+1}}{n^2} \underbrace{\cos 0}_{1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}} = \frac{S_{\tilde{f}}(0) - 1 + \frac{\pi^2}{3}}{-4} = \frac{1 - 1 + \frac{\pi^2}{3}}{-4} = -\frac{\pi^2}{12} \quad \blacksquare$$

До сада смо радили са 2π-периодичним функцијама, али можемо радити и са $2l$-периодичним ф-јама користећи следеће формуле:

Нека је $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $2l$-периодична и $\int\limits_{-l}^{l}|f(x)|^2\,dx<\infty$.

Фуријеов ред ове ф-је је

$$\boxed{S_f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)},$$

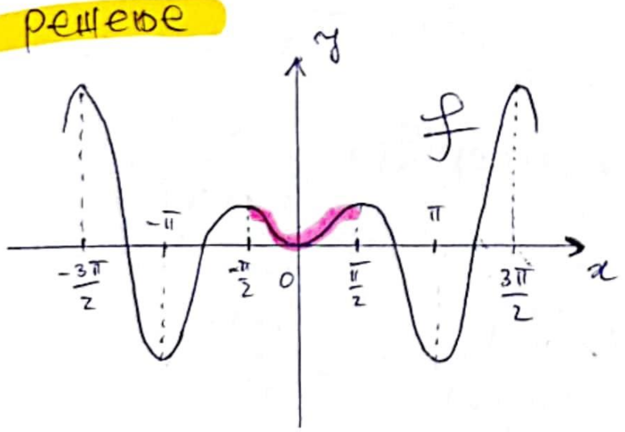
где су $a_0=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\,dx$,

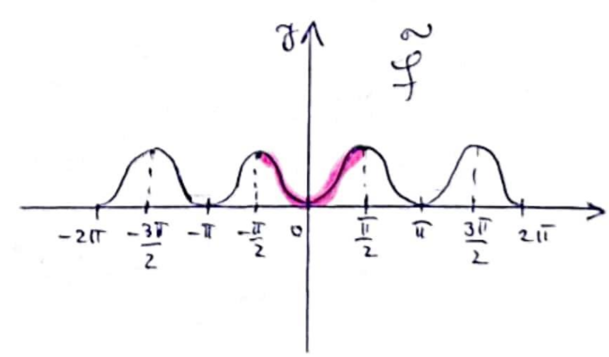
$$a_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

35. Развити $f(x)=x\sin x$ у Фуријеов ред на $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ и израчунати $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2+1}{(4n^2-1)^2}$

решење





Проширимо део f са $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ на $\mathbb{R}$ т.д. буде π-периодична (овде је $l=\frac{\pi}{2}$).

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} \tilde f(x)\,dx = \frac{2}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx = \left[\begin{matrix} u=x & dv=\sin x\,dx \\ du=dx & v=-\cos x\end{matrix}\right]$$

$\tilde f$ $\boxed{\text{парна}}$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\underbrace{-x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{0} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx\right) = \frac{4}{\pi}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tilde f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{\frac{\pi}{2}}x\right)dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\sin x\cos(2nx)\,dx$$

$\tilde f$ $\boxed{\text{парна}}$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\frac{1}{2}\Big(\sin((2n+1)x) - \sin((2n-1)x)\Big)\,dx =$$

$$= \left[\begin{matrix} u=x & dv=\big(\sin((2n+1)x)-\sin((2n-1)x)\big)\,dx \\ du=dx & v=\frac{-1}{2n+1}\cos((2n+1)x)+\frac{1}{2n-1}\cos((2n-1)x)\end{matrix}\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\underbrace{u\cdot v\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{0} + \frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos((2n+1)x)\,dx - \frac{1}{2n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos((2n-1)x)\,dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{(2n+1)^2}\sin((2n+1)x) - \frac{1}{(2n-1)^2}\sin((2n-1)x)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} - \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\right) = \frac{2(-1)^n}{\pi}\cdot\frac{(2n-1)^2+(2n+1)^2}{(4n^2-1)^2} =$$

$$= \frac{4(-1)^n(4n^2+1)}{\pi(4n^2-1)^2};$$

$b_n = 0$ (бо ж $\tilde f$ парна)

$$S\tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n(4n^2+1)}{\pi(4n^2-1)^2} \cdot \cos(2nx)$$

$$S\tilde{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\tilde{f}\left(\frac{\pi}{2}^+\right) + \tilde{f}\left(\frac{\pi}{2}^-\right)}{2} = \tilde{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Такође,

$$S\tilde{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n(4n^2+1)}{\pi(4n^2-1)^2} \cdot \underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2+1}{(4n^2-1)^2}} = \frac{\left(S\tilde{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{\pi}\right)\cdot\pi}{4} = \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\right)\cdot\pi}{4} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}.$$

$\blacksquare$

Крај :)