

24. Усрпугтатун суге:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} ; (\delta) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4^n}{(2n)!} ; (e) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 3n + 1}{n!} ; (\zeta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n \cdot n}$$

реппетте

$$(a) e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow e^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Одговоре је логаритамска сума:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - 1 = e^1 - 1 = e - 1$$

↑
од 1

Минус на $\cos x$

$$(8) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4^n}{(2n)!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n}}{(2n)!} -$$

$$- \frac{(-1)^0 \cdot 2^0}{0!} - \frac{(-1)^1 \cdot 2^2}{2!} = \cos 2 - 1 + 2 = \cos 2 + 1$$

$$(9) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 3n + 1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1+1}{(n-1)!} + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{(n-1)!} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e + 4e + e = 6e$$

↑ ↑
померили смо бројам
до крене од 0

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n \cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \ln \frac{3}{2} \quad \square$$

Сада могу пој задајка са примени теореме
са сор. 171 (а то је у аџари сџ. сџ. сџ.)
T1, T2, T3 са сор. 168-169).

25. Развџи у Маклоренов ред и одреди
обласћ дефинисаности:

$$(a) f(x) = \operatorname{arctg} x; \quad (b) f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

решџе

$$(a) f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ и знамо } \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1, 1),$$

$$\text{па је } f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n}, \quad x \in (-1, 1).$$

Ред аџ. поџ. у обласћ деф. па аџо интегрални
члан по члан:

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x (-1)^n t^{2n} dt \right) =$$

∫ и ∑ аџо да
окрџемо зџџ
Т. нџ сор. 171

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \right) \Big|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

Область сходимости:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{2n+1}}{\frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}} \right| = 1$$

$$\Rightarrow (-1, 1) \subseteq D$$

КОНВ. у $x = -1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (-1)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \quad \text{КОНВ. по Лейбницу}$$

КОНВ. у $x = 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 1^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{КОНВ. по Лейбницу}$$

$$\Rightarrow D = [-1, 1].$$

(с) Нека је $g(x) = \frac{1}{1-x}$. Приметимо $g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = f(x)$

$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in (-1, 1)$ - све се диференцирамо члан по члан у области КОНВ.

$$f(x) = g'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot x^n.$$

область конвергенције:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$$

$$\Rightarrow (-1, 1) \subseteq D$$

конв. у $x = -1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(n+1) \cdot (-1)^n}_{\downarrow 0} \quad \text{див. јер није могуће неопходан услов}$$

конв. у $x = 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(n+1) \cdot 1^n}_{\downarrow \infty} \quad - // -$$

Закљ, $D = (-1, 1)$. □

26. Сумирајте редове

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2n+1}}{2n+1}; (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$$

решење

$$(a) \text{ Нека је } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^{2n+1}}{2n+1}. \text{ Израчунајмо } f\left(\frac{1}{4}\right).$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}}{\frac{(-1)^{n+2}}{2n+3}} \right| = 1$$

$$\Rightarrow (-1, 1) \subseteq D$$

Рез конв. и за $x = \pm 1$ (Лажбину), па је $D = [-1, 1]$.

Нађимо $f'(x)$ (јер наслућујемо да је тај рез једноставнији од $f(x)$).

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{2n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot (2n+1) \cdot x^{2n}}{2n+1} =$$

$$= - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n} =$$

$$= - \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = - \frac{1}{1+x^2}$$

рез равн. конв.
на $[-1, 1]$ па
извод узавис
у суму

користићемо

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1, 1)$$

$$\text{Дакле, } f'(x) = - \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \int_0^x f'(t) dt = - \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = - \operatorname{arctg} t \Big|_0^x = - \operatorname{arctg} x$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2n+1}}{2n+1} = f\left(\frac{1}{4}\right) = - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{4}\right)$$

(δ) Нека је $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^{n+1}}{n(n+1)}$. Пратимо $f(1)$.

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}}{\frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}} \right| = 1$$

$$\Rightarrow (-1, 1) \subseteq D.$$

Конв. у $x = -1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot (-1)^{n+1}}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{— конв. (2. пор. кр.)}$$

конв. у $x = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 1^{n+1}}{n(n+1)} \quad \text{— конв. (Лажетис)}$$

$\Rightarrow D = [-1, 1]$ па та D можемо диференцирати f макс по макс.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^{n+1}}{n(n+1)} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1} \cdot x^{n+1}}{n(n+1)} \right)' = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n+1) \cdot x^n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^n}{n} = \ln(1+x) \end{aligned}$$

Закле, $f(x) = \ln(1+x)$

$$\Rightarrow f(x) = \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \ln(1+t) dt = \left[\begin{array}{ll} u = \ln(1+t) & dv = dt \\ du = \frac{dt}{1+t} & v = t \end{array} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= t \ln(1+t) \Big|_0^x - \int_0^x \frac{t+1}{1+t} dt = \\
&= x \ln(1+x) - \left(t - \ln|1+t| \right) \Big|_0^x = \\
&= x \ln(1+x) - x + \ln(1+x)
\end{aligned}$$

Коначно, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} = f(1) = \ln 2 - 1 + \ln 2 = 2 \ln 2 - 1$. □

27. Сумирајте редове

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n^2 x^n$; (б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$

решење

(a) Узредимо прво област конвергенције.

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} n^2}{(-1)^{n+2} (n+1)^2} \right| = 1$$

$$\Rightarrow (-1, 1) \subseteq D.$$

Лако се види да ред конвертира за $x = \pm 1$, па је $D = (-1, 1)$.

Сада рачунамо суму.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^2 x^n = - \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (-x)^n$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \quad \left/ \frac{d}{dx} \right. \leftarrow \begin{array}{|l} \text{можно дифференцировать} \\ \text{член по члену} \end{array}$$

$$\frac{-1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(-x)^{n-1} \cdot (-1)$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(-x)^{n-1} \quad \left/ \cdot (-x) \right.$$

$$\frac{-x}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(-x)^n \quad \left/ \frac{d}{dx} \right. \leftarrow \begin{array}{|l} \text{дифференцируем} \\ \text{член по члену} \end{array}$$

$$\frac{-(1+x)^2 + 2x(1+x)}{(1+x)^4} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2(-x)^{n-1} \cdot (-1)$$

$$\frac{1-x}{(x+1)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2(-x)^{n-1} \quad \left/ \cdot (-x) \right.$$

$$\frac{x(x-1)}{(x+1)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2(-x)^n = -S(x)$$

$$\Rightarrow S(x) = \frac{x(1-x)}{(x+1)^3}$$

5) Определим область сходимости.

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{(n+1)(n+2)}} \right| = 1 \Rightarrow (-1, 1) \subseteq D.$$

Nako se vidi da je konv. i za $x = \pm 1$,
 pa je $D = [-1, 1]$.

Stavimo $S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$

umi na neki
 paskey' op en
 jep je gale como
 n+1

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n+1} =$$

$$= \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot (-x)^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (-x)^n}{n} =$$

$$= \frac{1}{x^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-x)^n}{n} - \frac{(-1)^1 \cdot (-x)^1}{1} \right) =$$

$$= \frac{1}{x^2} \left(- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (-x)^n}{n} - x \right) =$$

$$= \frac{1}{x^2} \left(-\ln(1-x) - x \right)$$

$$\Rightarrow S'(x) = - \frac{\ln(1-x) + x}{x^2}$$

$$\Rightarrow S(x) = \underbrace{S(0)}_0 + \int_0^x S'(t) dt = - \int_0^x \frac{\ln(1-t) + t}{t^2} dt = \dots$$

$$\dots = \frac{(1-x)\ln(1-x)}{x} \quad \square$$

28. Развити у Маклорови ред и одредити област конвергенције:

$$(a) f(x) = \frac{1}{4-x^2} ; (b) f(x) = \ln(1+x+x^2+x^3)$$

$$(c) f(x) = x \arctg\left(\frac{2-x}{2+x}\right) + \ln(x^2+4)$$

решење

$$(a) f(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{4^{n+1}}$$

За дамо одредити D , узвешмо мету $t=x^2$.

Сад ред пошљаје $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{4^{n+1}}$ и $t_0=0, a_n = \frac{1}{4^{n+1}}$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 4 \Rightarrow t \in (-4, 4) \Rightarrow x \in (-2, 2).$$

Закле, $(-2, 2) \subseteq D$ и јав за проверити ± 2 .

конв. у $x=-2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^{2n}}{4^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4} \text{ гув.}$$

конв. у $x=2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{4^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4} \text{ гув.}$$

Закле, $D = (-2, 2)$.

$$\begin{aligned}
 (8) \quad f(x) &= \ln(1+x+x^2+x^3) = \ln(1+x+x^2(1+x)) = \\
 &= \ln((1+x)(1+x^2)) = \ln(1+x) + \ln(1+x^2) = \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad (*)
 \end{aligned}$$

где же:
$$a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^{n+1}}{n}, & n \text{ нечетно} \\ \frac{-1-2(-1)^{\frac{n}{2}}}{n}, & n \text{ парно} \end{cases}$$

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2}{n}}} = 1$$

$$\Rightarrow (-1, 1) \subseteq D$$

Конт. у $x = -1$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} a_n (-1)^n &\stackrel{(*)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot (-1)^{2n}}{n} = \\
 &= \underbrace{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{губ}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}}_{\text{Конт.}} - \text{губ.}
 \end{aligned}$$

Конт. у $x = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 1^n \stackrel{(*)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} - \text{Конт.}$$

$\uparrow$ Конт.

Таким, $D = (-1, 1]$.

(в) Трансформировав фјѐ f у нади да ће се подједноставиће.

$$f(x) = x \operatorname{arctg}\left(\frac{2-x}{2+x}\right) + \ln(x^2+4)$$

$$f'(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2-x}{2+x}\right) + x \cdot \frac{\frac{-(2+x)-(2-x)}{(2+x)^2}}{1+\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^2} + \frac{2x}{x^2+4} =$$

$$= \operatorname{arctg}\left(\frac{2-x}{2+x}\right) + x \cdot \frac{-4}{(2+x)^2 + (2-x)^2} + \frac{2x}{x^2+4} =$$

$$= \operatorname{arctg}\left(\frac{2-x}{2+x}\right) - \frac{2x}{x^2+4} + \frac{2x}{x^2+4} =$$

$$= \operatorname{arctg}\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$$

$$f''(x) = -\frac{2}{4+x^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)^n =$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{4^n} \quad / \int$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{4^n} dt = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C / \int$$

$$f(x) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)} \int_0^x t^{2n+1} dt + cx + d =$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+2}}{4^n(2n+1)(2n+2)} + cx + d$$

Тач го одредимо константите c и d .

$$d = f(0) = 0 \cdot \operatorname{arctg} 1 + \ln(4) = \ln 4$$

$$c = f'(0) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Заклучок,

$$f(x) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{4n(2n+1)(2n+2)} + x \cdot \frac{\pi}{4} + \ln 4$$

Тач областа конвергенције.

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{4n(2n+1)(2n+2)}}} = 1$$

$$\Rightarrow (-1, 1) \subseteq D$$

Користејќи Лајбницовата теорема за редите се го проверуваат крајните точки $x = \pm 1$, кај $D = [-1, 1]$. $\blacksquare$

29. Развие $f(x) = \sin x$ у Тјјорев ред у околината $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

решение
1. Нами (стандардно)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n. \text{ Најмно исвоје.}$$

$$f(x) = \sin x \rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f'(x) = \cos x \rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f''(x) = -\sin x \rightarrow f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f'''(x) = -\cos x \rightarrow f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x \rightarrow f^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

...

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 2!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 3!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \dots = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{n!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^n \end{aligned}$$

2. Найдите (применением Маклоренового разложения)

значит: $t = x - \frac{\pi}{4}$

$$\sin x = \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \sin t \cos \frac{\pi}{4} + \cos t \sin \frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin t + \cos t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n}}{(2n)!} \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{n!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^n. \quad \blacksquare$$

Фурijeови редови

Нека је $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -периодична и $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$

Дефиниција Фурijeов ред f је f је

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

$$\text{где је } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

Теорема Ако је f глс по глс тачка и S_f њен Фурijeов ред, онда је $S_f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$,

$$\text{где је } f(x+) = \lim_{t \rightarrow x+} f(t) \text{ и } f(x-) = \lim_{t \rightarrow x-} f(t).$$

(Зачу. ако је f непр. у x , онда је $f(x-) = f(x) = f(x+)$)

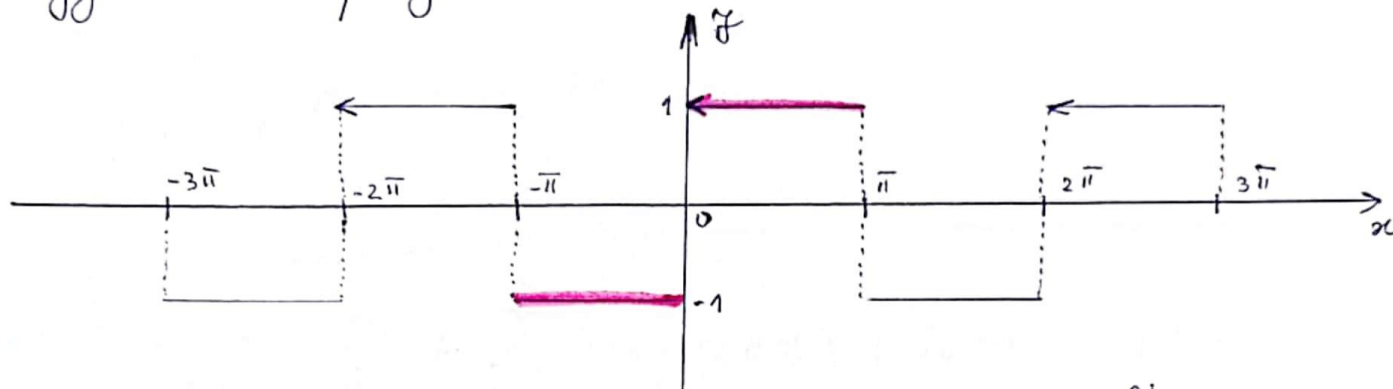
Теорема (Парсевалова једнакост)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

30. функцију $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 1, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$ развијти у Фурјеов
 ред и израчунати $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

решење

Потребно је да прво проширимо фкју f на $\mathbb{R}$ п-г.
 буде 2π -периодична.



Дефинишемо проширење $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ тако да $\tilde{f}(x + k \cdot 2\pi) = f(x)$,
 за $x \in [-\pi, \pi]$ и $k \in \mathbb{Z}$.

Развијемо $\tilde{f}$ у Фурјеов ред.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) \cos(nx) dx = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \cos(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nt) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) \sin(nx) dx = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \sin(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \cdot \cos(nx) \Big|_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{2}{n\pi} \cos(n\pi) + \frac{2}{n\pi} \cos 0 = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) =$$

$$= \begin{cases} 0, & n \text{ парно} \\ \frac{4}{n\pi}, & n \text{ не парно} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{\tilde{f}}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi} \sin((2n+1)x)$$

Како је $f = \tilde{f}$ на $[-\pi, \pi]$, тако је $S_f = S_{\tilde{f}}$ на $[-\pi, \pi]$.

Тада га одредимо негде другде.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = ?$$

$$S_f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi} \cdot \sin\left(\overbrace{(2n+1) \cdot \frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + n\pi}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4 \cdot (-1)^n}{(2n+1)\pi} = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

↑
Лепантска
сума

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} S_f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{f\left(\frac{\pi}{2}^+\right) + f\left(\frac{\pi}{2}^-\right)}{2} =$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} = \frac{\pi}{4} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

f је неуп. у $\frac{\pi}{2}$
па је
 $f\left(\frac{\pi}{2}^+\right) = f\left(\frac{\pi}{2}^-\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = ?$$

Користимо Парсегову једнакост.

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|f(x)|^2}_1 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{(2n+1)\pi} \right)^2 = \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{16} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx =$$

$$= \frac{\pi}{16} \cdot 2\pi = \frac{\pi^2}{8} \quad \square$$

пухнећа
сума

Коментар: Ако је f парна, онда је $f(x)\sin(nx)$ непарна па је $b_n=0$ и гласимо ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$, а ако је f непарна, онда, $a_n=0$, па гласимо ред $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(nx)$. Ово нам служи за селекту зај.